

# 强非局域介质中的二维自相似孤子波

陈粟宋

(顺德学院电子工程系, 广东 顺德 528300)

**摘要** 利用自相似方法研究了强非局域介质中的二维孤子波, 得到了强非局域薛定谔方程的精确自相似解, 该解可以用惠克斯函数来描述。研究表明, 在该种介质中存在孤子群, 以自相似的方式传输, 通过选择光孤子参数, 高阶光孤子可以存在不同的形式, 如高斯光孤子族、涡旋光孤子族、对称性单层光孤子族和多层光孤子族、不对称单层光孤子族和多层光孤子族。通过数值模拟, 进一步证明孤子群在传输过程中的稳定性。

**关键词** 非线性光学; 空间光孤子; 自相似方法

**中图分类号** O437 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20092906.1653

## Two-Dimensional Self-Similar Soliton Waves in Highly Nonlocal Media

Chen Susong

(Department of Electronic Engineering, Shunde College, Shunde, Guangdong 528300, China)

**Abstract** The propagation of two-dimensional (2D) spatial soliton waves in highly nonlocal media is investigated analytically by using self-similar method. A broad class of exact self-similar solutions to the highly nonlocal Schrödinger equation is obtained, and it can be described by Whittaker function in highly nonlocal media. The results demonstrate that there exist soliton waves, propagating in a self-similar manner. The higher-order spatial soliton waves can exist in various forms, such as 2D Gaussian soliton family, vortex-ring soliton family, multipole soliton family and defects soliton family by choosing optical soliton parameters. The stability of these soliton clusters in propagation is confirmed by direct numerical simulation.

**Key words** nonlinear optics; spatial optical soliton; self-similar method

### 1 引言

空间光束在非线性介质中传输时, 一方面由于衍射效应而展宽; 另一方面由于非线性效应而压缩, 当衍射效应和非线性效应相互抵消时, 光束能够保持稳定传输, 形成空间光孤子。根据传输介质对作用在其上的光场的非线性响应局域程度的不同, 可分为局域、弱非局域、一般非局域与强非局域介质<sup>[1]</sup>。非局域空间光孤子就是存在于非局域介质中的空间光孤子。在非线性介质中, 非局域是自然界普遍存在的现象<sup>[1~6]</sup>。研究表明, 在克尔光非线性介质中, 具有任意对称非局域非线性形状的局域波包, 都可以用一般的非局域非线性薛定谔方程(NNSE)来描述。在高维非线性克尔介质中, 非局域能阻止光束坍塌, 在一定条件下使孤子波在该种介质中稳定传输<sup>[1,7]</sup>。

Snyder 等提出了强非局域非线性介质中的空间光孤子的线性模型(即所谓的 Snyder-Mitchell 模

型), 大大推动了非局域空间光孤子的研究。而后从 Snyder-Mitchell 模型出发, 兴起了空间光孤子的研究热潮<sup>[8~13]</sup>。

本文利用自相似方法, 得到了 Snyder-Mitchell 模型的精确解, 与文献[7]有所不同, 文献[7]中的解仅是本文解的一个特例(即本文  $n=0$  和  $m=0$  的情况), 即所谓的基本孤子解。虽然 Alexander I. Yakimenko 等<sup>[14]</sup>研究了非局域非线性自聚焦介质中稳定的涡旋孤子, 其结果是本文中  $q=1, n=0, m=1$  情况, 并在传输过程中显现出不稳定性, 并且未讨论高阶涡旋孤子。文献[15]利用实验和数值模拟的方法研究了偶极子、三极子、四极子和单层多极孤子, 目前还没有人研究多层多极孤子和不对称缺陷孤子。

### 2 强非局域薛定谔方程的自相似解

在傍轴近似条件下, 沿  $z$  轴方向传输的光束, 其复振幅  $u(\mathbf{r}, z)$  可以用非线性薛定谔方程来描述, 归

一化形式为<sup>[1,8]</sup>

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 u + N(I)u = 0, \quad (1)$$

式中  $\nabla_{\perp}^2$  为横向拉普拉斯算符,  $\mathbf{r} = (x, y) = (r, \theta)$  为径向坐标,  $I = |u|^2$ . 非线性项  $N(I)$  一般具有非局域非线性形式<sup>[9]</sup>:

$$N(I) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\mathbf{r}-\mathbf{r}') I(\mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}', \quad (2)$$

式中响应函数  $R(\mathbf{r})$  具有对称的正实函数形式, 满足归一化条件  $\int R(\mathbf{r}) d^2 \mathbf{r} = 1$ . 当响应函数  $R(\mathbf{r})$  远宽于强度分布函数  $I(\mathbf{r})$  时, 非线性项变成与响应函数成正比,  $N(I) \approx -PR(\mathbf{r})$ ,  $P$  为光束的功率. 假定在坐标原点强度分布显现为峰值, 通过泰勒展开, 可以获得  $N(I) \approx -P(R_0 + R_2 r^2)$ , 这里  $R_0 = R(r=0)$ ,  $R_2 = d^2 R(\mathbf{r})/d^2 r^2|_{r=0}$ . 在这种情况下, 强非局域薛定谔方程简化成具有谐振势的非线性薛定谔方程. Snyder 和 Mitchell 甚至把非线性项认为与非线性功率函数成正比, 即  $\Delta N(I) \approx -\alpha^2(P)r^2$ , 即人们所称的 Snyder-Mitchell 模型<sup>[7]</sup>. 虽然这个模型是线性的, 但仍把它看作处理强非局域非线性孤子传输的有效工具, 可以用来解释自然界中的许多强非局域非线性现象<sup>[10,11]</sup>.

在二维强非局域非线性介质中, 光脉冲的传输

行为可以用 Snyder-Mitchell 模型来描述, 归一化形式为<sup>[1,7]</sup>

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 u - sr^2 u = 0, \quad (3)$$

式中  $z$  是传播方向,  $s(>0)$  是与  $\alpha^2(P)$  成正比的参数.  $P$  为等于初始功率的一个常数  $P_0$ . (3) 式第二项代表介质的衍射效应而第三项来源于光的非线性效应. 在极坐标系中拉普拉斯算符可以表为

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$\varphi$  为方向角,  $r^2 = x^2 + y^2$ . 对 (3) 式进行分离变量  $u(z, r, \varphi) = U(z, r)\Phi(\varphi)$ , 可以得到如下方程

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0, \quad (4a)$$

$$i \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{2r^2} U - sr^2 U = 0, \quad (4b)$$

式中  $m$  为实常数. 从 (4a) 式可以得到:

$$\Phi_m(\varphi) = \cos m\varphi + iq \sin m\varphi,$$

这里  $q (0 \leq q \leq 1)$  是为了描述光强调制深度而引入的一个物理量<sup>[4]</sup>. (4b) 式的光(复)场可以定义为  $U(z, r) = A(z, r) \exp[iB(z, r)]$ , 式中  $A(z, r)$  和  $B(z, r)$  是实函数. 把  $U(z, r)$  代入 (4b) 式, 把虚部和实部进行分离并令每一部分为零, 可以得到耦合方程

$$-\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \left( \frac{\partial B}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{rA} \frac{\partial A}{\partial r} \right] - \frac{m^2}{2r^2} - sr^2 = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{A} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} \right) = 0. \quad (6)$$

为了寻找 (4b) 式的自相似解, 引入变换  $A(z, r) = \frac{kP_0}{\omega(z)} F(\theta)$  和  $B(z, r) = a(z) + b(z)r + c(z)r^2$ , 式中  $k$  为归一化常数,  $\omega(z)$  为光束的束宽,  $P_0$  为初始光束的功率,  $\theta(z, r)$  为实自相似变量,  $a(z)$  为相位失配,  $b(z)$  为频移,  $c(z)$  为波前曲率, 它们都是传输距离的函数. 把  $A(z, r)$  和  $B(z, r)$  代入 (6) 式, 展开成  $r$  的多项式并令其系数为零, 经对称化, 可以得到:  $\theta(z, r) = \frac{r^2}{\omega^2}$ ,  $b(z) = 0$  和  $c(z) = \frac{1}{2\omega} \frac{d\omega}{dz}$ . 考虑到以上各式, 并代入 (5) 式, 可以产生  $F(\theta)$  的微分方程

$$-\frac{\omega^2}{2} \frac{da}{dz} F + \frac{dF}{d\theta} + \theta \left[ \frac{d^2 F}{d\theta^2} + \frac{\omega^2}{2} \left( -\frac{\omega}{2} \frac{d^2 \omega}{dz^2} - s\omega^2 \right) F \right] - \frac{m^2 F}{4\theta} = 0. \quad (7)$$

引入另外一个的变换  $F(\theta) = \theta^{-1/2} f(\theta)$ , (7) 式可以转换为

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} + \left[ \frac{\omega^2}{2} \left( -\frac{\omega}{2} \frac{d^2 \omega}{dz^2} - s\omega^2 \right) - \frac{1}{\theta} \frac{\omega^2}{2} \frac{da}{dz} + \frac{1}{\theta^2} \frac{1-m^2}{4} \right] f = 0. \quad (8)$$

假设

$$\frac{\omega^2}{2} \left( -\frac{\omega}{2} \frac{d^2 \omega}{dz^2} - s\omega^2 \right) = -\frac{1}{4}, \quad (9)$$

$$-\frac{\omega^2}{2} \frac{da}{dz} = n. \quad (10)$$

(8)式可以简化为

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} + \left[ -\frac{1}{4} + \frac{n}{\theta} + \frac{1-m^2}{4\theta^2} \right] f = 0. \quad (11)$$

式中  $n = 0, 1, 2, \dots$  是描述光束径向分布而引入的一个物理参数。(11) 式即惠克特微分方程, 它的解是一般的惠克特多项式<sup>[16]</sup>, 即

$$f(\theta) = W_m(\theta) = \frac{\exp(-\theta/2)\theta^n}{\Gamma(1/2 - n + 2m)} \times \int_0^\infty \tau^{-n-1/2+2m} \left(1 + \frac{\tau}{\theta}\right)^{n-1/2+2m} \exp(-\tau) d\tau,$$

其中  $\Gamma$  为伽玛函数。(9) 式可写成

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\eta}{dz} \right)^2 + \frac{2s\omega_0^4(\eta^2 - 1)(\eta^2 - \lambda)}{\eta^2} = 0. \quad (12)$$

式中  $\eta = \omega/\omega_0, \lambda = 1/(2s\omega_0^4)$ 。这里的下标“0”代表在  $z = 0$  相对应物理量的初始值。取  $\eta(z)|_{z=0} = 1$  和  $d\eta(z)/dz|_{z=0} = 0$ , 对(12) 式积分一次可以得到

$$\omega^2 = \omega_0^2 [1 + (\lambda - 1) \sin^2(2\sqrt{s}\omega_0^2 z)]. \quad (13)$$

从(10)式和波前曲率的定义可以得到

$$c(z) = \frac{\sqrt{s}\omega_0^2(\lambda - 1) \sin(4\sqrt{s}\omega_0^2 z)}{2[1 + (\lambda - 1) \sin^2(2\sqrt{s}\omega_0^2 z)]}, \quad (14a)$$

$$a(z) = a_0 - \frac{n \arctan[\sqrt{\lambda} \tan(2\sqrt{s}\omega_0^2 z)]}{\sqrt{\lambda}\omega_0^2}, \quad (14b)$$

把以上分析进行组合, 最后可以得到(3)式的自相似精确呼吸子解

$$u_{mm}(z, r, \varphi) = \frac{kP_0}{r} (\cos m\varphi + iq \sin m\varphi) \times W_m(r^2/\omega^2) \exp\{i[a(z) + c(z)r^2]\}, \quad (15)$$

式中  $\omega(z), a(z), c(z)$  由(13) 式和(14) 式决定,  $k =$

$$\sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+m+1)}}.$$

从(13) 式可见, 当  $\lambda = 1$  时, 衍射刚好与非线性相互抵消, 这时  $\omega = \omega_0$ , 束宽与传输距离无关, 形成所谓的线性孤子(Accessible soliton)<sup>[7]</sup>。其他孤子参数可以简化为  $\omega = \omega_0, c = 0$  和  $a(z) = a_0 - 2nz/\omega_0^2$ 。从而得到(3) 式的自相似孤子解

$$u_{mm}^{\text{sol}}(z, r, \varphi) = \frac{kP_0}{r} (\cos m\varphi + iq \sin m\varphi) \times W_m(r^2/\omega_0^2) \exp[i(a_0 - 2nz/\omega_0^2)]. \quad (16)$$

### 3 结果分析与讨论

在(16)式描述二维空间孤子, 由二个参数  $n, m$  进行描述。当控制某一参数时, 这些孤子有相似的特征, 形成孤子族。对于选定孤子参数某一特定值, 将分析二维空间孤子的光强、孤子的零点位置

( $u_{mm} = 0$ )和极值点位置( $du_{mm}/dr = 0$ )的分布, 在这里选择初始条件  $\omega_0 = 1, P_0 = 1$ 。

#### 3.1 精确解与数值模拟的比较

(15)式是(3)式的精确呼吸子解, 但对于(1)式而言仅仅是一个近似解。图1是在极坐标中精确呼吸子解(15)式与(1)式数值模拟的比较。初始输入脉冲取如下形式:

$$u_{01}(0, r, \varphi) = \frac{kP_0 r}{\omega_0^2} (\cos \varphi + iq \sin \varphi) \times \exp\left(-\frac{r^2}{2\omega_0^2} + ia_0\right). \quad (17)$$

并假设在(2)式中所选用的材料的响应函数为高斯分布:

$$R(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{\pi\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{\sigma_0^2}\right),$$

取  $\sigma_0 = 100$ , 即在强非局域范围之内。图1是  $q = 0$  条件下对于不同的  $\lambda$ , 精确呼吸解(15) 式与(1) 式数值解的比较, 图中  $\pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$  为  $2\sqrt{s}\omega_0^2 z$  的取值, 它代表  $1/4$  周期的呼吸子振荡特性。(1) 式的数值解证实了在强非局域范围内呼吸子传输的稳定性, 坍塌行为不可能发生。可以看到, 精确解是稳定的并与数值解吻合。

从图1可以看出, 当  $\lambda < 1$  时, 光波包从初始位置的2个大花瓣变成在  $2\sqrt{s}\omega_0^2 z = \pi/2$  位置的小花瓣, 其间隔随传输距离的增大而增大。相反, 当  $\lambda > 1$  时, 光波包变大, 它们之间的间隔随传输距离的增大而减小。孤子成周期性的扩张/收缩变化, 二花瓣之间的间隔随传输距离显现周期性的振荡。

#### 3.2 一般的二维空间孤子族 ( $m$ 是非负整数)

##### 3.2.1 高斯孤子族 ( $m = 0$ )

当  $m = 0$  时, (13) 式可以描述高斯孤子族。图2是精确解(16) 式在不同孤子参数  $n$  条件下高斯孤子族的比较。该类孤子族沿径向有  $n$  个零点和  $n + 1$  极值点。  $n$  越大, 径向半径也越大。最大光强位于中心位置。显然, 当二个参数都为零时, 它们形成一个亮圆环, 称为基本高斯孤子, 这正是文献[7] 所讨论精确孤子解(16) 式的特殊情况。

##### 3.2.2 涡旋孤子族 ( $q = 1, m > 0$ )

对  $m > 0$  和  $q = 1$ , 存在涡旋孤子族。图3列举了该类孤子族的一些例子。可以看到, 对于相同的  $m$ , 参数  $n$  越大, 孤子族的径向半径越长。径向存在  $n + 1$  个零点和  $n + 1$  个极值点, 但在中心位置的光强为零。文献[14] 仅讨论了涡旋孤子只有一个零点和一个极值的情况, 其它高阶涡旋孤子并未涉及。

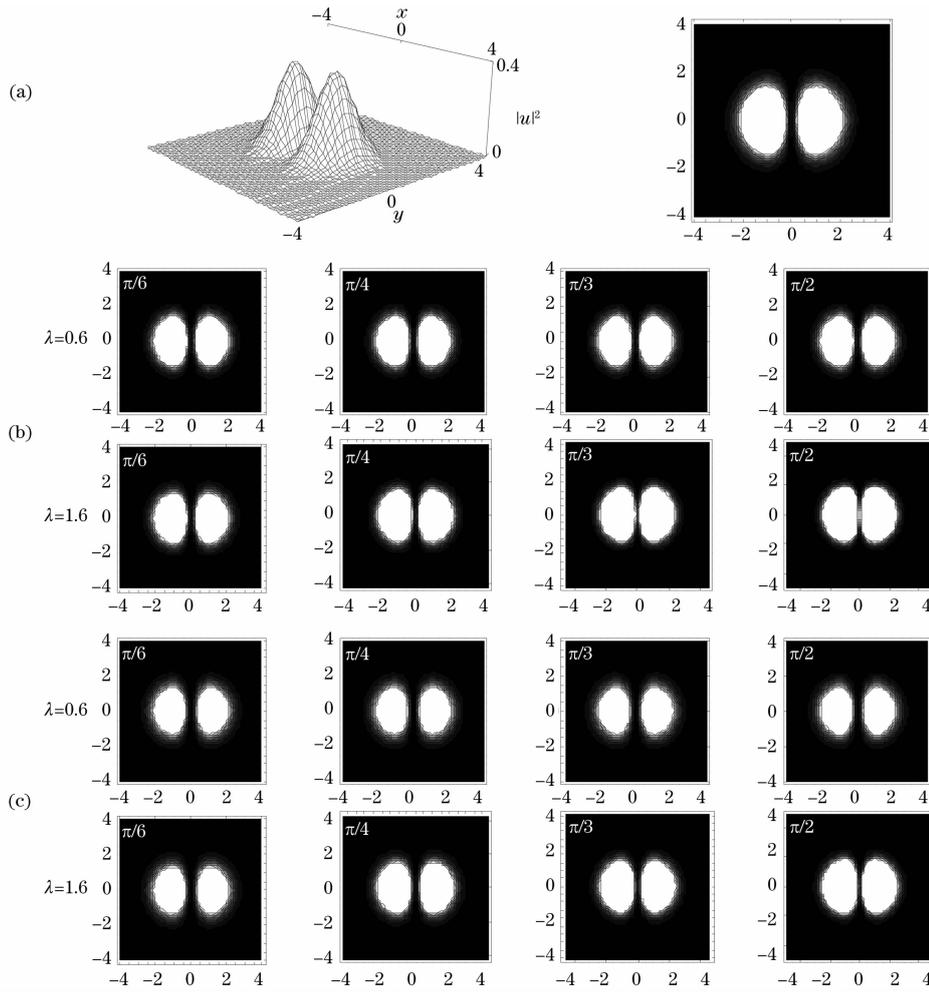


图 1 光波包  $u_{01}$  对不同  $\lambda$ , 数值解与数值模拟的比较。(a) 初始光剖面;(b) (15)式的精确解;(c) (1)式的数值模拟  
Fig. 1 Comparison of the analytical solutions with the numerical simulations for the  $u_{01}$  wavepacket, for different  $\lambda$ .

(a) Initial beam profile; (b) analytical solution of Eq. (15); (c) numerical simulation of Eq. (1)

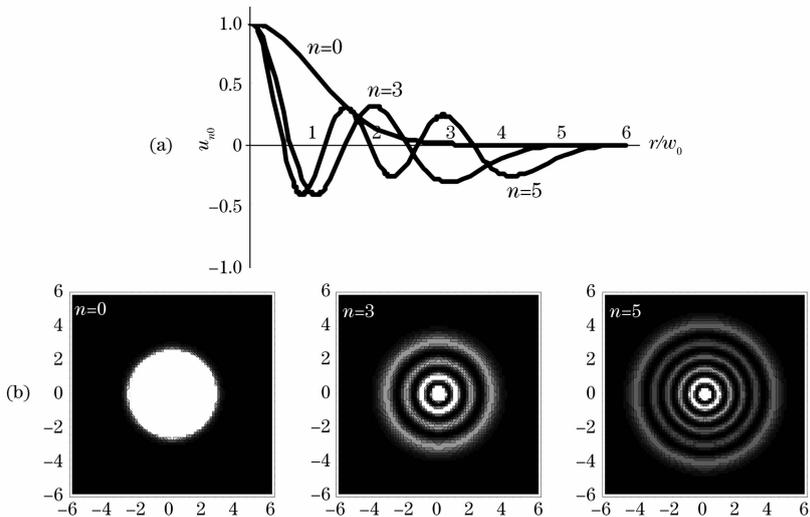


图 2 当  $m=0$  时对不同的  $n$  解析解的比较。(a) 高斯孤子族的零点和极值点分布;(b) 光强分布  
Fig. 2 Comparison of the analytical solution with intensity for different  $n$  and  $m=0$ . (a) Position distribution of the zero point and extreme point; (b) intensity distribution of Gaussian soliton family

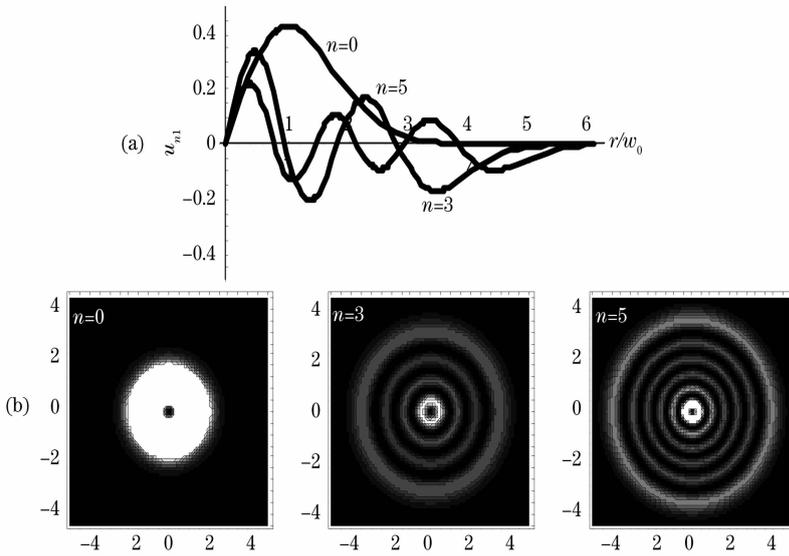


图 3 当  $q=1, m=1$  时, 涡旋孤子族特性比较。(a) 涡旋孤子族的零点和极值点分布; (b) 光强分布

Fig. 3 Some properties of the vortex-ring soliton family with  $q=1, m=1$ . (a) Position distribution of the zero point and extreme point; (b) intensity distribution

3.2.3 多极孤子族 ( $q=0, m \neq 0$  的正整数)

对于孤子参数  $m \neq 0$  和  $q=0$ , 取不同的孤子参数 ( $n, m$ ), 观察到了多极孤子族。它包含单层 ( $n=0, m \neq 0$ ) 和多层 ( $n$  为正整数,  $m \neq 0$ ) 多极孤子。图 4 为一些典型例子。

从多极孤子族可以看到一些非常有趣的现象: 孤子随方向角作有规律的分布。当  $m$  足够大时, 这些亮点形成美丽的孤子环。每一层亮点数由  $m$  决定, 孤子环的层数由  $n$  决定。它们形成  $n+1$  层, 总亮点数为  $2m(n+1)$ 。

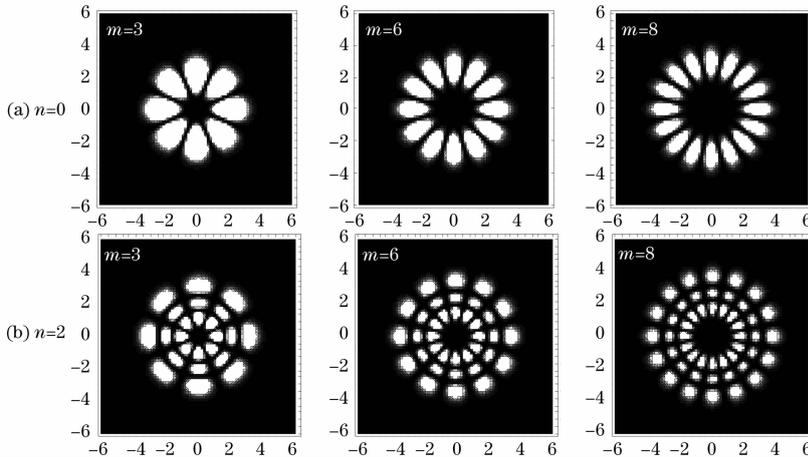


图 4 不同孤子参数的光强分布

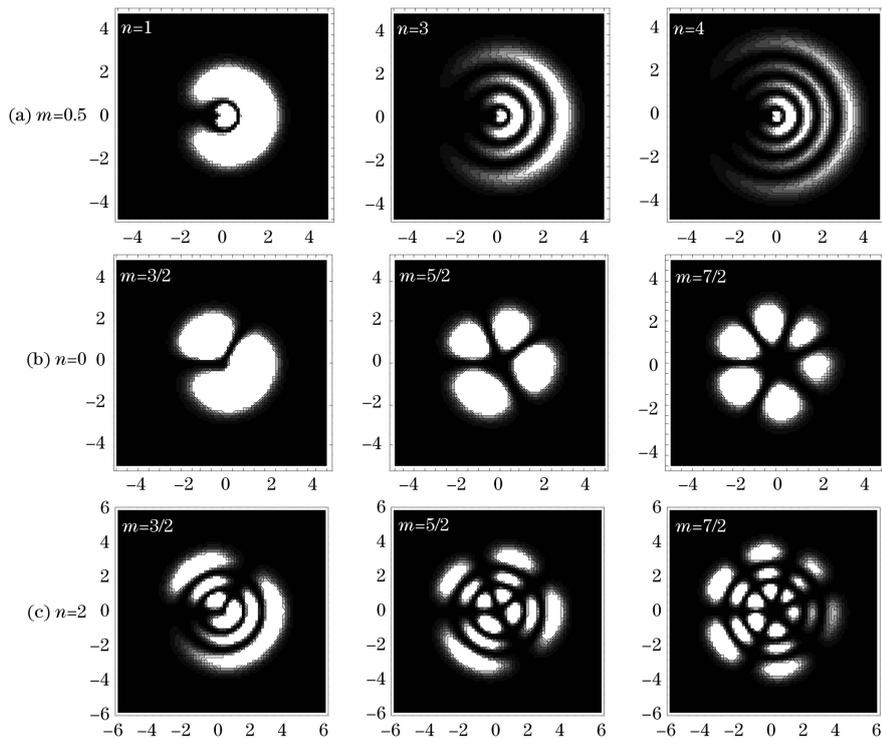
Fig. 4 Intensity distribution with different parameters of solitons

3.3 缺陷孤子族 ( $m > 0$  的分数)

对于具有不同的整数  $n$  和  $q=0$  以及  $m > 0$  的分数, 图 5 画出了一些光场和光强分布的例子。把这类孤子族称为缺陷孤子族<sup>[17]</sup>。

图 5(a) 是典型缺陷半圆环孤子族。可以看到, 光场在一边非常强, 而另外一端则非常弱。它们形

成  $n+1$  层。当  $q=0$  和  $m (> 1)$  为非整数时, 可以发现不对称多极孤子族。它也包含单层和多层缺陷多极孤子。图 5(b)、图 5(c) 作出几个有趣的例子。每一层亮点数由  $m$  决定, 孤子环的层数由  $n$  决定。它们形成  $n+1$  层, 总亮点数为  $(2m-1)(n+1)$ 。

图 5  $q=0$  时缺陷孤子族的典型例子Fig. 5 Examples of defects soliton family with  $q=0$ 

## 4 结 论

利用自相似方法得到了二维强非局域薛定谔方程的自相似解。发现了在二维强非局域介质中存在稳定空间线性光孤子族。在合适的条件下,强非局域会引起在区域内介质折射率的变化,导致二维高斯光孤子族、涡旋光孤子族、对称环路光孤子族和缺陷光孤子族的形成。

## 参 考 文 献

- O. Bang, W. Krolikowski, J. Wyller *et al.*. Collapse arrest and soliton stabilization in nonlocal nonlinear media[J]. *Phys. Rev. E*, 2002, **66**(4): 0466192-1~0466192-5
- A. Dreischuh, D. N. Neshev, D. E. Petersen *et al.*. Observation of attraction between dark solitons[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, **96**: 043901-1~043901-4
- Wang Xinghua, Guo Qi, Xie Yiqun. Analysis of Gaussian beam parameters evolution law in strongly nonlocal media[J]. *Chinese J. Lasers*, 2005, **32**(8): 1059~1062  
王形华,郭旗,谢逸群. 强非局域介质中高斯光束参量演化规律的分析[J]. *中国激光*, 2005, **32**(8): 1059~1062
- S. Lopez-Aguayo, A. S. Desyatnikov, Y. S. Kivshar *et al.*. Stable rotating dipole solitons in nonlocal optical media[J]. *Opt. Lett.*, 2006, **31**: 1100~1102
- M. Soljacic, M. Segev. Integer and fractional angular momentum borne on self-trapped necklace-ring beams[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **86**: 420~423
- A. S. Desyatnikov, Y. S. Kivshar. Rotating optical soliton clusters[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, **88**: 053901~053904
- A. W. Snyder, D. J. Mitchell. Accessible solitons[J]. *Science*, 1997, **276**: 1538~1541
- Liu Jinlong, Chen Jinhua, Li Hai *et al.*. Family of super-Gaussian beams spatial optical solitons in strong nonlocal nonlinear media[J].

*Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(7): 1261~1265

刘金龙,陈金华,李海. 强非局域非线性介质中的超高斯空间光孤子族[J]. *光学学报*, 2007, **27**(7): 1261~1265

- Wang Xinghua, Guo Qi, Xie Yiqun. Propagation properties the paraxial Gaussian beam in strongly nonlocal media[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(6): 848~854  
王形华,郭旗,谢逸群. 傍轴高斯光束在强非局域介质中的传输特性[J]. *光学学报*, 2005, **25**(6): 848~854
- Zhang Tao, Hu Wei, Long Xuewen *et al.*. Experimental observation of strong nonlocal optical spatial solitons in nematic liquid crystals[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(7): 1261~1265  
张涛,胡巍,龙学文等. 向列相液晶中强非局域空间光孤子的实验观察[J]. *光学学报*, 2007, **27**(7): 1261~1265
- Ren Biao, Guo Qi, Lan Sheng *et al.*. The interaction of multi spatial solitons in strongly nonlocal media[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(9): 1668~1674  
任标,郭旗,兰胜. 强非局域介质中多个空间孤子的相互作用[J]. *光学学报*, 2007, **27**(9): 1668~1674
- Wang Xinghua, Guo Qi, Xie Yiqun. Analysis of Gaussian beam parameters evolution law in strongly nonlocal media[J]. *Chinese J. Lasers*, 2005, **32**(8): 1059~1062  
王形华,郭旗,谢逸群. 强非局域介质中高斯光束参量演化规律的分析[J]. *中国激光*, 2005, **32**(8): 1059~1062
- Wang Xinghua, Guo Qi. Propagation properties of hyperbolic secant shaped optical beam in strongly nonlocal media[J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(5): 645~649  
王形华,郭旗. 双曲正割型光束在强非局域介质中的传输特性[J]. *中国激光*, 2006, **33**(5): 645~649
- E. T. Whittaker, G. N. Watson. *A Course in Modern Analysis* [M]. Cambridge, UK, 1990
- M. V. Berry. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps[J]. *J. Opt. A*, 2004, **6**: 259~268
- A. I. Yakimenko, Y. A. Zaliznyak, Y. Kivshar. Stable vortex solitons in nonlocal self-focusing nonlinear media[J]. *Phys. Rev. E*, 2005, **71**(6): 065603-1~065603-4
- C. Rotschild, M. Segev. Two-dimensional multipole solitons in nonlocal nonlinear media[J]. *Opt. Lett.*, 2006, **31**(22): 3312~3314