

# 完全多重网格法求解光强度传播方程的 相位恢复方法

薛斌党 郑世玲 姜志国

(北京航空航天大学宇航学院, 北京 100191)

**摘要** 一般多重网格算法求解光强度传播方程是从精细网格层开始计算, 精细网格层的初值选择影响算法的收敛速度和求解精度。提出了一种完全多重网格方法求解光强度传播方程的相位恢复方法。基于限制法将最细网格上的方程转化为最粗网格上的方程, 求解该方程得到最粗网格上的解; 然后对此解用延拓法得到上一层细网格上的解, 以得到的解作为此层网格上的初解, 利用 V 循环解此层上的方程, 得到此层网格的精确解。依次, 直到得到最细网格上的精确解。模拟相位恢复实验结果表明, 本文方法具有较快的收敛速度, 能够恢复复杂相位分布。

**关键词** 傅里叶光学; 相位恢复; 光强传播方程; 完全多重网格法

中图分类号 O439 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20092906.1514

## Phase Retrieval Using Transport of Intensity Equation Solved by Full Multigrid Method

Xue Bindang Zheng Shiling Jiang Zhiguo

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

**Abstract** The computation of the basic multigrid method is started with an arbitrary approximation on the finest grid. When the basic multigrid method is used to solve the transport of intensity equation (TIE) for phase retrieval, the retrieved phase distribution is sensitive to the initial values on the finest grid. To mitigate the above-mentioned problem, a full multigrid method (FMG) solving the TIE for phase retrieval is presented. Instead of starting with an arbitrary approximation on the finest grid, the first approximation is obtained by interpolating from a coarse grid solution. The coarsest grid is created based on the finest grid using the restrain operators, and the solution on the coarsest grid is gotten. Then the initial value of the fine grid can be obtained through prolongation operator, and the V-cycle is adopted to solve the equation on this fine grid. Based on this nested iteration technique, the exact solution to the TIE is obtained. The simulation experiments show that this method can retrieve the complicated phase distributions with high accuracy, and has fast convergence speed.

**Key words** Fourier optics; phase retrieval; transport of intensity equation; full multigrid method

## 1 引 言

相位恢复是指在光的相位信息难以测量或丢失的情况下, 根据光的强度和附加的先验知识来估计光的相位信息。在应用物理学和工程应用的许多领域, 如在天文学<sup>[1]</sup>、光学显微镜<sup>[2]</sup>、晶体学<sup>[3]</sup>、电子显微镜<sup>[4]</sup>、X 射线成像<sup>[5]</sup>等领域, 相位恢复问题都具有重要意义。

随着信息光学技术的发展, 由光强度来恢复光

相位的间接方法再次成为新的研究热点。由光强度分布恢复相位的方法大体可分为两类: 基于光强度传输方程 (Transport of intensity equation, TIE) 的相位恢复方法<sup>[6~8]</sup>和迭代相位恢复算法体系<sup>[1,9,10]</sup>。TIE 的基本思想是, 在傍轴近似条件下, 沿着光轴方向上光强度的变化主要由与光轴垂直的平面上光波的相位所决定。因此, 通过测量两个与光轴垂直的平面上光的强度变化, 就可利用 TIE 来恢复光波在

收稿日期: 2008-07-10; 收到修改稿日期: 2008-11-07

基金项目: 国家自然科学基金(60502018)资助项目。

作者简介: 薛斌党(1971—), 男, 博士, 副教授, 主要从事相衬成像、图像分析模式识别方面的研究。

E-mail: xuebd@buaa.edu.cn

前一个平面上的相位信息。通过引入一个辅助函数,可以把 TIE 转化为一个二维 Poisson 方程。由于二维相位恢复问题的边界区域为矩形区域,离散化后的 Poisson 方程的块结构非常有规则,因此可利用离散的傅里叶分析方法<sup>[7]</sup>或多重网格方法(Multigrid method, MG)求解 TIE<sup>[11]</sup>。但是,傅里叶变换方法是 TIE 的一种近似数值解法<sup>[12]</sup>,对复杂分布相位,该方法可能无法得到正确的结果。一般多重网格法求解 TIE 时,在每层网格上都需要给定初值,然后用雅可比(Jacobi)迭代法或者高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法解此层网格上的线性方程组,初值的选择影响迭代算法的收敛速度和解的精度。初值接近真实解,算法迭代收敛速度会越快,否则,需要足够的循环后,才能达到所需收敛的收敛状态。

本文提出了完全多重网格算法(Full multigrid method, FMG)求解 TIE 的相位恢复方法,将最细网格上的方程转化为最粗网格上的方程,由最粗网格层计算开始,逐层延拓到细网格层,从而得到细网格层上较好的初值。由于只需在最粗网格层赋初值,因此赋值简单,而且弱化了初值对求解过程的影响。

## 2 光强度传播方程

在傍轴近似情况下,光强度传播方程可以表示为<sup>[6]</sup>

$$\nabla_{\perp} [I(r_{\perp}, z) \nabla_{\perp} \phi(r_{\perp}, z)] = -k \partial_z I, \quad (1)$$

其中  $\lambda$  表示波长,  $k = 2\pi/\lambda$  是波数,  $r_{\perp}$  是平面  $x-y$  上的矢量,垂直于光轴  $z$ ,  $I(r_{\perp}, z)$  为单色光的强度,  $\phi(r_{\perp}, z)$  为单色光的相位,  $\nabla_{\perp} = (\partial_x, \partial_y)$  是平面  $x-y$  上梯度算子,  $\partial_z = \partial/\partial z$ ,  $\partial_z I(r_{\perp}, z)$  为给定  $z$ , 在由变量  $r_{\perp}$  所确定的平面上,在光波传播方向上光强度的导数。

设  $\Omega$  是平面  $x-y$  中具有光滑边界  $\partial\Omega$  的一个区域。假设在区域  $\Omega$  内,  $I(r_{\perp}, z) > 0$ ,  $\phi(r_{\perp}, z)$  是连续的,那么在给定  $I(r_{\perp}, z)$  和  $\partial_z I(r_{\perp}, z)$  时, TIE 具有唯一解。即获取光强度沿光轴的变化率,通过求解 TIE 可以得到唯一的  $\phi(r_{\perp}, z)$ 。由于不能精确测量光强在光轴方向的变化率,通常计算两个输出面上光强差分近似表示光强度变化率。

设输入面和输出面均垂直于光轴  $z$ , 并设输入面位于  $z=0$  平面上,输出面位于输入面前后平面即  $z = \pm \Delta z$  平面上,不同平面上光的强度分布为  $I(r_{\perp}, z_0)$ 、 $I(r_{\perp}, z_{\Delta z})$  和  $I(r_{\perp}, z_{-\Delta z})$ 。光强在光

轴方向的变化率可以近似表示为

$$\left. \frac{\partial I(r_{\perp}, z)}{\partial z} \right|_{z=z_0} \approx \frac{I(r_{\perp}, \Delta z) - I(r_{\perp}, -\Delta z)}{2\Delta z}; \quad (2)$$

进一步,方程(1)的左端可以扩展为

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} [I(r_{\perp}, z) \nabla_{\perp} \phi(r_{\perp}, z)] = & \nabla_{\perp} I(r_{\perp}, z) \nabla_{\perp} \phi(r_{\perp}, z) + \\ & I(r_{\perp}, z) \nabla_{\perp}^2 \phi(r_{\perp}, z) = \\ & [\partial_x I(r_{\perp}, z) \quad \partial_y I(r_{\perp}, z)] \cdot \\ & [\partial_x \phi(r_{\perp}, z) \quad \partial_y \phi(r_{\perp}, z)]^T + \\ & I(r_{\perp}, z) \partial_x^2 \phi(r_{\perp}, z) + I(r_{\perp}, z) \partial_y^2 \phi(r_{\perp}, z); \end{aligned}$$

因此,可以将方程(1)改写为如下形式

$$\begin{aligned} I(r_{\perp}, z) \partial_x^2 \phi(r_{\perp}, z) + I(r_{\perp}, z) \partial_y^2 \phi(r_{\perp}, z) + \\ \partial_y I(r_{\perp}, z) \partial_y \phi(r_{\perp}, z) + \\ \partial_x I(r_{\perp}, z) \partial_x \phi(r_{\perp}, z) = \\ -k \partial I_z(r_{\perp}, z). \end{aligned} \quad (3)$$

利用五点有限差分法,可以将方程(3)离散化处理。同光强变化率计算方法相同,相位的偏导数根据如下公式近似计算:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(r_{\perp}, z)}{\partial x} & \approx \frac{\phi_{i,j+1}(r_{\perp}, z) - \phi_{i,j-1}(r_{\perp}, z)}{2h}, \\ \frac{\partial \phi(r_{\perp}, z)}{\partial y} & \approx \frac{\phi_{i+1,j}(r_{\perp}, z) - \phi_{i-1,j}(r_{\perp}, z)}{2h}, \end{aligned} \quad (4)$$

公式(4)中,  $h$  为  $x$  和  $y$  方向上相同的离散化采样间隔,  $(i, j)$  表示平面  $x-y$  上离散点的坐标位置。离散后的方程形式如下:

$$\begin{aligned} E\phi_{i+1,j}(r_{\perp}, z) + F\phi_{i-1,j}(r_{\perp}, z) + \\ G\phi_{i,j+1}(r_{\perp}, z) + H\phi_{i,j-1}(r_{\perp}, z) - \\ 4I(r_{\perp}, z)\phi_{i,j}(r_{\perp}, z) = -k \partial I_z(r_{\perp}, z), \end{aligned} \quad (5)$$

方程(5)中,  $E = [I(r_{\perp}, z) + 0.5\partial I_x(r_{\perp}, z)]$ ,  $F = [I(r_{\perp}, z) - 0.5\partial I_x(r_{\perp}, z)]$ ,  $G = [I(r_{\perp}, z) + 0.5\partial I_y(r_{\perp}, z)]$ ,  $H = [I(r_{\perp}, z) - 0.5\partial I_y(r_{\perp}, z)]$ 。已知输入平面和两个输出平面上光强度,就可以用多重网格方法求解方程(5),实现输入平面上的相位恢复。

## 3 完全多重网格法求解光强度传播方程相位恢复

多重网格法<sup>[13]</sup>基本思想是在网格层上下移动,利用粗网格上的残差校正特性消除迭代误差的低频分量,同时利用细网格上的松弛光滑特性消除迭代误差的高频分量,具有收敛速度快,收敛精度高等特点。一般多重网格法是从最细网格上的初始估计值开始,通过迭代计算,达到收敛状态。对于迭代



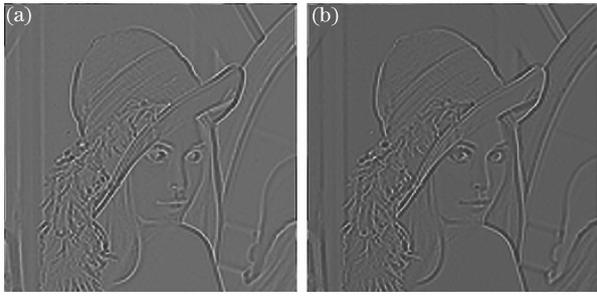


图 3 不同传播距离输出平面上强度分布.

(a)  $\Delta z = -0.1$  mm; (b)  $\Delta z = 0.1$  mm

Fig. 3 Intensity distribution in the different output planes:

(a)  $\Delta z = -0.1$  mm; (b)  $\Delta z = 0.1$  mm

$I(r_{\perp}, z_0) \equiv 1$ , 对应于平面波照明下的非吸收相位物体的特例。根据平面波角谱传播公式<sup>[15]</sup>, 计算出不同输出平面  $\Delta z = \pm 0.1$  mm 上光强度分布, 如图 3 所示。相位恢复的过程就是利用图 3 仿真得到的不同输出平面上光的强度, 通过求解 TIE, 恢复出输



图 4 不同方法求解 TIE 相位恢复结果: (a)FFT-TIE; (b)MG-TIE; (c)FMG-TIE

Fig. 4 Phase retrieved using TIE solved by (a) the FFT method, (b) the MG method and (c) FMG method

## 4.2 仿真实验 2

仿真实验 2 选择 2 幅含有丰富细节的图像作为设想的输入平面上光强度和相位分布, 分别如图 5(a)、5(b) 所示, 其像素数为 256 pixel  $\times$  256 pixel,

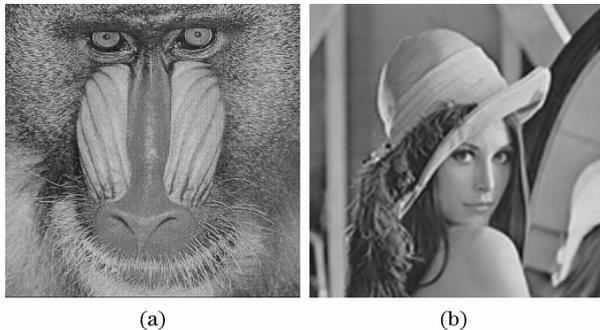


图 5 输入平面上模拟强度和相位分布:

(a) 模拟强度分布; (b) 模拟相位分布

Fig. 5 Simulated intensity and phase distribution in the input plane: (a) simulated intensity; (b) simulated phase

入面上光的相位信息。图 4(a)为 FFT-TIE 相位恢复结果, 图 4(b)为 MG-TIE 相位恢复结果, 图 4(c)为 FMG-TIE 相位恢复结果, 其中多重网格的 V 循环迭代次数均设定为 10 次。表 1 对比了三种方法求解 TIE 相位恢复的计算时间和相位恢复的相对均方根误差。从表 1 对比结果可以看出, 对于理想非吸收相位物体, FFT-TIE 相位恢复的精度最高, 但是耗时较多, FMG-TIE 相位恢复的计算时间是 MG-TIE 相位恢复时间的 22%, 而且 FMG-TIE 相位恢复的精度高于 MG-TIE 相位恢复精度。

表 1 仿真实验 1 相位恢复误差及算法收敛时间比较

Table 1 First simulation phase retrieval relative RMS errors and the convergence time of the algorithms

Method	Time / s	RMS / %
FFT-TIE	1.1853	4.65
MG-TIE	1.6771	15.43
FMG-TIE	0.3715	13.22

物理尺寸为 1 mm  $\times$  1 mm, 波长  $\lambda = 632.8$  nm, 相位值在  $[0, \pi]$  弧度之间变化, 强度值在  $[0, 1]$  之间变化。根据平面波角谱传播公式, 计算不同输出平面上光强度分布, 如图 6 所示。利用图 6 仿真得到的不同输出平面上光的强度, 通过求解 TIE, 恢复出输入面上光的相位信息如图 7 所示。图 7(a)为 FFT-

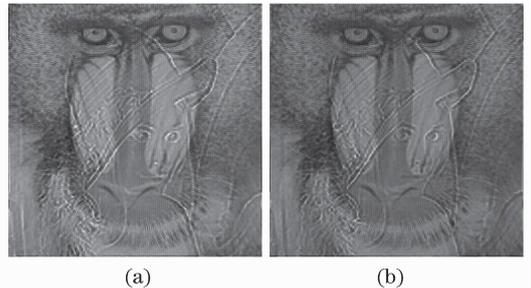


图 6 不同传播距离输出平面上强度分布:

(a)  $\Delta z = -0.1$  mm; (b)  $\Delta z = 0.1$  mm

Fig. 6 Intensity distribution in the different output planes:

(a)  $\Delta z = -0.1$  mm; (b)  $\Delta z = 0.1$  mm

TIE 相位恢复结果,图 7(b)为 MG-TIE 相位恢复结果,图 7(c)为 FMG-TIE 相位恢复结果,其中多重网格的 V 循环迭代次数均设定为 10 次。表 2 对比了三种方法求解 TIE 相位恢复的计算时间和相位恢复的相对均方根误差。对于复杂光场,FFT-TIE 无法恢复相位,FMG-TIE 相位恢复的计算时间是 MG-TIE 相位恢复时间的 21%,而且,FMG-TIE 相位恢复的精度高于 MG-TIE 相位恢复精度。

从上述相位恢复仿真实验结果可以看出,在相同初始值条件下,FMG-TIE 在相位恢复精度和算法收敛速度上都优于 MG-TIE 相位恢复的结果,同时 MG 和 FMG 都能够恢复复杂相位分布。对于迭代算法,初始解越接近真实解,算法的收敛速度越

快,求解精度越高。与一般多重网格法的 V 循环相比,完全多重网格法求解 TIE 是从最粗网格层开始 V 循环的运算,当进行到最细网格层上的 V 循环时,得到了原方程的一个比较好的近似解,因此求解精度要高于一般多重网格法中由一个完全随机的初解进行 V 循环的求解精度。

表 2 仿真实验 2 相位恢复误差及算法收敛时间比较  
Table 2 Second simulation phase retrieval relative RMS errors and the convergence time of the algorithms

Method	Time / (s)	RMS / %
FFT-TIE	—	—
MG-TIE	1.8249	19.33
FMG-TIE	0.3798	17.96



图 7 不同方法求解 TIE 相位恢复结果:(a) FFT-TIE;(b) MG-TIE;(c) FMG-TIE

Fig. 7 Phase retrieved using TIE solved by (a) the FFT method, (b) the MG method and (c) FMG method

## 5 结 论

本文给出了一种将嵌套迭代技术与一般多重网格法相结合,得到了计算效率更高的完全多重网格法求解光强度传播方程的相位恢复方法。在完全多重网格法中,由最粗的网格开始逐层延拓到最细的网格,除在最粗层网格外,都不再以 0 或者随机值作为迭代初值,而是利用上层生成的比较接近所求值的结果为初值,因此获得了更快、更好的收敛性。

## 参 考 文 献

- 1 Fienup J. R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J]. *Appl. Opt.*, 1982, **21**(15):2758~2769
- 2 Bellair C. J., Curl C. L., Allman B. E *et al.*. Quantitative phase amplitude microscopy IV: imaging thick specimens[J]. *J. Microscopy*, 2004, **214**(4): 62~69
- 3 Millane R. P. Phase retrieval in crystallography and optics [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1990, **7**(3)394~411
- 4 Donnadieu P., Verdiera M., Berthome G *et al.*. Imaging a dense nanodot assembly by phase retrieval from TEM images [J]. *Ultramicroscopy*, 2004, **100**:79~90
- 5 Nugent K., Gureyev T. E., Cookson D F *et al.*. Quantitative phase imaging using hard X rays[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, **77**(14):2961~2964

- 6 Teague M. R. Deterministic phase retrieval: a Green's function solution[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1983, **73**(11):1434~1441
- 7 Gureyev T. E., Nugent K. Rapid quantitative phase imaging using the transport of intensity equation [J]. *Opt. Commun.*, 1997 **133**:339~346
- 8 Semichaevsky A., Testorf M.. Phase-space interpretation of deterministic phase retrieval[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2004, **21**(11):2173~2179
- 9 Yang G., Gu B. Dong B *et al.*. Gerchberg-Saxton and Yang-Gu algorithms for phase retrieval in a nonunitary transform system comparison[J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(2):209~218
- 10 Elser V. Phase retrieval by iterated projections[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 2003, **20**(1): 40~55
- 11 Wang Xiao, Mao Heng, Zhao Dazun. Phase Retrieval Based on Intensity Transport Equation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(12):2117~2122  
王 潇,毛 玟,赵达尊. 基于光强传播方程的相位恢复[J]. *光学学报*, 2007, **27**(12):2117~2122
- 12 Allen L. J., Oxley M. P. Phase retrieval from series of images obtained by defocus variation[J]. *Opt. Commun.*, 2001, **199**:65~75
- 13 Wesseling P. *An Introduction to Multigrid Methods* [M]. John Wiley & Sons, 1992:168~192
- 14 William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling *et al.*. *Numerical Recipes in C The Art of Scientific Computing* [M]. Second Edition. London: Cambridge University Press, 1997, 871~878
- 15 Yu Bin, Peng xiang, Tian Jindong *et al.*. Simulation study of phase retrieval for hard X-ray in-line phase contrast imaging[J]. *Science in China (Series G)*, 2005, **48**(4):450~458