

文章编号: 0253-2239(2009)06-1684-07

梯度折射率球对在轴高斯波束散射的几何光学近似

李祥震 韩香娥 颜 兵

(西安电子科技大学理学院, 陕西 西安 710071)

摘要 基于梯度折射率(GRIN)球对平面波前向散射的几何光学近似(GOA), 推导出 GRIN 球对在轴高斯波束散射的 GOA。详细推导高斯波束在 GRIN 球中的散射角和相位公式, 给出了算法实现步骤。在此基础上, 利用扩展后的 GOA 计算了粒子的散射强度分布, 并与广义洛伦兹-米理论(GLMT)的计算结果进行比较; 由于表面波的影响, 当波束的束腰半径大于等于粒子半径时散射强度分布与 GLMT 计算所得的结果相比存在误差。比较结果表明扩展后的 GOA 方法适用于束腰小于粒子半径的情况。对比 GOA 方法和 GLMT 的计算速度, 结果表明 GOA 方法具有较高的运算速度。

关键词 散射; 高斯波束; 几何光学近似; 梯度折射率球

中图分类号 O436 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20092906.1684

Geometrical-Optics Approximation of on-Axis Gaussian Beam Scattering by a Gradient Refractive Index Sphere

Li Xiangzhen Han Xiang'e Yan Bing

(School of Sciences, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract Based on geometrical-optics approximation (GOA) of forward scattering by a gradient refractive index (GRIN) sphere, a further extension of the method to the on-axis Gaussian beam scattering of a transparent gradient refractive index spherical particle is developed. The scattering angle of Gaussian beam through the GRIN sphere and the phase shift are deduced and the calculation procedure of the method is given. On the basis of the above work, the scattering intensity distribution is calculated by the extension of the GOA and the result is compared with those calculated by the generalized Lorenz-Mie theory (GLMT). When the beam waist is larger than the particle radius, the discrepancy exists because of the surface wave influence. Compared with our results, the extension of GOA is valid on condition that the beam-waist radius is smaller than the radius of the particle. The comparison between calculation speed of GOA method and the one of the (GLMT) is given. The result indicates that the calculation speed of GOA method is faster.

Key words scattering; Gaussian beam; geometrical-optics approximation; gradient refractive index sphere

1 引 言

随着激光在粒子测量中的应用日益广泛, 粒子对高斯波束的散射研究具有重要应用价值。Gouesbet^[1,2]等基于洛伦兹-米理论研究了有形波束与粒子的相互作用, 提出了广义洛伦兹-米理论(GLMT)。该理论目前被广泛应用到粒子测量等领域。但是, 相对于平面波散射的米理论, GLMT 的计

算更加复杂, 对大尺寸粒子的散射强度计算速度相对较慢。为了解决这一问题, 许多研究者对 GLMT 的算法进行改进^[3~5]。然而, 改进后的算法仍然不能很好地解决大尺寸非均匀粒子对窄束腰高斯波束散射计算能力的问题, 一定程度上限制了它在更大范围内的应用。作为粒子散射理论之一, 衍射理论在粒度测量中应用广泛^[6]。在平面波衍射的基础上, Chevaillier 等^[7,8]给出了高斯波束的夫琅禾费衍

收稿日期: 2008-05-26; 收到修改稿日期: 2008-11-10

基金项目: 教育部科学研究重点项目(106149)资助课题。

作者简介: 李祥震(1980—), 男, 博士研究生, 主要从事光散射方面的研究。E-mail: lllleo2002@yahoo.com.cn

导师简介: 韩香娥(1962—), 女, 博士生导师, 主要从事光电检测和光散射方面的研究。E-mail: xehan@mail.xidian.edu.cn

射计算方法,然而,粒子衍射理论只限于描述散射角小于 6° 的情况。

对于平面波与粒子散射理论,几何光学近似(GOA)方法在计算散射强度分布时具有较高的计算精度与速度,在粒子的前向散射($0\sim 60^\circ$)粒度测量中得到了应用^[9]。徐峰等^[10]将 GOA 方法扩展到在轴高斯波束与均匀球散射的情况,提出了扩展后的 GOA,该方法与 GLMT 相比算法简单;与高斯波束的衍射方法相比,计算结果具有较高的准确性和更宽的散射角范围。

在工业生产中,许多粒子的折射率分布是非均匀的,其中一些粒子折射率呈梯度分布。近几年,由于生产技术的提高,梯度折射率(GRIN)粒子的应用日益广泛。对于 GRIN 粒子的粒度测量,需要一种算法简单,计算速度快的方法^[11],因此高斯波束与 GRIN 粒子光散射的 GOA 方法研究显得尤为必要。

2 理论推导

设球粒子半径为 R ,表面折射率和中心折射率分别为 m_1 和 m_0 ,环境介质折射率 m_s 取 1。球内折射率沿径向梯度分布,用 $m(\tilde{r})$ 表示,设 r 为粒子内任一点到球心的距离,则 $\tilde{r}=r/R$ 为归一化距离。

取直角坐标系原点位于球粒子球心,如图 1 所示。设在轴高斯波束沿 Z 轴方向传播,电矢量沿 X 轴方向极化,入射到 GRIN 球粒子上。在一阶近似的条件下,照射到粒子表面上任意一点 $A(x, y, z)$ 的基模高斯波束电场强度 S_G 可以表示为^[12]

$$S_G(x, y, z) = |S_G| \exp(i\phi_1). \quad (1)$$

在图 1 所示坐标系下,高斯波束束腰中心 O_G 位于 $(0, 0, d)$ 处,则电场强度幅值 $|S_G|$ 与高斯波束相位 ϕ_1 分别为

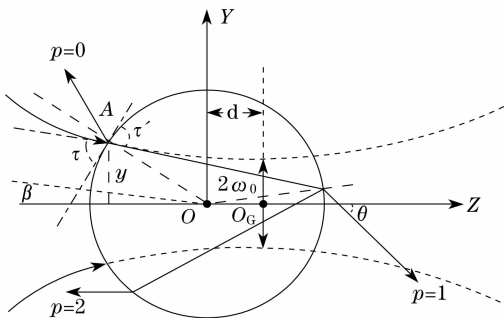


图 1 高斯波束梯度折射率球粒子散射示意图

Fig.1 Schematic diagram of Gaussian beam scattered by a gradient refractive index sphere partical

$$|S_G| = \frac{\omega_0}{\omega(z)} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)}\right), \quad (2)$$

$$\phi_1(x, y, z) = -k\left[(z-d) + \frac{x^2 + y^2}{2G}\right] + \arctan\left(\frac{z-d}{f}\right). \quad (3)$$

其中 ω_0 为束腰半径, λ 为真空中光波波长。波数 k , z 平面处的束宽半径 $\omega(z)$,瑞利长度 f 以及等相面曲率半径 G 分别为

$$\begin{cases} k = 2\pi/\lambda, \\ \omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{f}\right)^2}, \\ f = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}, \\ G = (z-d)\{1 + [f/(z-d)]^2\}. \end{cases} \quad (4)$$

根据几何光学的观点,入射到球粒子的光束将与球粒子相互作用。如图 1 所示,除衍射光外,还有被外表面直接反射光线($p=0$)和折射进入球粒子后再折射出来的光线。其中包括直接折射的出射光线($p=1$),经内表面一次反射后出射的光线($p=2$)。以此类推,还存在经二次、三次以至更多次内表面反射后出射的光线($p=3, 4, \dots$)。散射光复振幅是由所有光线叠加而成,即衍射、反射和折射光的叠加,其叠加后复振幅为^[12]

$$S_j = S_{\text{diff}} + \sum_{p=0}^{\infty} S_{j,p} \quad j = 1, 2 \quad (5)$$

其中 S_j 为散射光振幅函数, S_{diff} 为衍射光振幅函数, $S_{j,p}$ 为第 p 阶出射光的振幅函数。下角标 $j=1$ 表示垂直极化分量, $j=2$ 表示平行极化分量。

2.1 散射角

对于平面波照射 GRIN 球粒子的情况,光线在粒子内部的轨迹不再是直线,而是沿曲线传播,如图 2 所示。为了保持与相关文献中参量的一致性,定义入射光线与球粒子表面的夹角 τ 为入射角,折射光线与球粒子表面的夹角 τ' 为折射角^[13]。因此 p 阶出射光线的散射角 θ'_p 与入射角 τ 的关系可以表示为^[14]

$$\theta'_p = 2\tau - 2p[\chi(r=R) - \chi(r=r_m)]. \quad (6)$$

参量 $\chi(r)$ 满足表达式

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tilde{r}} = \frac{e}{r \sqrt{[m(\tilde{r}) \tilde{r}]^2 - e^2}}, \quad (7)$$

其中 $e = m_s \cos(\tau)$ 为常数, r_m 为光线到球心的最近距离,可以由下式求出

$$[m(\tilde{r}_m) \tilde{r}_m]^2 - e^2 = 0. \quad (8)$$

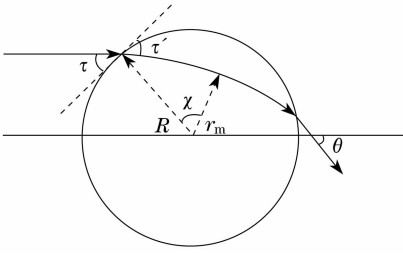


图 2 光线在梯度折射率球粒子中的传播

Fig. 2 Ray propagation through gradient refractive index sphere partical

高斯波束的传播与平面波的传播不同,根据几何光学的观点,平面波被视为一组平行光线^[11],高斯波束则被视为一束垂直于入射光束波阵面[由(3)式可知波阵面为二次球面]传播的光线。如图 1 所示,当波束入射到球粒子表面 $A(x, y, z)$ 点,设波束在该点处的传播方向为 \mathbf{F} ,则入射角 τ 可以由下式给出^[10]

$$\sin \tau = \frac{|yF_y + zF_z|}{\sqrt{(y^2 + z^2)(F_y^2 + F_z^2)}} \quad (9)$$

其中 F_y 和 F_z 为相位函数 $\phi_i(x, y, z)$ 的偏导数,表达式为

$$F_y = \frac{\partial \phi_i}{\partial y} = -\frac{2fy(z-d)}{\omega_0^2[f^2 + (z-d)^2]},$$

$$F_z = \frac{\partial \phi_i}{\partial z} = \frac{f}{f^2 + (z-d)^2} - \frac{fy^2[f^2 - (z-d)^2]}{\omega_0^2[f^2 + (z-d)^2]^2} - k. \quad (10)$$

A 点光线传播方向 \mathbf{F} 与 Z 轴存在夹角 β ,该角度可由 $\beta = \arctan(F_y/F_z)$ 得出。结合(6)式可以得到高斯波束入射到 GRIN 球粒子的第 p 阶出射光线的散射角为

$$\theta'_p = 2\tau - 2p[\chi(r=R) - \chi(r=r_m)] - |\beta|. \quad (11)$$

当折射率梯度为零,即粒子为均匀球粒子时。由图 2 可以看出,此时球内光线为直线,则 $\chi(r=R) - \chi(r=r_m) = \tau'$, (11)式变为 $\theta'_p = 2\tau - 2p\tau' - |\beta|$,该表达式与文献[10]中散射角公式相同。

将(11)式给出的散射角 θ'_p 折算到区间 $(0, \pi)$ 内的散射角 θ_p ,其关系可由下式给出^[13]

$$\theta'_p = 2\pi k_p + q_p \theta_p, \quad (12)$$

其中 k_p 为整数, $q_p = +1$ 或者 -1 。

2.2 相位

对于平面波与球粒子相互作用后的第 p 阶散射光线相位,来自于三方面的影响,与表面作用直接

反射导致的相位变化 σ_{r1} 、光线几何路程对应的光程导致的相位变化 $\sigma_{p,0}$ 和焦线引起的相位变化 $\sigma_{p,F}$ 。此时总相位表示为^[13]

$$\sigma_p = \frac{\pi}{2} + \sigma_{r1} + \sigma_{p,0} + \sigma_{p,F}. \quad (13)$$

根据 van de Hulst 的观点,反射导致的相位变化 σ_{r1} 可以由菲涅耳反射系数给出,而光程所导致的相位变化可以由下式表示

$$\sigma_{p,0} = k(2R \sin \tau - L), \quad (14)$$

其中 L 为 GRIN 球粒子中的光程^[14]

$$L = p \int_{r_m}^R \frac{2m(\tilde{r})^2 \tilde{r}}{\sqrt{[m(\tilde{r})\tilde{r}]^2 - e^2}} dr. \quad (15)$$

当折射率梯度为零,对于均匀球粒子 $m(\tilde{r}) = m$,积分下限为 $r_m = R \cos \tau'$, (15)式简化为 $L = 2pm \cdot \sin \tau'$,将其带入(14)式,该相位表达式与文献[10]中均匀球粒子的光程相位公式相同。

根据 van de Hulst 关于焦线所引起相位变化的论述,与焦线相交一次导致相位变化 $\pi/2$,整个光线轨迹中由焦线引起的总相位为^[13]

$$\sigma_{p,F} = \frac{\pi}{2} \left(p - 2k_p + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}q_p \right). \quad (16)$$

其中整数 p, k_p, q_p 的定义与(12)式中定义相同, s 取 $+1$ 或 -1 ,具体取值与 $d\theta'/d\tau$ 的符号相同。

对于高斯波束与球粒子的散射光线相位,除考虑 3 种相位来源外,还需要考虑入射波束的波阵面引起的相位贡献 σ_G ^[10]

$$\sigma_G = \phi_i - k(d + R \sin \tau), \quad (17)$$

至此,对于高斯波束入射的情况,散射光线总相位可以表示为

$$\sigma_p = \frac{\pi}{2} + \sigma_{r1} + \sigma_{p,0} + \sigma_{p,F} + \sigma_G. \quad (18)$$

2.3 衍射

根据 Chevaillier 等^[7,8] 给出的高斯波束与球粒子衍射场计算方法,高斯波束对于半径为 R 的球粒子衍射的远场电场强度复振幅公式为

$$S_{\text{diff}} = \frac{x^2}{2\pi} \left[\frac{\omega_0}{\omega(z)} \right]^2 \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^1 \exp(-At^2) \times \exp[i(Bt + Ct^2)] t dt, \quad (19)$$

其中, x 为粒子尺寸参量,各参量分别为

$$\begin{cases} x = kR \\ A = [R/\omega(z)]^2 \\ B = -x \tan \theta \sin \phi' \\ C = x^2/2kG \end{cases} \quad (20)$$

(19)式可以利用勒让德多项式近似方法计算^[8],但

仅限于 $R \leq \omega(z)$ 的情况。为了消除数值计算带来的这一限制,对于(19)式采用 21 点 Gauss-Kronrod 数值积分方法进行计算。

2.4 散射光复振幅

考虑高斯波束入射到非吸收粒子情况下,第 p 阶光线远场强度复振幅函数可写为^[13]

$$S_{j,p} = x |S_G| \epsilon_{j,p} \sqrt{D} \exp(i\sigma_p) \quad (21)$$

其中, x 为尺寸参量。设入射极化光波总能量为 1 时,则 $\epsilon_{j,p}^2$ 表示第 p 阶出射光线所占的强度比例。 $\epsilon_{j,p}$ 由下式给出^[13]

$$\begin{cases} \epsilon_{j,p} = \gamma_j & p = 0 \\ \epsilon_{j,p} = (1 - \gamma_j^2)(-\gamma_j)^{p-1} & p = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (22)$$

角标与(5)式中含义相同。 γ_j 为非涅耳反射系数, $j=1, 2$ 分别表示垂直和平行极化

$$\gamma_1 = \frac{\sin \tau - m_1 \sin \tau'}{\sin \tau + m_1 \sin \tau'} \quad \gamma_2 = \frac{m_1 \sin \tau - \sin \tau'}{m_1 \sin \tau + \sin \tau'} \quad (23)$$

其中, τ' 为折射光线与球表面切线之间的夹角,由折射定理给出

$$\cos \tau' = \frac{1}{m_1} \cos \tau \quad (24)$$

其中, D 称为散度^[13],对于高斯波束,其表达式为^[10]

$$D = \frac{\sin \tau \cos(\tau - |\beta|)}{\sin \theta_p |d\theta_p'/d\tau|} \quad (25)$$

对于高斯波束入射到 GRIN 球粒子,一般情况下, $d\theta_p'/d\tau$ 很难得到解析表达式,实际计算中可采用简单的中点数值微分的方法进行计算。

3 算法实现

3.1 折射率模型

GOA 方法的编程实现方法与粒子折射率模型有关。GRIN 球粒子的折射率分布有多种形式,常见的有幂函数分布和指数分布两种^[11],其折射率分布函数分别为

$$m(\tilde{r}) = A(m_0, m_1) \tilde{r}^2 \quad (26)$$

$$m(\tilde{r}) = m_0 + (m_1 - m_0) \frac{e^{b\tilde{r}} - 1}{e^b - 1} \quad (27)$$

(26)式中 $A(m_0, m_1)$ 取值仅与粒子表面折射率和中心折射率有关,与 \tilde{r} 无关。(27)式中 b 为常实数,数值计算中均取 $b=6$ 。

3.2 算法概述

从(11)式和(15)式可以看出,对于(26)式所表示 GRIN 球粒子,可以得到其散射角和光程的解析表达式^[11],因此对其散射场计算可以直接利用解析

表达式,而不需要进行数值积分。具体算法与均匀球粒子散射场的计算方法非常类似,不再讨论。

对于更一般的折射率分布,如(27)式所示,其散射角和光程无法得到解析式,涉及的积分和微分运算需要采用数值方法。此外,在算法中还涉及插值问题。由于数值积分和插值运算相对较为费时,所以选择合适的算法和巧妙的程序处理对于简化散射场的计算复杂度和提高计算速度是非常重要的。

由于多数折射率分布情况下无法获得 GOA 计算所需的散射角和光程的解析表达式,因此以(27)式所示的折射率分布为例,进行粒子散射强度分布的计算,并给出详细的算法介绍。文中所涉及到的数值积分和插值分别为 21 点 Gauss-Kronrod 数值积分方法和三次样条插值方法。

3.3 编程步骤

由(5)式可以看出,粒子散射场是由各阶次光线叠加而成。因此,必须求出各阶次光线在同一散射角的散射复振幅。利用入射光线的纵坐标 y 计算出第 p 阶光线对应的散射角 θ'_p 。GOA 数值计算中一般对 y 等间隔取值,则由(9)式和(11)式计算得到的 θ'_p 不再等间隔,且不同阶次 θ'_p 的取值范围和间隔变化不同,这为同一散射角上不同阶次光线叠加带来问题。为解决该问题,可对得到的 θ'_p 与 y 关系曲线进行分区间插值,得到均匀角间隔下的散射角 θ'_p 对应的人射光线纵坐标位置,即得到等间隔下 θ'_p 与 y 对应关系。注意到散射强度分布曲线中的散射角一般在 $0 \sim 180^\circ$ 范围内,因此需要将等间隔的散射角 θ'_p 利用(12)式折算到 θ_p 。至此,获得 $0 \sim 180^\circ$ 散射角范围内不同角度下对应的不同阶次光线入射位置 y_p ,利用 GOA 方法的计算公式(21)可得到给定散射角度上各阶次光线的复振幅;再利用(5)式将复振幅进行叠加,得到给定散射角度上的散射强度分布。算法的具体编程步骤为:

1) 散射角与入射光线关系。将入射波束按照球粒子的半径均分为若干条入射光线,光线条数视粒子半径大小和散射强度分布计算精度需要合理选取,数值计算中将波束分为 3600 条入射光线。再利用(3)式、(9)式和(11)式以及其它相关公式计算出 p 阶光线的散射角 θ'_p ,得到了散射角 θ'_p 与光线入射点 y 坐标的关系,其结果如图 3 所示。图 3 中球粒子的参量分别为 $m_0 = 1.3326$, $m_1 = 1.3226$, $R = 25 \mu\text{m}$, $b=6$ 。图 3(a)给出了 $p=0, 1$ 的关系曲线,可以看出它们都是单调减小的。图 3(b)给出了 $p=2, 3$ 的关系曲线,可以看出这些关系曲线均存在一

个最大值。事实上,当 $p \geq 2$ 时, θ'_p 与 y 关系曲线都存在一个最大值 y_{pm} 。另外,从图 3 可以看出,不同阶次光线 θ'_p 取值范围不同,在散射振幅叠加前需将 θ'_p 折算到 $0 \sim 180^\circ$ 范围内的 θ_p ,具体方法见步骤 4)。

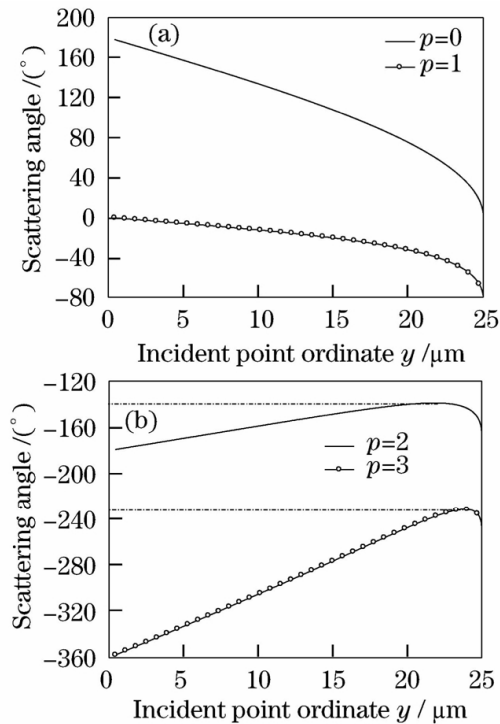


图 3 散射角与光线入射点纵坐标关系

Fig. 3 Relation between scattering angle and incident point ordinate

2) 曲线单调区间划分。对于 $p=0$ 和 $p=1$ 散射光线,由于为单调曲线,所以只存在一个单调区间 $(0, R)$,其中 R 为球粒子半径,如图 3(a)所示。从图 3(b)中可以看出,对于 $p \geq 2$ 的散射光线,散射角与入射点纵坐标 y 不再是单调递减关系,而存在极值点 (y_{pm}, θ'_{pm}) ,因此分为两个单调区间, $(0, y_{pm})$ 和 (y_{pm}, R) 。

3) 插值。在单调区间内利用插值的方法求出某一散射角 θ'_p 对应各阶次光线的入射位置 y 。设 $y=0$ 点对应的散射角为 θ'_{p0} , $y=R$ 点对应的散射角为 θ'_{pR} 。对于 $p \geq 2$ 的情况,还存在 $y=y_{pm}$ 点对应的散射角 θ'_{pm} 。在区间 $(0, y_{pm})$ 建立角间隔为 $\Delta\theta$ 的散射角数组 $\theta'_{p1}[\eta_1]$ 。其中 $\eta_1 = \lfloor \theta'_{pm} / \Delta\theta \rfloor - \lfloor \theta'_{p0} / \Delta\theta \rfloor + 1$,符号 $\lfloor \cdot \rfloor$ 和 $\lceil \cdot \rceil$ 分别表示向上和向下取整。为了方便计算,一般取能被 180 整除的散射角间隔 $\Delta\theta$ 。则 $\theta'_{p1}[n] = \theta'_{p0} + (n-1)\Delta\theta$, $(n=1, 2, \dots, \eta_1)$ 。利用得到的数组在区间 $(0, y_{pm})$ 内对 θ'_p 与 y 曲线进行插值,得到数组 $\theta'_{p1}[\eta_1]$ 对应的入射点纵坐标 $y_{p1}[\eta_1]$ 。类似地,在区间 (y_{pm}, R) 中建立角间隔为 $\Delta\theta$ 的散射角数组 $\theta'_{p2}[\eta_2]$,则 $\eta_2 = \lfloor \theta'_{pR} / \Delta\theta \rfloor - \lfloor \theta'_{pm} / \Delta\theta \rfloor + 1$, $\theta'_{p2}[n] = \theta'_{pR} + (n-1)\Delta\theta$, $(n=1, 2, \dots, \eta_2)$ 。在区间 (y_{pm}, R) 内对 θ'_p 与 y 曲线进行插值,得到数组

$\theta'_{p2}[\eta_2]$ 对应的数组 $y_{p2}[\eta_2]$ 。然后,利用 GOA 方法的计算公式可以得到对应散射角度上的第 p 阶光线的复振幅。

4) 复振幅叠加:考虑散射角范围在 $0 \sim 180^\circ$,建立新的角间隔为 $\Delta\theta$ 的散射角数组 $\theta[\eta]$,式中 $\eta = \lceil 180 / \Delta\theta \rceil$,则 $\theta[n] = n\Delta\theta$, $n=1, 2, \dots, \eta$ 。利用(12)式将散射角数组 $\theta'_{p1}[\eta_1]$ 和 $\theta'_{p2}[\eta_2]$ 折算至区间 $(0, \pi)$ 产生新的数组 $\theta_{p1}[\eta_1]$ 和 $\theta_{p2}[\eta_2]$ 。设数组 $\theta_{p1}[\eta_1]$ 中任意元素为 $\theta_{p1}[n]$,将其赋值至数组 $\theta[\eta]$ 中元素 $\theta[i]$,则 $i = \theta_{p1}[n] / \Delta\theta$ 。数组 $\theta_{p2}[\eta_2]$ 与数组 $\theta_{p1}[\eta_1]$ 的处理方法一致。至此,数组 $\theta[\eta]$ 中元素位置 i 与散射角 $\theta_{p1}[n]$ 之间建立了对应关系,进而数组 $\theta[\eta]$ 与数组 $y_{p1}[\eta_1]$ 和 $y_{p2}[\eta_2]$ ($p=0, 1, 2, \dots$) 建立对应关系。再利用此关系将同一散射角对应的各阶散射光线的复振幅进行叠加,最后可以得到给定的散射角上的散射强度分布。

4 数值验证

GLMT 是一种基于严格电磁理论的光散射理论,而 GOA 则是一种近似方法。为了验证 GOA 方法的准确性,计算了粒子的 $0 \sim 180^\circ$ 范围内散射强度分布,并与 GLMT 计算出的结果进行比较。(5)式被用来计算散射光振幅函数 S_j ,即对 $p=0, 1, 2, \dots, \infty$ 各阶出射光线进行求和。理论上来说,对 p 求和应当从 $0 \sim \infty$,但从(22)式和(23)式可以发现,由于 $|\gamma_j| < 1$,当 p 足够大时 ϵ_j 足够小,意味着其散射振幅很小,对散射场的贡献可以忽略不计。结合文献[10]中相关论述和大量的数值验证, p 最大取为 20 即可。

散射强度为 $I_j \propto |S_j|^2$ 。图 4 给出了 GOA 方法和 GLMT 计算出的散射强度分布结果的比较。其中粒子半径 $R=25 \mu\text{m}$,中心折射率和表面折射率分别取 $m_0=1.3326$, $m_1=1.3226$,高斯波束束腰半径为 $\omega_0=10 \mu\text{m}$, $\lambda=0.6328 \mu\text{m}$ 。其中图 4(a)表示垂直极化波的散射强度分布,图 4(b)表示平行极化波的散射强度分布 ($d=0$)。从图 4 可以看出,GOA 方法计算出的强度分布与 GLMT 计算出的强度分布吻合得很好。图 4(c), (d) 中波束中心与球心距离为 $d=10 \mu\text{m}$,其余参量与图 4(a), (b) 相同。从图 4(c, d) 中可以看出当波束中心与粒子中心同在 Z 轴但不同心时,GOA 方法计算出的粒子散射强度分布与 GLMT 计算出的粒子散射强度分布仍然吻合得很好。

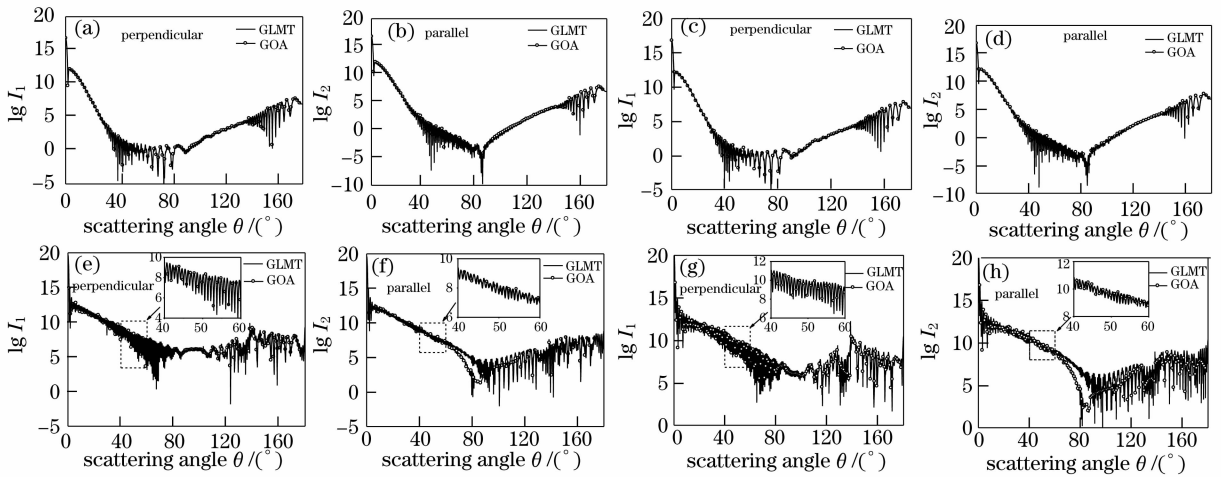


图 4 GOA 与 GLMT 散射强度分布对比

Fig. 4 Comparison of the scattering intensities calculated by GOA and GLMT

图 4(e), (f) 中的高斯波束束腰半径分别为 $25 \mu\text{m}$ 和 $100 \mu\text{m}$, 其余参量与图 4(a), (b) 相同。从图 4(e), (f) 中可以看出, 当束腰半径等于粒子半径时, GOA 计算出的垂直极化波的散射强度分布与 GLMT 相比仍然吻合。但是, 平行极化波的散射强度分布在 $60^\circ \sim 100^\circ$ 范围内产生较大误差。

从图 4(g), (h) 可以看出, 当束腰半径大于粒子半径时, 垂直极化波的散射强度分布与 GLMT 计算出的结果相比仍然吻合, 而平行极化波的散射强度分布除了在 $0 \sim 60^\circ$ 范围内与 GLMT 基本吻合, 在其它角度范围内存在较大误差。对于图 4(g), (h) 的情况, 由于 ω_0 比 R 大得多, 此时可视为平面波入射。对于平面波入射球粒子的情况, GOA 方法只适用于前向散射强度 ($0 \sim 60^\circ$) 的计算, 而不能计算 $0 \sim 180^\circ$ 范围内的散射强度分布。

从图 4(e)~(h) 中垂直极化波和平行极化波散射强度分布的比较结果可以看出, 当束腰大于等于粒子半径时, 垂直极化波的散射强度分布与 GLMT 吻合的情况要远远好于平行极化波。根据 GOA 在均匀球粒子的应用可知, 当束腰大于粒子尺寸时, 表面波和产生彩虹现象的那部分光线对散射场的影响加剧^[10,15]。关于表面波影响的定量分析有待进一步研究。

对于中心折射率与表面折射率不同差值大小对于 GOA 方法的影响, 在文献[11]中已有讨论。文献[11]较为系统地分析了 GOA 方法的适用情况, 对于(26)式所表示的折射率模型, 当中心折射率与表面折射率差值大于 1, GOA 方法不再适用; 对于(27)式所表示的折射率模型, 当中心折射率与表面折射率差值大于 3 的时候, GOA 方法不再适用。对

于高斯波束入射的情况, 其结论相同。同时, 根据文献[10,11], 当粒子尺寸参量 x 大于 75 时, GOA 方法是适用的。

5 计算时间

表 1 给出了不同粒子半径和束腰半径下 GOA 方法以及 GLMT 程序的运行时间, 其中所有程序运行在 Intel Pentium 4, CPU 1.6GHz, 1.0G 内存的计算机上。参量为 ($m_0 = 1.3326, m_1 = 1.3226, d = 0, \lambda = 0.6328 \mu\text{m}$) 采用的 GLMT 程序采用文献[3]中的算法, 波束因子的计算采用区域近似算法^[16~18]。中心和表面折射率分别为 $m_0 = 1.3326$ 和 $m_1 = 1.3226$, 波束中心与球粒子中心重合, 波长 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ 。从表 1 中可以看出, GOA 方法在同样的参量条件下计算速度比 GLMT 要快得多。更加重要的是, 在粒子半径大于 $500 \mu\text{m}$ 的情况下, 例如 $800 \mu\text{m}$, 由于硬件条件的限制, 对于 GLMT 理论, 已经得不到正确的散射强度分布了; 而对于 GOA 方法, 只要在数组长度允许的范围内, 就可以得到正确的粒子散射强度分布。此外需要说明的是, 在计算散射角和光程时, 采用了 21 点 Gauss-Kronrod 积分方法。这种积分方法在处理端点存在

表 1 不同方法的计算时间

Table 1 Calculation time of different method

| Radius of particle $R / \mu\text{m}$ | Beam waist $\omega_0 / \mu\text{m}$ | GLMT /ms | GOA /ms |
|--------------------------------------|-------------------------------------|----------|---------|
| 10 | 5 | 264 | 40 |
| 100 | 50 | 2240 | 321 |
| 300 | 150 | 6820 | 897 |
| 500 | 250 | 11501 | 1513 |

奇异点的情况时是非常有效的,但相对比较耗时。在实际应用时,可以根据精度要求选择其它快速的积分方法。

6 结 论

在平面波对 GRIN 球粒子散射 GOA 方法的基础上,推导出在轴高斯波束对 GRIN 球粒子散射的 GOA 方法的相关公式,给出了算法的实现过程。利用这种方法计算了 $0\sim 180^\circ$ 范围内散射强度分布并与 GLMT 计算出的强度分布进行了比较。结果表明当粒子半径大于束腰时,GOA 可以有效地计算在轴高斯波束对 GRIN 球粒子散射强度分布,表明该方法适用于大尺寸粒子的散射场计算。比较了不同粒子半径和束腰半径下 GOA 方法和 GLMT 程序的运行时间,结果表明 GOA 方法具有较快的计算速度。

从理论推导和算法实现过程可以看出,对于在轴高斯波束对 GRIN 球粒子散射,当粒子半径大于束腰时,GOA 方法不但避免了 GLMT 的复杂计算,同时保证了计算精度和速度,在计算大尺寸 GRIN 球粒子对窄束腰高斯波束的散射强度分布时具有独特优势。此外,GOA 方法也可以计算粒子内场、近场的散射强度以及波束离轴情况下的散射,但是在算法实现上有很大的不同,在下一步的工作中将对这一问题进行研究。

参 考 文 献

- 1 Gérard Gouesbet, Bruno Maheu, Gérard Gréhan. Light scattering from a sphere arbitrarily located in a Gaussian beam, using a Bromwich formulation[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1988, **5**(9): 1427~1443
- 2 Gérard Gouesbet. Generalized Lorenz-Mie theory and applications [J]. *Part. Part. Syst. Charact.*, 1994, **11**(1): 22~34
- 3 Zhensen Wu, Lixin Guo, Kuanfang Ren *et al.*. Improved algorithm for electromagnetic scattering of plane waves and shaped beams by multilayered spheres[J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(21): 5188~5198
- 4 Wu Zhensen, Guo Lixin, Wu Chengming. Light scattering of gaussian beam from an off-axis multilayered sphere [J]. *Acta Optica Sinica*, 1998, **18**(6): 682~687

- 吴振森,郭立新,吴成明. 离轴多层球对高斯波束的光散射[J]. *光学学报*, 1998, **18**(6): 682~687
- 5 Jiang Huifen, Han Xiang'e, Li Renxian. Improved algorithm of electromagnetic scattering by a multilayered cylinder of infinite length for normal incidence and its application [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(2): 265~271
- 姜会芬,韩香娥,李仁先. 垂直入射时无限长分层柱电磁散射的改进算法及应用[J]. *光学学报*, 2007, **27**(2): 265~271
- 6 Tang Hong, Sun Xiaogang, Yuan Guibin. Application on circular cylinder particle size distribution based on anomalous diffraction approximation [J]. *Chin. J. Lasers*, 2007, **34**(3): 411~416
- 唐 红,孙晓刚,原桂彬. 反常衍射近似在测量圆柱形粒子粒径分布中的应用[J]. *中国激光*, 2007, **34**(3): 411~416
- 7 Jean-Philippe Chevaillier, Jean Fabre, Patrice Hamelin. Forward scattered light intensities by a sphere located anywhere in a Gaussian beam[J]. *Appl. Opt.*, 1986, **25**(7): 1222~1225
- 8 Jean-Philippe Chevaillier, Jean Fabre, Gérard Gréhan *et al.*. Comparison of diffraction theory and generalized Lorenz-Mie theory for a sphere located on axis of a laser beam[J]. *Appl. Opt.*, 1990, **29**(9): 1293~1298
- 9 Feng Xu, Xiaoshu Cai, Kuanfang Ren *et al.*. Application of the geometrical optics approximation in particle size analysis by the Forward scattering method [C]. *PARTEC 2004, Academic, Nuremberg, Germany*, 2004, **3**: 16~18
- 10 Feng Xu, Kuanfang Ren, Xiaoshu Cai. Extension of geometrical-optics approximation to on-axis Gaussian beam scattering I. By a spherical particle[J]. *Appl. Opt.*, 2006, **45**(20): 4990~4999
- 11 Xiangzhen Li, Xiang'e Han, Renxian Li *et al.*. Geometrical-optics approximation of forward scattering by gradient-index spheres[J]. *Appl. Opt.*, 2007, **46**(22): 5241~5247
- 12 Anthony E. Siegman, *Lasers*[M]. Oxford: Oxford University, 1986, 100~120
- 13 H. C. van de Hulst. *Light Scattering by Small Particles*[M]. New York: Dover Publication, 1957, 200~208
- 14 Maria Rosaria Vettrano, Jeronimus Petrus Antonius Johannes van Beeck, Michel Léon Riethmuller, Generalization of the rainbow Airy theory to nonuniform spheres[J]. *Opt. Lett.*, 2005, **30**(6): 658~660
- 15 Edward A. Hovenac, James A. Lock. Assessing the contributions of surface waves and complex rays to far-field Mie scattering by use of the Debye series[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1992, **9**(5): 781~795
- 16 Gérard Gouesbet, James A. Lock. Rigorous justification of the localized approximation to the beam-shape coefficients in generalized Lorenz-Mie theory. II. Off-axis beams[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1994, **11**(9): 2516~2525
- 17 Gérard Gouesbet, Gérard Gréhan, Bruno Maheu. Localized interpretation to compute all the coefficients g_m^{\pm} in the generalized Lorenz-Mie theory[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1990, **7**(6): 998~1007
- 18 Gérard Gouesbet. Validity of the localized approximation for arbitrary shaped beams in the generalized Lorenz-Mie theory for spheres[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1999, **16**(7): 1641~1650