

文章编号: 0253-2239(2009)05-1232-08

基于相位重建的叠栅层析技术

宋 旻^{1,2} 陈云云¹ 贺安之¹ 赵志敏²

(¹ 南京理工大学信息物理与工程系, 江苏 南京 210094; ² 南京航空航天大学理学院, 江苏 南京 210016)

摘要 针对叠栅层析研究中采用基于相位重建方法处理叠栅条纹图像的问题, 用标量衍射理论对叠栅偏折仪的叠栅条纹形成原理进行分析。通过小孔滤波分别提取光场的零级和一级频谱, 分析结果与传统的通过几何叠加原理的结果一致, 在形式上更加精确。结论表明, 叠栅条纹是多波面剪切干涉的结果, 且一级频谱滤波下的叠栅条纹图像满足严格的余弦强度分布。采用基于多重网格相位展开的傅里叶变换方法和叠栅层析滤波反投影算法对丙烷燃烧场进行了层析重建。

关键词 傅里叶光学; 光学层析; 叠栅偏折仪; 相位提取; 滤波反投影算法

中图分类号 O436 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS20092905.1232

Moiré Tomography Based on Phase Reconstruction

Song Yang^{1,2} Chen Yunyun¹ He Anzhi¹ Zhao Zhimin²

¹ Department of Information Physics & Engineering, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China

² College of Science, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing, Jiangsu 210016, China

Abstract According to the problem that processing moiré fringes based on phase reconstruction methods in moiré deflection tomography, the formation of moiré fringes is analyzed from the scalar diffraction theory. The zero-and first-order frequency spectrum is extracted respectively by pinhole filtering. Compared with results from the traditional geometric superposition principle of moiré effect, Result in this paper fits well and has a more accurate form. Results show that the moiré fringes are generated by shearing interference of multiple wave fronts and moiré patterns with first-order filtering are the strict cosinusoidal intensity distribution. Finally, the combustion of propane in the air is reconstructed by using the Fourier transform method which based on multi-grid phase unwrapping algorithm and the filtered back-projection algorithm of moiré tomography.

Key words Fourier optics; optical tomography; moiré deflectometry; phase retrieval; filtered back-projection algorithm

1 引 言

光学计算层析技术 (Optical Computerized Tomography, OCT) 是以探测光波为载体, 由加载了被测场信息的多方向投影数据重建待测场物理量分布的技术。这种层析技术可以对被测流场进行实时、非接触的瞬态测量, 结合计算机层析 (CT) 重建理论对被测场进行全场定量重建, 在工业测试领域有广泛应用^[1~4]。叠栅层析技术是 OCT 技术的一个分支, 是以探测射线经过被测区域的出射偏折角为多方向投影数据, 根据 CT 技术重建被测场各物理参量, 具有抗干扰能力强, 测量动态范围大的特点^[5], 适合于

恶劣环境下的大动态范围的复杂流场重建^[5], 如火箭燃气密度场^[6], 超音速风洞中的激波场^[7]等, 尤其在流场的流动显示和定量测试中有重要应用^[8,9]。

在叠栅层析的条纹图像提取问题上, 主要有基于图像灰度分布的条纹跟踪方法^[10], 根据图像的相位信息进行投影波前重建的傅里叶变换方法^[11~13]和相移方法^[14]。条纹跟踪方法最为直观, 通过对图像灰度分布进行变换和处理来提取条纹的偏移量, 再由偏移量计算层析投影数据。该方法的缺点是信息的提取局限于条纹骨架上, 丢失了其他部分的断层信息, 同时跟踪的过程容易受局部的图像缺陷, 如

收稿日期: 2008-08-20; 收到修改稿日期: 2008-10-08

基金项目: 中国博士后科学基金 (20080431096) 和江苏省博士后科研资助计划 (0801010C) 资助项目。

作者简介: 宋 旻 (1980—), 男, 讲师, 博士, 主要从事光学计算层析方面的研究。E-mail: sy0204@vip.sina.com

条纹断裂等的影响。傅里叶变换法和相移方法是通过对图像相位分布的重建来获取全图像信息,同时降低图像缺陷对信息提取的影响。相移方法通过移相获取多幅具有相差的条纹图像,再由多幅图像进行相位主值解调,最后用相位解包算法对包裹图像解包得到投影波前。在叠栅层析的相移重建中,目前主要通过时间相移的方式^[14]获得多幅相移图像,难以满足实际的瞬态测量的实时性要求。傅里叶变换方法只需要单幅条纹图像,通过傅里叶变换对条纹的一级频谱进行提取和平移,通过傅里叶逆变换和反正切运算提取包裹相位,最后由相位解包算法从包裹相位恢复投影波前。姚卫等人应用 Gabor 小波变换对干涉图像的相位主值提取^[15],同时应用多重网格方法进行相位展开进行干涉波前重建^[16]。王鸣、钟金刚等将该方法用于对叠栅层析图像的投影信息提取,通过恢复叠栅条纹图像的相位分布来计算偏折层析的投影角,再由多方向投影角对被测场进行重建^[12~13]。但是叠栅现象一直被认为是纯几何现象,叠栅条纹是两光栅投影的几何叠加^[17]。叠栅偏折仪的衍射效应会降低条纹的对比度,通过限制光栅间的距离来避免衍射效应的影响^[17]。在前述的基于相位提取的叠栅图像处理中^[11~14],一方面叠栅图像被假设或近似具有余弦分布,从而满足进行相位提取方法的基本要求,另一方面从条纹图像恢复的相位分布计算投影偏折角的过程仍然使用基于叠栅条纹几何叠加理论推导出的计算关系^[17]。因此在使用相位提取方法提取叠栅层析投影问题上存在矛盾,也影响投影数据提取精度。

本文完全从标量衍射理论的角度分析叠栅偏折仪,推导叠栅层析投影的波前分布,通过对叠栅图像进行频域滤波,分析主要频谱对应的条纹图像的光场分布。在此基础上采用结合多重网格法的傅里叶变换算法和偏折层析滤波反投影算法对叠栅层析重建研究,并对丙烷燃烧温度场进行重建。

2 叠栅偏折仪的标量衍射理论分析

2.1 理论

叠栅偏折仪的光路设置如图1所示, G_1, G_2 为

一对 Ronchi 光栅,光栅常数为 d ,光栅间距为 Δ 。F 为小孔光阑,位于透镜 L_1 的后焦点和透镜 L_2 的前焦点上。透镜 L_1, L_2 和小孔光阑 F 组成一个 $4f$ 系统。O 为待测场,位于光栅 G_1 之前。由于待测场 O 的存在,使得入射到 G_1 前表面的探测光场发生扰动。该扰动表现为探测光波相位的变化,出射偏折角的变化和出射位移的变化。叠栅偏折仪就是根据叠栅效应来探测光波出射偏折角分布。

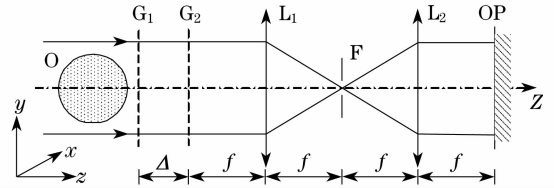


图1 叠栅偏折仪的光路设置

Fig. 1 Optical configuration of the moiré deflectometry
假设在光栅 G_1 前表面的光波相位为 $\varphi(x, y)$,则在 G_1 前表面的光波复振幅 $u_1^-(x, y)$ 表示为

$$u_1^-(x, y) \propto \exp[ik\varphi(x, y)], \quad (1)$$

其中 $k=2\pi/\lambda$, λ 为探测光波波长。光栅 G_1 的栅线方向与 y 轴呈 $+\alpha/2$ 的夹角。则由基尔霍夫边界条件,在 G_1 后表面的光波复振幅为

$$u_1^+(x, y) = u_1^-(x, y) \sum_m a_m \times \exp\left[i \frac{2\pi m}{d} \left(x \cos \frac{\alpha}{2} - y \sin \frac{\alpha}{2}\right)\right], \quad (2)$$

对应的角谱形式 $U_1^+(u, v)$ 为

$$U_1^+(u, v) = \sum_m a_m U_1^-\left(u - \frac{m}{d} \cos \frac{\alpha}{2}, v + \frac{m}{d} \sin \frac{\alpha}{2}\right). \quad (3)$$

经过 Δ 距离的传播后,光栅 G_2 的前表面光波的角谱分布 $U_2^-(u, v)$ 由角谱传播^[18]得到

$$U_2^-(u, v) = \exp[ik\Delta \sqrt{1 - \lambda^2(u^2 + v^2)}] \sum_m a_m \times U_1^-\left(u - \frac{m}{d} \cos \frac{\alpha}{2}, v + \frac{m}{d} \sin \frac{\alpha}{2}\right). \quad (4)$$

光栅 G_2 的结构与 G_1 完全相同,与 y 轴呈 $-\alpha/2$ 的夹角。在 G_2 的后表面的光波角谱分布 $U_2^+(u, v)$ 由基尔霍夫边界条件得到

$$U_2^+(u, v) = \sum_m \sum_n a_m a_n U_1^-\left(u - \frac{m+n}{d} \cos \frac{\alpha}{2}, v + \frac{m-n}{d} \sin \frac{\alpha}{2}\right) \times \exp\left\{ik\Delta \sqrt{1 - \lambda^2 \left[\left(u - \frac{n}{d} \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{n}{d} \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2\right]}\right\}. \quad (5)$$

在非涅耳近似下,上式可以展开为

$$U_2^+(u, v) = \sum_m \sum_n a_m a_n U_1^- \left(u - \frac{m+n}{d} \cos \frac{\alpha}{2}, v + \frac{m-n}{d} \sin \frac{\alpha}{2} \right) \times \exp \left\{ ik\Delta \left[1 - \frac{\lambda^2}{2} (u^2 + v^2) \right] \right\} \exp \left(-\frac{i\Delta \lambda n^2 \pi}{d^2} \right) \exp \left[i \frac{2\pi \Delta \lambda n}{d} \left(u \cos \frac{\alpha}{2} + v \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right]. \quad (6)$$

对上式作傅里叶逆变换可以得到在光栅 G_2 的后表面的光波复振幅分布 $u_2^+(x, y)$

$$u_2^+(x, y) = \sum_m \sum_n a_m a_n \exp \left\{ \frac{i2\pi}{d} \left[(m+n)x \cos \frac{\alpha}{2} - (m-n)y \sin \frac{\alpha}{2} \right] \right\} \exp \left(-\frac{i\pi \lambda \Delta m^2}{d^2} \right) \times \left(u_1^- \left(x - \frac{\lambda \Delta m}{d} \cos \frac{\alpha}{2}, y + \frac{\lambda \Delta m}{d} \sin \frac{\alpha}{2} \right) * \left\{ \frac{\exp(ik\Delta)}{i\lambda \Delta} \exp \left[\frac{i\pi}{\lambda \Delta} (x^2 + y^2) \right] \right\} \right), \quad (7)$$

其中 * 号表示卷积,该卷积项表示复振幅为

$$u_1^- \left(x - \frac{\lambda \Delta m}{d} \cos \frac{\alpha}{2}, y + \frac{\lambda \Delta m}{d} \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

的光波传播了 Δ 距离的非涅耳衍射。对于该卷积项采用积分的渐近展开方法^[19]进行展开,可以得到

$$u_2^+(x, y) = \exp(ik\Delta) \sum_m \sum_n a_m a_n \times \exp \left\{ \frac{i2\pi}{d} \left[(m+n)x \cos \frac{\alpha}{2} - (m-n)y \sin \frac{\alpha}{2} \right] \right\} \times \exp \left(-\frac{i\pi \lambda \Delta m^2}{d^2} \right) u_1^- \left(x - \frac{\lambda \Delta m}{d} \cos \frac{\alpha}{2}, y + \frac{\lambda \Delta m}{d} \sin \frac{\alpha}{2} \right). \quad (8)$$

上式表示加载了被测场信息的探测光波在经过两光栅后在 G_2 后表面的复振幅分布。该式表明叠栅偏折仪实际上类似于 Talbot 干涉仪^[20,21],形成叠栅条纹的光场是多级剪切干涉的结果。剪切波面的位移为 $\left(-\frac{\lambda \Delta m}{d} \cos \frac{\alpha}{2}, +\frac{\lambda \Delta m}{d} \sin \frac{\alpha}{2} \right)$,该项由光栅 G_1 ,两光栅间距 Δ ,以及夹角 α 决定,而与光栅 G_2 无关。与 Talbot 干涉仪不同的是,叠栅偏折仪的被测场在光栅 G_1 之前,两光栅的间距可以不受被测对象的限制,两光栅夹角 α 不一定为零,两光栅的间距 Δ 也不一定在 Talbot 距离上。实际上除了被测场的放置位置不同,Talbot 干涉仪是叠栅偏折仪的特例。

(8)式中的指数项 $\exp(-i\pi \lambda \Delta m^2/d^2)$ 对应于 Talbot 效应,两光栅间距 Δ 满足 Talbot 距离,即有 $\Delta = jd^2/\lambda$,当 j 为偶数,该指数项取值+1,当 j 为奇数,该指数项取值-1。如果被测场不存在,即无扰动情况下,(8)式可改写为

$$u_2^+(x, y) \propto \sum_m \sum_n a_m a_n \exp \left\{ \frac{i2\pi}{d} \left[(m+n)x \cos \frac{\alpha}{2} - (m-n)y \sin \frac{\alpha}{2} \right] \right\} \exp \left(-\frac{i\pi \lambda \Delta m^2}{d^2} \right). \quad (9)$$

此时在观测平面上可以得到平直的叠栅条纹,叠栅条纹的结构完全由上式中的指数项 $\exp\{i(2\pi/d) \cdot [(m+n)x \cos(\alpha/2) - (m-n)y \sin(\alpha/2)]\}$ 决定。

将(1)式代入(8)式,对 $\varphi[x - (\lambda \Delta m/d) \cdot \cos(\alpha/2), y + (\lambda \Delta m/d) \sin(\alpha/2)]$ 作泰勒展开得

$$\varphi \left(x - \frac{\lambda \Delta m}{d} \cos \frac{\alpha}{2}, y + \frac{\lambda \Delta m}{d} \sin \frac{\alpha}{2} \right) = \varphi(x, y) + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \left(-\frac{\lambda \Delta m}{d} \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \left(\frac{\lambda \Delta m}{d} \sin \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} \left(-\frac{\lambda \Delta m}{d} \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} \left(\frac{\lambda \Delta m}{d} \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} \left(\frac{\lambda \Delta m}{d} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left(\frac{\lambda \Delta m}{d} \sin \frac{\alpha}{2} \right) + \dots, \quad (10)$$

对于上式中的因子 $\lambda \Delta m/d$,当 Δ 取 Talbot 距离时有

$$\frac{\lambda \Delta m}{d} = jdm. \quad (11)$$

m 是光栅 G_1 的衍射级数,一般取 $-1, 0, +1$ 三级。 j 决定 Talbot 距离的长度,因为叠栅偏折仪的被测场位于光栅 G_1 之前,所以光栅间距 Δ 不受被测场尺寸影响,可以设置得较小,假设 $j \leq 10$ 。 d 是光栅常数,在实验中采用的是 20 lp/mm 的 Ronchi 光栅, $d = 5 \times 10^{-5} \text{ m}$ 。因此(11)式的值在 10^{-4} 数量级,对于(10)式中的二阶项在 10^{-8} 的数量级。由于两光栅夹角 α 非常趋近于零,因此 $\sin(\alpha/2)$ 趋近于零。同时假设被测场是缓变的,因此(10)式的泰勒展开只需要保留前两项,代入(8)式有

$$u_2^+(x, y) = \exp(ik\Delta) \sum_m \sum_n a_m a_n \times \exp \left\{ \frac{i2\pi}{d} \left[(m+n)x \cos \frac{\alpha}{2} - (m-n)y \sin \frac{\alpha}{2} \right] \right\} \times$$

$$\exp\left(-\frac{i\pi\lambda\Delta m^2}{d^2}\right)\exp[ik\varphi(x,y)]\times$$

$$\exp\left(-ik\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\frac{\lambda\Delta m}{d}\cos\frac{\alpha}{2}\right). \quad (12)$$

由于透镜 L_1, L_2 构成 $4f$ 系统, 因此在无小孔光阑的情况下, 在观察面 OP 上的光波复振幅分布 $u(x, y)$ 与 $u_2^+(x, y)$ 相等。图 2 为 $u_2^+(x, y)$ 在透镜 L_1 后焦面上的频谱分布。图 2(a) 表示当两光栅夹角 α 较大时的情况, 此时不能形成叠栅条纹。当夹角 α 逐渐减小时, 各频谱分量逐渐汇聚到一条直线上, 具有相同的 $m+n$ 值的频谱分量逐渐重合, 如图 2(b) 所示。各频谱分量中起决定性作用是满足 $m=-1, 0, +1$ 和 $n=-1, 0, +1$ 的分量。图 2(b) 中最强的三级频谱是 $m+n=-1, 0, +1$ 三级。在透镜 L_1 的后焦面上放置小孔光阑来分别提取这三级频谱。

2.2 零级滤波

零级滤波要求的频谱分量满足 $m+n=0$ 。在光

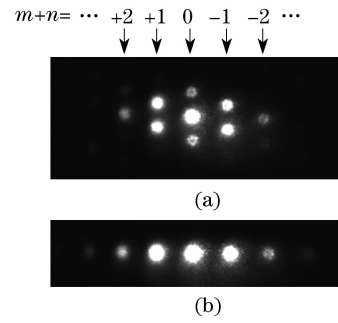


图 2 $u_2^+(x, y)$ 的频谱分布。(a) 两光栅夹角 α 较大; (b) 夹角 α 趋近于 0

Fig. 2 Spectrum distribution of $u_2^+(x, y)$.

(a) $\alpha \gg 0$. (b) $\alpha \rightarrow 0$

栅衍射中的 0 级和 ± 1 级起决定性作用。因此在零级滤波下, 叠栅条纹的光场可以看为三个波面的剪切干涉结果, 对应频谱是 $(m=-1, n=+1)$, $(m=0, n=0)$ 和 $(m=+1, n=-1)$ 。将这三个分量代入 (12) 式有

$$u(x, y) = \exp[ik(\varphi(x, y) + \Delta)] \left\{ a_0^2 \exp\left(\frac{i4\pi}{d}y\sin\frac{\alpha}{2}\right) \exp\left(-\frac{i\pi\Delta\lambda}{d^2}\right) \exp\left[ik\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\frac{\lambda\Delta}{d}\cos\frac{\alpha}{2}\right] + \right.$$

$$\left. a_1^2 \exp\left(-\frac{i4\pi}{d}y\sin\frac{\alpha}{2}\right) \exp\left(-\frac{i\pi\Delta\lambda}{d^2}\right) \exp\left[-ik\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\frac{\lambda\Delta}{d}\cos\frac{\alpha}{2}\right] + a_0^2 \right\}.$$

则在观察面 OP 上的光强分布为

$$I(x, y) = u(x, y)u^*(x, y) = a_0^4 + 4a_0^2a_1^2 \cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda}{d^2}\right) \cos\left(\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\frac{2\pi\Delta}{d}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{4\pi}{d}y\sin\frac{\alpha}{2}\right) +$$

$$4a_1^4 \cos^2\left(\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\frac{2\pi\Delta}{d}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{4\pi}{d}y\sin\frac{\alpha}{2}\right). \quad (13)$$

如果光栅间距处于 Talbot 距离上, 将 $\Delta = jd^2/\lambda$ 代入上式, 可得光强分布为

$$I(x, y) = \left[a_0^2 \pm 2a_1^2 \cos\left(\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\frac{2\pi jd}{\lambda}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{4\pi}{d}y\sin\frac{\alpha}{2}\right) \right]^2. \quad (14)$$

上式的条纹方程为

$$y = \begin{cases} \frac{Qd}{2\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\frac{jd^2}{2\lambda}\cot\frac{\alpha}{2} & j \text{ 为偶数} \\ \frac{Qd}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{d}{4\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\frac{jd^2}{2\lambda}\cot\frac{\alpha}{2} & j \text{ 为奇数} \end{cases}, \quad (15)$$

其中 Q 为整数。条纹间距 p' 为

$$p' = \frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}. \quad (16)$$

由 (15) 式, 在 Talbot 负像的情况下, 即 j 取奇数, 叠栅条纹图相对与 j 为偶数的情况发生 $\pi/2$ 的相移, 条纹结构不变。由 (15) 式可得有被测场扰动时, 叠

栅条纹的偏移量为

$$p'_m = -\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\frac{jd^2}{2\lambda}\cot\frac{\alpha}{2}. \quad (17)$$

有叠栅层析的偏折角投影 $\varphi_d(x, y)$ 与相位层析投影 $\varphi(x, y)$ 的关系^[6]为

$$\varphi_d(y', \theta) = -\frac{1}{n_0}\frac{\partial\varphi(y', \theta)}{\partial y'}. \quad (18)$$

将(18)式代入(17)式可得

$$p'_m = \frac{\varphi_d(x,y)jd^2}{2\lambda\sin(\alpha/2)}n_0\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\varphi_d(x,y)\Delta p'}{d}n_0\cos\frac{\alpha}{2}. \quad (19)$$

与前面众多采用几何叠加的方法推导的叠栅条纹偏移量^[5~9]相比,多出了 $n_0\cos(\alpha/2)$ 这一项。 n_0 为测量中的环境折射率,略大于并趋近于1,而 $\cos(\alpha/2)$ 略小于并趋近于1,显然 $n_0\cos(\alpha/2)$ 是一个非常接近1的值。因此(19)式的结果与前人研究结果^[5~9]是相吻合的,并且从衍射理论的角度推导出的结构较前人从几何叠加推导的结果更加严格、精确。

2.3 一级滤波

一级滤波的频谱分量满足 $m+n=\pm 1$,+1级和-1级分量的结果只会在最终结果的符号上有差别,没有本质区别。考虑 $m+n=+1$ 的情况,起主要作用的频谱是($m=1,n=0$)和($m=0,n=1$),因此一级滤波实际上是双波面剪切干涉的结果。代入(12)式可得

$$u(x,y) = a_0a_1\exp\left(\frac{i2\pi}{d}x\cos\frac{\alpha}{2}\right)\times \exp\{ik[\Delta+\varphi(x,y)]\}\times \left\{\exp\left(-\frac{i2\pi}{d}y\sin\frac{\alpha}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\Delta\pi\lambda}{d^2}\right)\times \exp\left[-i\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\frac{2\pi\Delta}{d}\cos\frac{\alpha}{2}\right]+\exp\left(\frac{i2\pi}{d}y\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right\}. \quad (20)$$

在观察面 OP 上的光场分布为

$$I(x,y) = 2a_0^2a_1^2\left\{1+\cos\left[\frac{4\pi}{d}y\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{\Delta\pi\lambda}{d^2}+\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\frac{2\pi\Delta}{d}\cos\frac{\alpha}{2}\right]\right\}, \quad (21)$$

上式表明,一级滤波后的叠栅条纹光场满足严格的余弦分布,因而严格满足进行傅里叶变换法或相移方法进行相位提取的要求。当 Δ 取 Talbot 距离时, $\Delta\pi\lambda/d^2$ 取值 $j\pi$ 。在 j 取奇数时,表示条纹有 π 的相移。由被测场扰动引起的相位 $\phi(x,y)$ 为

$$\phi(x,y) = \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\frac{2\pi\Delta}{d}\cos\frac{\alpha}{2}. \quad (22)$$

将(18)式代入(22)式,可得叠栅层析偏折角与相位 $\phi(x,y)$ 的关系为

$$\varphi_d(x,y) = \frac{d}{2\pi\Delta}\phi(x,y)\left(-\frac{1}{n_0\cos(\alpha/2)}\right) = \frac{\alpha p'}{2\pi\Delta}\phi(x,y)\left(-\frac{1}{n_0\cos(\alpha/2)}\right), \quad (23)$$

与文献^[12~14]从几何叠加的角度研究的结果相比,也是相差了 $n_0\cos(\alpha/2)$ 项,再次证明本文从衍射理论的角度推导的结论是与以前的结论相吻合,并且更加精确。一级滤波下的条纹方程为

$$y = \frac{Qd}{2\sin(\alpha/2)} - \frac{\Delta\lambda}{4d\sin(\alpha/2)} - \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\frac{\Delta}{2}\cot\frac{\alpha}{2}. \quad (24)$$

与零级滤波的叠栅条纹具有相同的结构。

3 多重网格法提取叠栅条纹波前

根据 2.3 节的结果,在一级频谱滤波下的叠栅图像光场分布满足余弦分布。如果两光栅间距 Δ 处于 Talbot 正像的位置上,(21)式的光场强度进一步写为

$$I(x,y) = 2a_0^2a_1^2 + 2a_0^2a_1^2\cos\left[\frac{4\pi}{d}y\sin\frac{\alpha}{2} + \phi(x,y)\right],$$

上式可写为

$$I(x,y) = 2a_0^2a_1^2 + c(x,y)\exp\left(i\frac{4\pi}{d}y\sin\frac{\alpha}{2}\right) + c^*(x,y)\exp\left(-i\frac{4\pi}{d}y\sin\frac{\alpha}{2}\right), \quad (25)$$

其中 $c(x,y) = a_0^2a_1^2\exp[i\phi(x,y)]$,对上式作傅里叶变换得

$$\tilde{T}(x,u) = 2a_0^2a_1^2\delta(x,u) + C\left(x,u - \frac{2}{d}\sin\frac{\alpha}{2}\right) + C^*\left(x,u + \frac{2}{d}\sin\frac{\alpha}{2}\right). \quad (26)$$

选择频域中的一个旁瓣,并将其平移至频域原点,再作傅里叶逆变换得到 $c(x,y)$ 。包裹相位 $\phi(x,y)$ 可以从 $c(x,y)$ 中得到^[22]

$$\phi(x,y) = \arctan\left\{\frac{\text{Im}[c(x,y)]}{\text{Re}[c(x,y)]}\right\} \quad (27)$$

其中 $\text{Im}[\cdot]$ 与 $\text{Re}[\cdot]$ 分别表示取 $c(x,y)$ 的虚部与实部。 $\phi(x,y)$ 的取值在 $(-\pi, +\pi)$,要提取真实相位 $\phi(x,y)$ 需要进行相位解包。本文采用基于最小二乘(LMS)相位估计思想的多重网格方法^[16,23]对叠栅条纹图像进行相位解包。

图 3(a)和图 3(b)是采用如图 1 所示的叠栅层析实验装置,以 808 nm 的红外光为光源,以丙烷高温燃烧场为测试对象,取一级频谱滤波得到。图 3(a)是在无扰动情况下的叠栅条纹图像,图 3(b)是由丙烷燃烧场存在情况下获取的叠栅条纹图像,图中上部阴影是喷灯喷口。

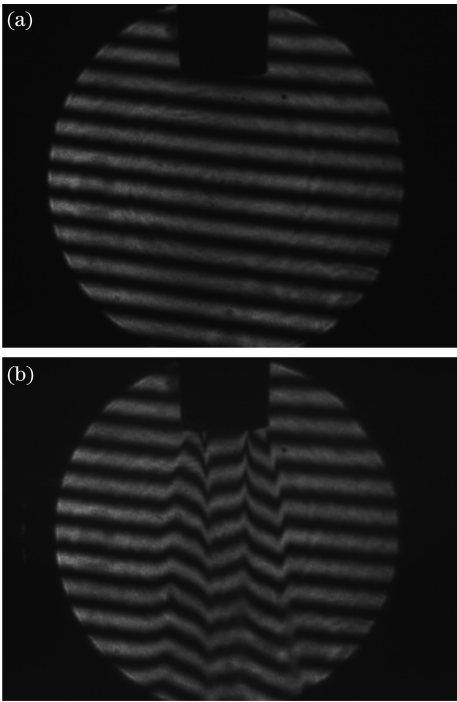


图 3 一级滤波的叠栅条纹图像。

(a) 无扰动 (b) 丙烷燃烧场

Fig. 3 Moiré patterns with first-order filtering

(a) without disturbing object (b) propane flame exists

对图 3 中的条纹图像采用傅里叶变换方法提取相位信息,图 4 是对两种情况的图像获取的包裹图像,图像的处理限制在大小为 512 pixel×512 pixel 的视场中心区域。

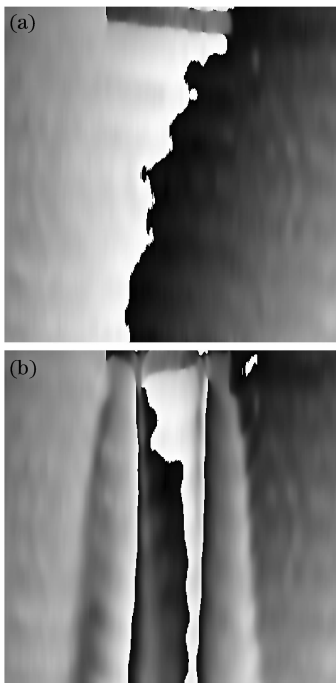


图 4 包裹相位图像。(a) 无扰动 (b) 丙烷燃烧场

Fig. 4 Wrapped phase map. (a) Without disturbing object (b) propane flame exists

图 5 是采用多重网格方法对包裹图像进行相位解包的结果。由于在光路的实际调试过程中的误差,如不是完全标准的平行光入射等问题,造成在没有加载被测场时,条纹图像就已经包含一个初始相位。通过使加载了被测场的重建相位与未加载被测场的重建相位相减来消除由系统带来的初始相位。图 6 即为图 5 中两种状态的重建相位相减的结果,清晰的反映了燃烧场中气流喷射的形态。

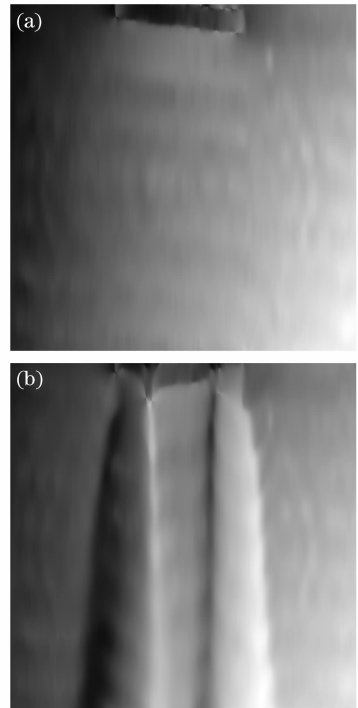


图 5 多重网格方法解包的相位图像。

(a) 无扰动 (b) 丙烷燃烧场

Fig. 5 Unwrapped phase map with multi-grid method.

(a) Without disturbing object (b) propane flame exists

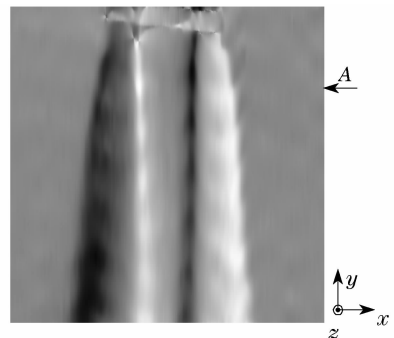


图 6 重建相位分布

Fig. 6 Reconstructed phase map

4 由偏折层析滤波反投影算法重建场分布

根据上一节重建的相位分布,取图 6 中的截面

A 作为层析重建截面,截取该截面的相位分布,根据(23)式可得到偏折角投影。层析重建的过程可以描述为“由多方向投影来重建图像”,图 6 仅是丙烷高温燃烧场一个方向上的叠栅层析投影,由于研究对象丙烷燃烧场具有轴对称结构,各方向的偏折角投影相同,因此实验中只需采集一个方向的投影数据。光学层析的坐标系设置如图 7 所示,待测场的折射率分布为 $n_c(z', x')$,环境参考折射率为 n_0 , $n(z', x') = n_0 - n_c(z', x')$,且 $n(z', x')$ 为紧支撑函数。则在 θ 角方向的偏折角投影为

$$\varphi_d(x, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n_c(z', x')} \frac{\partial n_c(z', x')}{\partial x} dz \approx -\frac{1}{n_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial n(z', x')}{\partial x} dz. \quad (30)$$

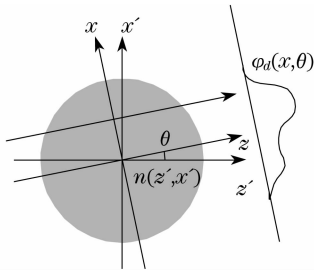


图 7 光学计算层析原理

Fig. 7 Essence of optical computerized tomography

叠栅层析重建就是由多方向的偏折角投影数据逆向重建被测场 $n(z', x')$ 。叠栅层析的重建算法包括解析类重建算法^[6]和级数展开类重建算法^[7]。级数展开类重建算法具有天生的融合先验知识的能力,适合于非完全数据问题的重建,但在重建速度和重建效率上低于解析类重建算法。解析类重建算法包括环带法^[10]和滤波反投影算法^[6]。环带法直接来源于偏折层析的逆 Radon 变换公式,通过逆 Abel 变换重建,只能处理具有轴对称结构的场的重建。滤波反投影算法来源于 CT 中的投影切片定理,能够处理任意形式的场的重建问题。叠栅层析的滤波反投影公式为^[6]

$$n(z', x') = \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_d(\omega, \theta) in_0 \operatorname{sgn}(\omega) \times \exp(i2\pi\omega x) d\omega \right] d\theta, \quad (31)$$

$\Phi_d(\omega, \theta)$ 为偏折角投影 $\varphi_d(x, \theta)$ 相对于 x 的傅里叶变换。 $in_0 \operatorname{sgn}(\omega)$ 表示滤波器,叠栅层析与传统的层析技术,如干涉层析, X 射线层析技术的不同就在于滤波器上,传统层析的滤波器为 $|\omega|$ 。

假设 W 高于函数 $n(z', x')$ 在各方向上投影

$\varphi_d(x, \theta)$ 在频域上的最大值,根据采样定理,对各方向上的投影在空域内的采样间隔可以为 $\tau = 1/2W$ 。因此偏折角投影的采样可以表示为 $\varphi_d(k\tau, \theta)$, τ 的取值在 $-N/2, \dots, 0, \dots, N/2$, 投影的傅里叶变换可以表示为离散形式:

$$\Phi_d(\omega, \theta) = \Phi_d\left(m \frac{2W}{N}\right) = \frac{1}{2W} \sum_{k=-N/2}^{k=N/2} \varphi_d\left(\frac{k}{2W}\right) \exp\left(-i \frac{2\pi mk}{N}\right). \quad (32)$$

滤波反投影算法包含滤波与反投影两个部分,首先对投影进行滤波,由(31)式有

$$Q_\theta(x) = \frac{2W}{N} \sum_{m=-N/2}^{m=N/2} \Phi_d\left(m \frac{2W}{N}, \theta\right) in_0 \times \operatorname{sgn}\left(m \frac{2W}{N}\right) \exp\left(i2\pi m \frac{2W}{N} x\right). \quad (33)$$

选取投影 $\varphi_d(x, \theta)$ 被采样的那些点对 $Q_\theta(x)$ 进行采样,(33)式重新写为

$$Q_\theta\left(\frac{k}{2W}\right) = \frac{2W}{N} \sum_{m=-N/2}^{m=N/2} \Phi_d\left(m \frac{2W}{N}, \theta\right) in_0 \times \operatorname{sgn}\left(m \frac{2W}{N}\right) \exp\left(i2\pi \frac{mk}{N}\right), \quad (34)$$

其中 $k = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2$, 然后进行反投影过程,即

$$n(z', x') = \frac{\pi}{J} \sum_{i=1}^J Q_{\theta_i}(x' \cos \theta_i - z' \sin \theta_i), \quad (35)$$

J 为投影方向数,当然对于某一个 (z', x') , 其对应的 $x = x' \cos \theta_i - z' \sin \theta_i$ 不在(34)式计算的离散值中,此时只要采取线性插值即可。图 8 为由叠栅层析滤波反投影算法对图 6 中 A 截面位置的温度场的重建结果。

5 结 论

叠栅现象一般被认为是纯粹的几何现象,相关结论都是通过几何叠加的方式获得。本文从标量衍射理论的角度对叠栅偏折仪形成的叠栅条纹光场进行分析,结果表明叠栅偏折仪类似于 Talbot 干涉仪,叠栅条纹是多波面剪切干涉的结果。通过对光场进行零级和一级小孔滤波的分析,得到了与前人结论相吻合且更精确的结论。结论表明,在一级滤波的情况下,叠栅条纹的光场分布是严格的余弦分布,这对于进行基于相位方法的条纹图像处理非常有利。同时,由于增加了滤波装置,原有的影响条纹质量的衍射问题得到自然的

解决。在理论分析的基础上,采用结合多重网格方法的傅里叶变换法和叠栅层析的滤波反投影算法

法对由丙烷燃烧形成的高温流场进行重建,取得理想的重建结果。

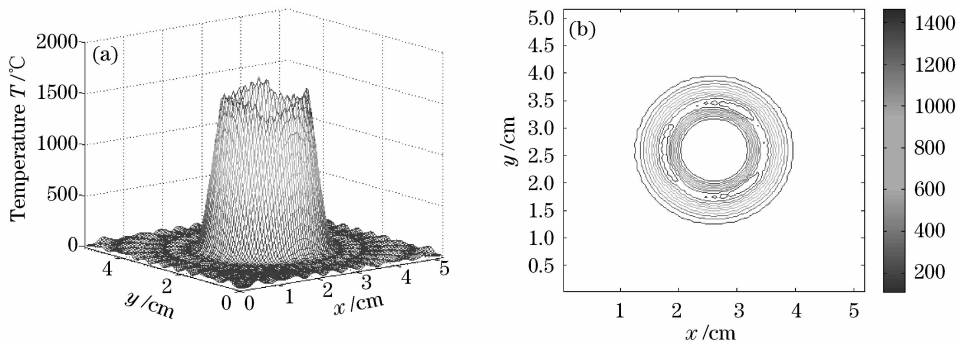


图 8 由叠栅滤波反投影算法重建温度场。

(a) A 截面的温度分布, (b) 等温线图

Fig. 8 Reconstructed Temperature field with deflection filtered back-projection algorithm.

(a) temperature distribution of cross section A, (b) isallotherm diagram

参 考 文 献

- J. D. Posner, D. Dunn-Rankin. Temperature field measurements of small, nonpremixed flames with use of an Abel inversion of holographic interferograms[J]. *Appl. Opt.*, 2003, **42**(6):952~959
- Xiong Wan, Shenglin Yu, Guiying Cai *et al.*. Three-dimensional plasma field reconstruction with multiobjective optimization emission spectral tomography[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2004, **21**(7):1161~1171
- Hemanth Thayyullathil, R. Mohan Vasu, Rajan Kanhirodan. Quantitative flow visualization in supersonic jets through tomographic inversion of wavefronts estimated through shadow casting[J]. *Appl. Opt.*, 2006, **45**(20): 5010~5019
- D. A. Feikema. Quantitative rainbow schlieren deflectometry as a temperature diagnostic for nonsooting spherical flames [J]. *Appl. Opt.*, 2006, **45**(20): 4826~4832
- O. Kafri, I. Glatt. Moiré deflectometry: a ray deflection approach to optical testing[J]. *Opt. Eng.*, 1985, **24**(6): 944~960
- Song Yang, Zhang Bin, He Anzhi. Reconstruction algorithm of deflection tomography by convolution-projection and error analysis[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(11): 1657~1665
宋 畅,张 斌,贺安之. 偏折层析的滤波反投影算法及误差分析[J]. *光学学报*, 2006, **26**(11): 1657~1665
- Yang Song, Bin Zhang, Anzhi He. Algebraic iterative algorithm for deflection tomography and its application to density flow fields in a hypersonic wind tunnel[J]. *Appl. Opt.*, 2006, **45**(31): 8092~8101
- E. Keren, E. Bar-Ziv, I. Glatt, O. Kafri. Measurements of temperature distribution of flames by moiré deflectometry[J]. *Appl. Opt.*, 1981, **20**(24): 4263~4266
- J. Stricker. Axisymmetric density field measurements by moiré deflectometry[J]. *Appl. Opt.*, 1983, **21**(12):1767~1769
- M. Servin, R. Rodriguez-Vera, M. Carpio *et al.*. Automatic fringe detection algorithm used for moiré deflectometry [J]. *Appl. Opt.*, 1990, **29**(22): 3266~3270
- Zhong Jinggang, Wang Ming, Li Dacheng. Fourier transform moiré deflectometry for the automatic measurement of gas temperature field[J]. *Chin. J. Lasers*, 1997, **24**(3): 275~280
钟金刚,王 鸣,李达成. 傅里叶变换叠栅偏折术用于自动测量气体温度场[J]. *中国激光*, 1997, **24**(3): 275~280
- Juan Antonio Quiroga, Daniel Crespo, Eusebio Bernabeu. Fourier transform method for automatic processing of moiré deflectograms[J]. *Opt. Eng.*, 1999, **38**(66): 974~982
- Ming Wang. Fourier transform moiré tomography for high-sensitivity mapping asymmetric 3-D temperature field[J]. *Optics & Laser Technology*, 2002, **34**(8): 679~685
- Ranjbar Samaneh, Khalesifard Hamid Reza, Rasouli Saifollah. Nondestructive measurement of refractive index profile of optical fiber preforms using moiré technique and phase shift method[J]. *SPIE*, 2006, **6025**: 602520-1~602520-7
- Yao Wei, He Anzhi. Application of Gabor transformation to the two-dimensional projection extraction in interferometric tomography[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1999, **16**(2): 258~263
- Yao Wei, Wu Donglou, Wang Zhendong *et al.*. Wave-front reconstruction from opaque-object-containing interferogram using modified multigrid algorithm[J]. *Acta Optica Sinica*, 1999, **19**(2): 171~180
姚 卫,吴东楼,王振东等. 改进的多重网格法重建含遮挡物的干涉波前[J]. *光学学报*, 1999, **19**(2): 171~180
- E. Keren, O. Kafri. Diffraction effects in moiré deflectometry[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1985, **2**(2):111~120
- Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics* [M]. Qin Kechen etc. Transl. Beijing: Electronics Industry Press, 2006. 50~55
古德曼. 傅里叶光学导论[M]. 秦克诚等译. 北京:电子工业出版社, 2006. 50~55
- Born M, Wolf. E. *Principles of Optics* [M]. Yang Jiasun Transl. Beijing: Electronics Industry Press, 2006. 740~746
马科斯·玻恩,埃米尔·沃耳夫. 光学原理[M]. 杨葭荪译. 北京: 电子工业出版社, 2006. 740~746
- Donald E. Silva. Talbot interferometer for radial and lateral derivatives[J]. *Appl. Opt.*, 1972, **11**(11): 2613~2624
- Liao Jianghong, Gu Quwu, Talbot interferometry: method of moiré fringe and double-beam shearing interferometer[J]. *Acta Optica Sinica*, 1986, **6**(10): 921~929
廖江红,顾去吾. Talbot干涉仪: Moiré 条纹方法和双光束剪切方法[J]. *光学学报*, 1986, **6**(10): 921~929
- T. R. Judge, Chenggen Quan, Peter J. Bryanston-Cross. Holographic deformation measurements by Fourier transform technique with automatic phase unwrapping [J]. *Opt. Eng.*, 1992, **31**(3): 533~543
- Mark D. Pritt. Unweighted least squares phase unwrapping by means of multigrad techniques[C]. *SPIE*, 1995, **2584**: 289~300