

文章编号: 0253-2239(2009)07-1951-05

# 角锥棱镜的误差引起的反射光束相位误差分析

黄 健<sup>1,2</sup> 鲜 浩<sup>1</sup> 姜文汉<sup>1</sup> 李新阳<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209; <sup>2</sup> 中国科学院研究生院, 北京 100039)

**摘要** 提出一种计算角锥棱镜反射光束相位误差的方法。光束通过非理想角锥棱镜时会引入一个附加光程差, 从而改变光束的相位特性和反射光束的传播方向。在小误差近似条件下, 采用光线追迹法建立了一个有效的数学模型, 计算角锥棱镜的二面角误差和反射面面形误差引起的传输光束的附加相位, 并分析了该模型的理论误差。在二面角误差为  $1''$ , 反射面面形光圈数小于 0.5 的条件下, 该模型的数值仿真结果显示角锥附加相位具有高度的中心对称性, 附加相位对入射光束引入的相位平均斜率为零, 这一特性与误差的种类和大小无关。角锥棱镜的附加相位模型为分析其在应用中给系统带来的误差提供了一个新的方法, 有助于指导不同应用场景中所使用角锥棱镜的加工指标要求。

**关键词** 光学仪器; 角锥棱镜; 加工误差; 附加相位; 中心对称性

中图分类号 TH74 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20092907.1951

## The Reflected Beam's Phase Aberration Induced by the Fabrication Errors of Corner Cube Retroreflector

Huang Jian<sup>1,2</sup> Xian Hao<sup>1</sup> Jiang Wenhan<sup>1</sup> Li Xinyang<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> *Institution of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China*)  
<sup>2</sup> *Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China*)

**Abstract** A method to calculate the aberration of the reflected beam of corner cube retroreflector (CCR) is introduced. The light beam which passes through a faulty CCR will be induced an additional optical path difference, thus the characteristic of the phase of the reflecting beam and the direction of the beam propagation are changed. Using ray trace method, an effective mathematical model is built to calculate the additional aberration caused by dihedral angle errors and curved reflecting surfaces, and the error of the model is also analyzed. On conditions that the dihedral angle errors is  $1''$  and f-number of the reflecting surfaces is less than 0.5, the numerical simulation of the model shows that the additional aberration has a great centrosymmetry and the mean slope coefficient of the additional phase versus the phase introduced by the incident beam is zero, this characteristic is independent of the type and magnitude of fabrication errors. The aberration model of CCR offers a new way to analyze the system error caused by CCR. In addition, it would provide helps in manufacture of CCR for specific purpose.

**Key words** optical instrument; corner cube retroreflector (CCR); fabrication errors; additional phase; centrosymmetry

## 1 引 言

理想的角锥棱镜会将入射到它的光束按严格的后向反射回去而没有角度偏移, 可以作为高精度的光束指向器件应用于激光通信, 卫星速差补偿中<sup>[1]</sup>; 同时理想角锥棱镜对穿过它的光束不产生相位误差的特性使得它在激光腔镜设计用有所应用<sup>[2]</sup>。但是在实际应用中, 角锥棱镜的加工误差, 特别是二面角误差和反射面面形误差使反射光束的反射方向发生

偏移, 使激光通信系统产生瞄准误差。另外角锥加工误差在反射光束上引起的相位变化会影响激光腔的谐振性能。所以研究角锥棱镜的加工误差与它对传输光束的影响可以为解决这些问题提供理论基础和改进角锥棱镜性能的新方法。国内相关研究分析了角锥棱镜反射光束的远场衍射特性<sup>[3,4]</sup>, 二面角误差与综合角误差的关系<sup>[5]</sup>, 但是对于加工误差和相位误差的定量的数学模型还没有明确的建立起

收稿日期: 2008-08-08; 收到修改稿日期: 2008-10-20

作者简介: 黄 健(1981—), 男, 博士研究生, 主要从事自适应光学和大气激光传输的研究。E-mail: comahj@126.com

导师简介: 鲜 浩(1969—), 男, 研究员, 主要从事自适应光学和大口径望远镜系统研究。

来。本文首先研究角锥棱镜的加工误差引起的光程差改变,建立角锥棱镜中光束传播光程差的定量数学模型,并分析角锥棱镜引起的附加相位的形态以及它与加工误差之间的关系。

## 2 角锥棱镜的附加相位模型

为描述角锥棱镜加工误差给通过它的光束带来的附加相位,建立图 1 所示的几何模型。

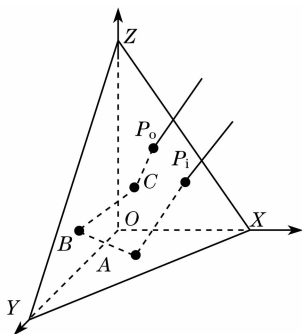


图 1 光束在角锥棱镜中的传输路径

Fig. 1 Trace of light passing through CCR

角锥棱镜由锥体  $OXYZ$  切割而成,光束的入射面和出射面是  $XYZ$  平面,三个反射面分别为  $XOY$ ,  $XOZ$ ,  $YOZ$ ,  $P_i$  是入射光线在入射面的交点,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  分别是光线在三个反射面的反射点,  $P_o$  是出射光线与出射面的交点。定义光线在有加工误差角锥内传播的光程相对于光线在没有加工误差的角锥中传播的光程之间的差异为角锥棱镜的附加光程差,由附加光程差引起的相位变化为角锥的附加相位,可以表示为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}n(\overline{AP_i} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CP_o} - 2h), \quad (1)$$

其中  $n$  为角锥棱镜所用材料的折射率,  $h$  为锥体的顶点  $O$  到  $XYZ$  平面的垂直距离,也称为角锥棱镜的高。对于没有加工误差的理想角锥棱镜,三个反射面为平面且互相垂直,  $\Delta\varphi$  的值为零,光线在角反射器内进行等光程传播。如果角锥棱镜有加工误差,  $\Delta\varphi$  的值不为零,且可正可负,分别表示传输光束的相位延迟和超前。

对于有加工误差的角锥棱镜,其三个反射面之间的二面角不是直角,反射面也不再是平面。当角锥的加工误差很小时(一般考虑二面角误差小于  $5''$ ,反射面光圈数小于 0.5),文献[6]提供了一种计算角锥棱镜附加光程差的方法。本文在此基础上进一步将附加光程差分解为二面角误差和面形误差两部分,即相对于建立坐标系的  $XOY$ ,  $XOZ$ ,  $YOZ$  平

面,三个反射面都是偏离理想平面的倾斜曲面。如图 2 所示,光线在  $XOY$  平面上的入射点为  $A$ ,其坐标为  $(x, y)$ 。由面形误差和二面角误差引起的附加光程差  $\Delta L$  分成两部分:仅由二面角误差有关的反射平面倾斜引起的误差  $t(x, y)$  和仅由弯曲的反射面引起的误差  $s(x, y)$ 。一般光学平面加工的光圈数为可做到小于 0.5,由此引起的曲率半径很大,因此对  $s(x, y)$  取值时从  $P_o$  开始而不从  $P_1$  开始计算也不会引入过大的误差。

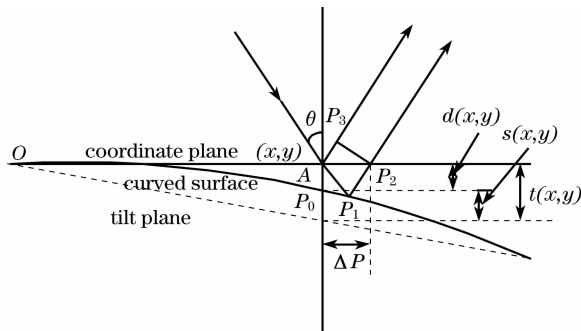


图 2 角锥棱镜的反射面是曲面时的附加光程差

Fig. 2 Additional optical path difference at a curved reflecting surface

$$\begin{aligned} \Delta L &\approx n(\overline{AP_1} + \overline{P_1P_2} - \overline{AP_3}) = \\ &n(\overline{AP_1} + \overline{P_1P_2} - \overline{AP_2} \sin \theta) = \\ &n \left[ \frac{2d(x, y)}{\cos \theta} - 2d(x, y) \tan \theta \sin \theta \right] = \\ &2nd(x, y) \cos \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{其中, } d(x, y) = s(x, y) + t(x, y). \quad (3)$$

在图 2 所示的光线传输中,定义下面的符号规则:当曲面向角锥棱镜内部凹陷时  $s(x, y)$  取负值,向角锥棱镜外凸出时取正值;曲面整体倾斜向角锥内部时  $t(x, y)$  取负值,向角锥棱镜外倾斜时取正值。根据这样的符号规则,  $d(x, y)$  为正值表示在反射点处将出现相位延时,反之表示相位超前。并且,当角锥棱镜的加工误差很小时,可以忽略光线出射位置的变化和光线方向的变化。

光线依次在三个反射面上反射,总的附加相位为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}n \sum_j \Delta L_j = \frac{4\pi}{\lambda}n \sum_j d_j \cos \theta_j, \quad (4)$$

式中  $\theta_j$  表示光线在第  $j$  个反射面上的入射角,光线垂直  $XYZ$  面正入射时,  $\cos \theta_j = \sqrt{3}/3$ 。

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}n \sum_j \Delta L_j = \frac{4\pi}{\lambda}n \sum_j d_j \cos \theta_j = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\lambda}n \sum_j d_j. \quad (5)$$

当材料折射率  $n=1$  时,上述分析也适用于三个平面反射镜互相垂直拼接成的空心角锥反射棱镜。

### 3 角锥棱镜附加相位的形态

在角锥棱镜通光截面上划分格点,计算每一个格点内的光线在角锥里传播产生的光程差,最终可以得出在出射光束在角锥通光截面上的整个附加相位,并假定入射光波长  $\lambda$  为 632 nm;并且所有的分析和仿真都基于光线垂直入射角锥的入射面这种情况。

在图 1 的坐标系中,光束垂直入射  $XYZ$  平面,光线传播方向  $N = -[\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]^T$ 。如果  $XOY$  平面的坐标为  $(x, y)$  的点  $A$  处的加工误差为  $d(x, y)$ ,角锥入射面  $XYZ$  的方程为:  $x + y + z = c$  ( $c$  为大于零的常数)。由于可以忽略光线的传播方向的偏差,当光线从  $A$  处入射时其传播方向为  $-N$ ,出射时为  $N$ 。通过建立这两种情况下的光线方程,可以计算光线与角锥入射截面  $XYZ$  的交点。根据光线可逆原理,光线从坐标为  $(x, y)$  的  $A$  点处出射时,与  $XYZ$  平面的交点  $P_i$  的坐标为  $(\frac{c+2x-y}{3}, \frac{c-x+2y}{3}, \frac{c-x-y}{3})$ ;光线从  $A$  点处入射时,先后经过三个反射面反射,最后与  $XYZ$  平面的交点  $P_o$  的坐标为  $(\frac{c-2x+y}{3}, \frac{c+x-2y}{3}, \frac{c+x+y}{3})$ 。

不难看出,  $P_i, P_o$  关于过角锥顶点的且垂直于角锥入射截面  $XYZ$  的直线是对称的,这条直线即为图 1 坐标系下光束正入射时的光轴。从  $P_i, P_o$  的坐标表达中可以看出,在点  $A$  处的加工误差  $d(x, y)$  将在出射面与光轴中心对称的两点产生相同的附加相位。上述分析也适用于三个反射面上任意点上的光线反射,因此在角锥棱镜的整个出射面上,由角锥棱镜加工误差产生的附加相位是中心对称的,附加相位对入射光束引入的相位平均斜率为零。

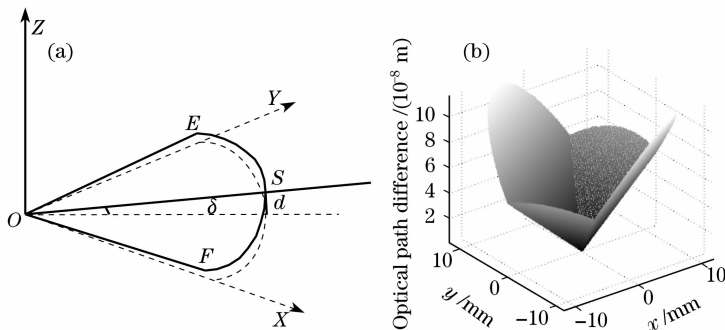


图 3 (a)角锥棱镜只有一个反射面倾斜的示意图;(b)只有一个反射面倾斜的角锥的附加光程差

Fig. 3 (a) Geometric model of cube retroreflector with only one reflecting plane tilt  $\delta$ , (b) Additional optical path difference of cube retroreflector with only one reflecting plane tilt  $1''$

根据几何关系可以计算出三个反射面的法矢量分别是

$$N_1 = [-\sin \delta / \sqrt{2}, -\sin \delta / \sqrt{2}, \cos \delta], \quad N_2 = [1, 0, 0], \quad N_3 = [0, 1, 0]. \quad (8)$$

在图 2 所示的光程差计算中,由于光束方向变化产生的误差和光束反射点位置变化导致的误差非常之小,由于光束方向变化导致的光程差的误差可以表示为

$$\Delta l = 2h\alpha^2 \quad (6)$$

其中  $h$  为角锥棱镜的高度,  $\alpha$  是入射光束和反射光束的夹角大小,有时称为角锥的综合角误差。对于入射截面直径为 25.4 mm 的角锥,其高度  $h$  为 18 mm,如角锥的综合角误差为  $5''$ ,此时  $\Delta l \approx 0.02$  nm,完全可以忽略。

光束反射点位置变化的误差可以用图 2 中标记的  $\Delta p$  表示。当光束垂直角锥入射面入射时

$$\Delta p = \frac{2\sqrt{3}d(x, y)}{3}. \quad (7)$$

由于  $d$  的值在波长量级,远远小于一般测量仪器中的采样点间隔  $100\lambda$ ,所以忽略  $\Delta p$  也是合适的。因此,光线在缺陷角锥内的传播路线近似认为与在理想角锥中的传播路线一致,角锥棱镜附加相位的大小仅决定于光线入射点处反射面相对于理想位置的偏移距离,附加相位的形态决定于加工误差的类型。

对每一个格点内传输的光线进行光线追迹,计算它在每个角锥反射面上反射时引入的附加光程差并累加起来,最终可以得到整个角锥出射面上的附加光程差。采用内切圆柱切割图 1 所示的角锥,得到一般使用的圆形入射面的角锥棱镜,曲线  $OESF$  包围的平面是角锥棱镜的一个有效反射面。假设入射面的半径为  $r$ ,角锥棱镜的反射面没有面形误差而只有一个反射面  $OESF$  的倾斜  $\delta$ ,  $OZ$  轴与该反射面的夹角为  $\pi/2 - \delta$ ,如图 3(a)所示。

三个二面角误差分别为

$$\begin{cases} \alpha_1 = \arccos\left(\frac{\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2^T}{|\mathbf{N}_1| \cdot |\mathbf{N}_2|}\right) - \frac{\pi}{2} = \arcsin\left(\frac{\sin \delta}{\sqrt{2}}\right) \\ \alpha_2 = \arccos\left(\frac{\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_3^T}{|\mathbf{N}_1| \cdot |\mathbf{N}_3|}\right) - \frac{\pi}{2} = \arcsin\left(\frac{\sin \delta}{\sqrt{2}}\right) \\ \alpha_3 = \arccos\left(\frac{\mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{N}_3^T}{|\mathbf{N}_2| \cdot |\mathbf{N}_3|}\right) - \frac{\pi}{2} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

在这种情况下,  $|\overline{OS}| = \sqrt{3}r$ , 光线入射到点  $S$  将会产生最大的附加光程差  $\Delta L_{\max}$

$$\Delta L_{\max} = 2nd_{\max} \cos \theta_j = 2n |\overline{OS}| \delta \cos \theta_j = 2nr\delta. \quad (10)$$

数值仿真中设定参数  $r = 0.012 \text{ m}$ ,  $\delta = 1''$ ,  $n = 1$ , 计算得三个二面角误差为  $\alpha_1 = 0.71''$ ,  $\alpha_2 = 0.71''$ ,  $\alpha_3 = 0$ , 最大附加光程差  $\Delta L_{\max} = 1.16 \times 10^{-7} \text{ m}$ , 与图3(b)

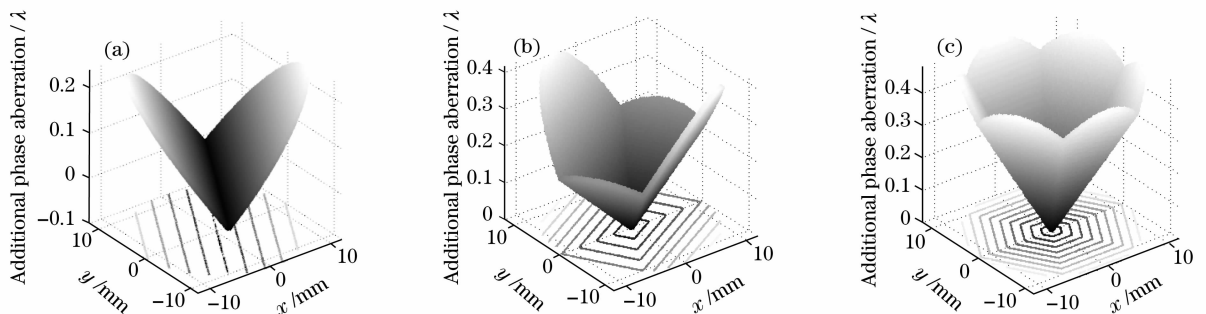


图4 不同二面角误差下角锥棱镜的附加相位。(a)  $\delta = [0, 0, 1'']$ ; (b)  $\delta = [0, 1'', 1'']$ ; (c)  $\delta = [1'', 1'', 1'']$

Fig. 4. Additional phase aberration of cube retroreflector with different dihedral angle errors. (a)  $\delta = [0, 0, 1'']$ ; (b)  $\delta = [0, 1'', 1'']$ ; (c)  $\delta = [1'', 1'', 1'']$

当角锥棱镜具有加工误差时, 它的附加相位图形被角锥的三条棱和他们的像分割成中心对称的六个扇形区域拼接而成, 如图4(c)所示。如果只有二面角误差, 每个扇形区域内都可以看成是不同方向传播的平面波, 所以如果入射光束是平行光, 那么反射光束将分成六个方向不同, 但关于入射光轴中心对称的六个光束。当加工误差比较大, 六个反射光束的远场光斑干涉很小时, 反射光束的远场是六个对称的光斑。图4(a)和图4(b)的形状是由于相邻的扇形区域合并的结果。如果角锥棱镜只有面形误差, 它的附加行为将出现另一种形态。

图5显示的是如果反射面用大半径球面近似, 并且其曲率中心都落在坐标轴上时角锥的附加形态。只有一个反射面或两个反射面有误差, 其附加相位是椭圆形的, 如图5(a)所示; 当三个反射面都有误差, 并且反射面光圈数相等时, 将会产生类似离焦的相位图形。

角锥棱镜的三个二面角误差的值可能大于零, 也可能小于零, 反射面的形状可能向外凸也可能向内

的峰值结果相符。

如角锥的加工误差有包含三个不同的二面角误差, 三个二面角误差分别用  $\delta = [\delta_1, \delta_2, \delta_3]$  表示, 二面角误差取正值表示该二面角大于  $90^\circ$ , 取负值表示该二面角小于  $90^\circ$ 。反射面均假设为大半径球面, 以光圈数  $N = [N_1, N_2, N_3]$  表示三个反射面曲面误差的大小, 光圈数取正值表示反射面向角锥外部凸起, 负值表示向角锥内部凹陷; 检测光圈数时所使用激光波长为  $632 \text{ nm}$ , 分别在各种误差参量下对前面的数学分析进行了数值仿真, 并设角锥入射面半径  $r = 12 \text{ mm}$ , 角锥材料的折射率  $n = 1.6$ , 角锥的顶点在坐标系原点处。得到相应加工误差下角锥棱镜附加相位图, 为了更清晰显示图形形状, 同时显示了网格图和等高线图如图4所示。

凹, 特别是反射面的曲率中心可能不在坐标轴上, 这种情况下角锥的附加光程差的图形形状会复杂一些, 假设曲率中心在过反射面中心的法线上, 如图3(a)所示的角锥反射面  $OESF$  上, 其中心为直线  $\overline{OS}$  和直线  $\overline{EF}$  的交点。数值仿真的结果如图6所示。

图6的三幅图形显示了具有不同加工误差的角锥棱镜的更复杂的附加相位图形。图6(a)显示了如果加工误差有正有负, 那么在附加相位的不同区域将会出现有的超前有的落后; 当反射面曲率中心不在坐标轴上, 而是在过反射面中心的法线上, 附加相位的图形就会呈现图6(b)显示的形状; 图6(c)可以看成是(a)和(b)直接叠加的结果, 这正是(3)式的物理意义, 即具有各种加工误差的角锥棱镜, 它的附加相位值等于当角锥棱镜只有单一误差的附加相位值的线性叠加。

只要角锥棱镜的面形能够解析表达出来, 并且加工误差的大小适用小误差近似(小误差近似的条件是: 相对于测量的采样间距, 光线在角锥内传输时的反射点位置偏移可以忽略), 我们就可以用前面

所述的方法对任意加工形状的角锥棱镜的附加光程差进行计算、分析和仿真,无论反射面向内凹或向外凸、或者反射面的曲率中心在在过反射面的任意位

置的法线上。但是无论如何,由于角锥棱镜的加工误差引入的反射光束的相位误差仍然具有非常好的中心对称性。

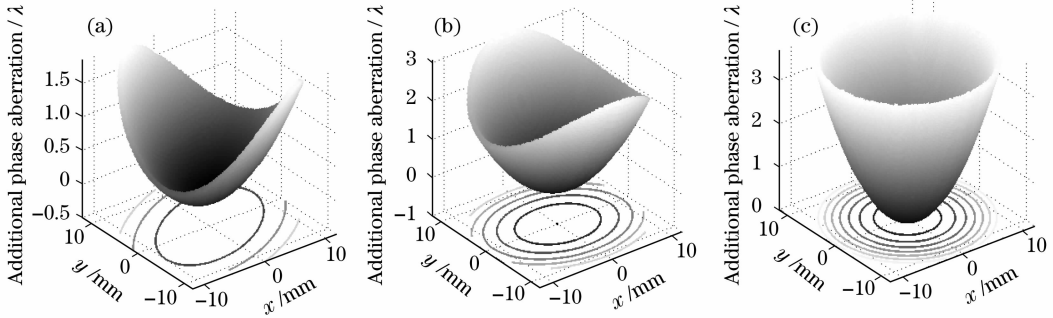


图 5 不同反射面面形误差下角锥棱镜的附加相位。(a)  $N=[0.5,0,0]$ ;(b)  $N=[0.5,0.5,0]$ ;(c)  $N=[0.5,0.5,0.5]$   
 Fig. 5 Additional phase aberration of cube retroreflector with different curved reflecting surfaces. (a)  $N=[0.5,0,0]$ ;  
 (b)  $N=[0.5,0.5,0]$ ; (c)  $N=[0.5,0.5,0.5]$

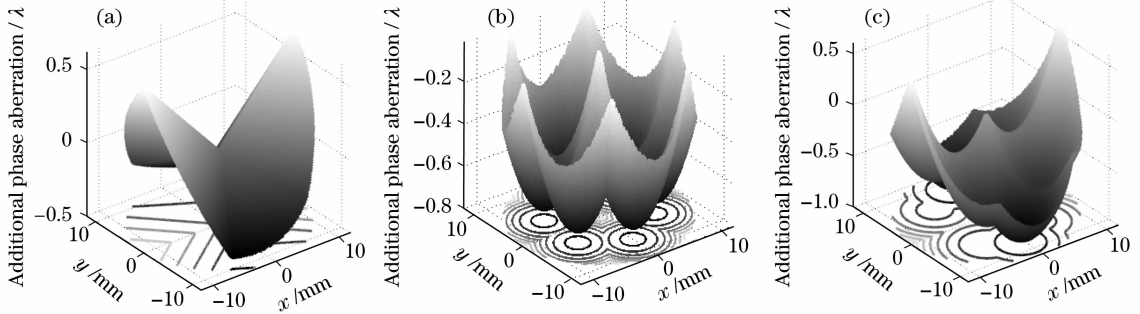


图 6 不同加工误差下的角锥的附加相位。(a)只有二面角误差  $\delta=[3'',-2'',-1'']$ ;(b)只有反射面面形误差,反射面光圈数为  $N=[0.3,0.3,0.3]$ ;(c),同时具有两种加工误差,其值等于(a)和(b)中的误差值  
 Fig. 6 Additional phase aberration of cube retroreflectors with different fabrication errors. (a) only dihedral angle errors  $\delta=[3'',-2'',-1'']$ ;  
 (b) only curved reflecting surface  $f$ -numbers  $N=[0.3,0.3,0.3]$ ; (c) include two kinds of errors which are the same as the errors in (a)and (b)

### 4 结 论

本文使用光线追迹法,分析了角锥棱镜加工误差,包括二面角误差和反射面面形误差,对在其中传输的光线光程差的影响,建立了计算角锥棱镜附加相位的数学模型。这一模型适用于实心材料切割的角锥棱镜和空心角锥棱镜,同时还讨论了此模型的误差和适用条件。在角锥棱镜的加工过程中,如果只对相位误差的大小有要求,则要同时限制二面角误差大小与反射面面弯曲的程度;另一方面,对角锥加工误差类型的选择可以得到符合特定应用要求的相位形态。

### 参 考 文 献

1 Wang Guchang, Wang Xiaobing, Sun Bin *et al.*. A kind of compact design on cube corner retro-reflector array in laser cooperative target on satellite [J]. *Chinese J. Lasers*, 2004, **31**(6):673~676  
 王古常,王小兵,孙 斌等. 卫星激光合作目标中角反射器的密

接布阵设计[J]. *中国激光*, 2004, **31**(6):673~676  
 2 Lu Changyong, Li Li, Liu Xu *et al.*. Laser diode-pumped passively Q-switched laser with corner-cube resonator [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(7):1228~1231  
 卢常勇,李 莉,刘 旭等.角锥棱镜腔激光二极管抽运被动调Q激光器[J]. *光学学报*, 2007, **27**(7):1228~1231  
 3 Ye Yidong, Peng Yong, Chen Tianjiang *et al.*. Numerical Simulating of Cube Corner Retroreflector [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(4):485~490  
 叶一东,彭 勇,陈天江等. 角锥后向反射器的数值模拟研究[J]. *光学学报*, 2003, **23**(4):485~490  
 4 Nie Hui, Weng Xingtiao, Li Song *et al.*. The far-field diffractive characteristics of cube-corner prism[J]. 2003, **23**(12):1470~1474  
 聂 辉,翁兴涛,李 松等.角锥棱镜的远场衍射特性[J]. *光学学报*, 2003, **23**(12):1470~1474  
 5 Kuang Cuifang, Feng Qibo, Liu Xin. By vector analysis the rectangular angle error influence on characteristics of the beam of cube-corner retroreflector [J]. *Optical Instrum ents*, 2003, **25**(4):55~58  
 匡萃方,冯其波,刘 欣. 用矢量方法分析角锥棱镜直角误差对其光路反射特性的影响[J]. *光学仪器*, 2003, **25**(4):55~58  
 6 Atsushi Minato, Nobuo Sugimoto, Yasuhiro Sasano. Optical design of cube-corner retroreflectors having curved mirror surfaces[J]. *Appl. Opt.*, 1992, **31**(28):6015~6020