文章编号：0253-2239(2009)05-1188-05

耦合模理论及其在光纤光学中的应用

钱景仁

（中国科学技术大学 电子工程与信息科学系，安徽 合肥 230026）

摘要　首先简要叙述了耦合模理论早期从微波领域逐渐发展起来而延伸到导波光学和其他领域的历程，该理论的数学描述是联立的一阶线性常微分方程组，即耦合模方程。然后明确指出一阶导数形式是该理论的特色，指明该方程在具体的边值问题下严格地与 Maxwell 方程相等效，并确定其解的主要近似来源与误差量级。最后还扼要叙述了耦合模理论在光纤光学各类问题中的应用，包括建模和模拟。还就使用耦合理论中出现的问题提出了自己的见解。

关键词　光纤光学；耦合模理论；本征函数展开；正交性

中图分类号　O436　　**文献标识码**　A　　**doi**：10.3788/AOS20092905.1188

Coupled-Mode Theory and Its Application to Fiber Optics

Qian Jingren

(*Department of Electronics Engineering and Information Science*,
University of Science and Technology of China, *Hefei*, *Anhui* 230026, *China*)

Abstract　Firstly, the development and application of the coupled-mode theory in microwaves and its extension to fiber optics in the early years are briefly reviewed, and it is well known that coupling among modes is described mathematically by the coupled-mode equations which are linear differential equation group of the first order. Then, it is noted that the coupled-mode equations are rigorously transformed from the Maxwell equations along with a perturbed boundary condition, the approximation methods are used when solving these equations and the order of the approximation is given. The coupled-mode method is attributed to its simplicity in principle, intuitiveness in physics and capacity of simulating complete transfer of power. Finally, a variety of applications of coupled-mode theory to fiber optics, including modeling and simulation are shortly introduced. Misuses of coupled-mode theory are also commented.

Key words　fiber optics; coupled-mode theory; eigen-function expansion; orthogonality

1　引　　言

耦合模理论是研究两个或多个波动(或振荡)模式间相互影响的普遍规律，该理论不仅包括耦合模方法即本征函数展开法，用这一方法可将不同领域中波动间的相互作用问题(如电磁波间的或声波间的等)都演变为用同一基本规律即耦合模方程来描述；而且耦合模理论还包括这一方程自身的规律(如耦合系数间关系)、方程的变换和在不同情况下(弱耦合、强耦合和周期性耦合等)的求解。这一理论不断扩大其应用的过程也是其逐渐充实和成熟的进程。由于物理意义清晰，概念明确、直观，易于理解，在微波传输、微波电子学、导波光学、激光理论等领域广泛得到应用。近年来，在诸多应用中有些由于处理问题不够谨慎，理论分析不够严密，容易导致理论建模中的失误和引入不恰当的近似。

作者凭借长期从事微波和光纤光学中耦合模理论的经验，试图遵循前人研究耦合模理论的严格步骤，对该理论作如下几个方面的论述：耦合模理论的基本规律是联立的一阶线性常微分方程；它在具体的边值问题下，严格地与 Maxwell 方程相等效；该方程解的近似来源与误差量级；模式间正交性的表达

收稿日期：2008-12-06；**收到修改稿日期**：2009-02-09

基金项目：安徽省光电子科学与技术重点实验室课题资助。

作者简介：钱景仁(1935－)，男，教授，博士生导师，主要从事光纤及其器件理论和技术的研究。E-mail：jrqian@ustc.edu.cn

式；该理论在光纤光学中应用的特殊性；最后，还扼要叙述了耦合模理论在光纤光学各类问题中的应用，包括建模和模拟。

2　从广义电报方程到耦合模方程

在微波波导理论中，模式理论是被普遍采用的，因此耦合模理论及其方法自然也首先在这个领域中发展起来，并且成为模式理论不可分割的一部分。耦合模理论最早是由贝尔实验室的 Pierce[1] 在 1947 年提出，后经 Miller[2]，Schelkunoff[3]，Ungen[4]，黄宏嘉[5]等人的后续工作，在金属闭合波导中的耦合模理论基本成熟。

模式理论本来是研究波导横截面几何形状简单的几种波导中本征模的电磁场特性，如果截面变形或沿波导轴形状和大小发生变化，原来的本征模不再是本征的而是耦合的。此时，若把原来的本征模系列作为参考模，就可将被扰动波导中的电、磁场横向分量分别展开成已知的参考模式归一化横向电、磁场的级数和，即

$$\boldsymbol{E}(u,v,z)=\sum_i V_i(z)\boldsymbol{\varepsilon}_i(u,v),$$
$$\boldsymbol{H}(u,v,z)=\sum_i I_i(z)\boldsymbol{h}_i(u,v),$$
$$(i=1,2,3\cdots),\tag{1}$$

其中 u,v 为波导横截面坐标，$V_i(z)$，$I_i(z)$ 分别为第 i 模电场和磁场幅度。将(1)式代入 Maxwell 方程，并结合具体的边值问题(或介质扰动)，可得到

$$-\frac{\mathrm{d}V_i(z)}{\mathrm{d}z}=\mathrm{j}\beta_i Z_i I_i+\sum_k Z_{ik}I_k,\tag{2a}$$
$$-\frac{\mathrm{d}I_i(z)}{\mathrm{d}z}=\mathrm{j}\frac{\beta_i}{Z_i}I_i+\sum_k Y_{ik}V_k,\tag{2b}$$
$$(i,k=1,2,3\cdots),$$

其中 β_i，Z_i(为了方便，不少文献中令 $Z_i=1$)分别为第 i 个参考模的传输常数及波阻抗。Z_{ik} 及 Y_{ik} 是与具体边值问题(或介质扰动)相关，与 i,k 模有关的系数，分别称为广义阻抗及广义导纳系数[5]。(2)式即是人们熟悉的广义电报方程[3]。它是联系模间电场和磁场的一阶联立常微分方程组，若将(2)式对 z 求导一次，一个式子用另一式相取代，即可得到仅保持 V_i 或 I_i($i=1,2,3\cdots$)的二阶常微分方程组。这里忽略了 Z_{ik} 或 Y_{ik} 随 z 变化的因素。

现在引入 z 轴上正、反方向传输模式幅度 A_i^+ 和 A_i^-(或用 a_i^+ 和 a_i^-)，它们和 V_i、I_i 的关系为

$$V_i=\sqrt{Z_i}(A_i^++A_i^-)=\sqrt{Z_i}\cdot(a_i^+e^{-\mathrm{j}\beta_i z}+a_i^-e^{+\mathrm{j}\beta_i z}),\tag{3a}$$

$$I_i=\frac{1}{\sqrt{Z_i}}(A_i^+-A_i^-)=\frac{1}{\sqrt{Z_i}}\cdot(a_i^+e^{-\mathrm{j}\beta_i z}-a_i^-e^{+\mathrm{j}\beta_i z}),\tag{3b}$$

将(3)式代入(2)式，即得耦合模方程组：

$$\frac{\mathrm{d}A_i^\pm}{\mathrm{d}z}=\mp\mathrm{j}\beta_i A_i-\sum_k K_{ik}^{\pm+}A_k^+-\sum_k K_{ik}^{\pm-}A_k^-,$$
$$(i,k=1,2,3\cdots),\tag{4}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}a_i^\pm}{\mathrm{d}z}=-\sum_k K_{ik}^{\pm+}a_k^+e^{-\mathrm{j}(\beta_k\mp\beta_i)z}-\sum_k K_{ik}^{\pm-}a_k^-e^{\mathrm{j}(\beta_k\pm\beta_i)z},$$
$$(i,k=1,2,3\cdots),\tag{5}$$

耦合系数 $K_{ik}^{\pm+}$ 与 $K_{ik}^{\pm-}$ 与(2)式中的 Z_{ik}，Y_{ik}，Z_i，Z_k 存在简单关系。$K_{ik}^{\pm+}$ 与 $K_{ik}^{\pm-}$ 的上标号分别代表 i,k 均是正向波，或均是反向波，或一个是正向，另一个是反向波的情况。(4)、(5)式和(2)式相比，(2)式是联系 V_i 和 I_i 间的关系式，取代后(即式中只包含 V_i 或 I_i)满足二阶常微分方程而耦合模方程组则是一阶联立线性常微分方程。可见，若把同一个模在正、反向上的电场(或磁场)合在一起，则其幅度(即 V_i 或 I_i)满足二阶导数的方程；若把它们分开成单方向传输模，则其幅度(即 A_i 和 a_i)满足一阶导数的方程。从 Maxwell 方程出发，电场和磁场都满足二阶常微分方程是容易接受的，当把场分为两个相反方向传输的模后，其幅度的主导部份沿轴是指数变化的，因此满足一阶常微分方程也是可以理解的。从(4)式或(5)式中明显地看到模式间互为线性关系，即一个模幅度的增量与其他模的存在呈线性相关。这是由于 Maxwell 方程的线性所决定的。这种线性关系在(2)式中不明显。

3　从微波到导波光学

用耦合模理论来研究光波导(或光纤)最早应是 Marcuse[6] 和 Yariv[7]，后来 Snyder[8]，Qian[9]，Haus 及 Huang[10] 等人也在这方面做了大量工作。其中 Marcuse 在他的著作中推导得详细而严谨，他在展开电磁场时用的(1)式中除了光波导中的导模外，还包括辐射模。

如何处理好光波导中的辐射模是耦合模理论应用到光波导的一个关键问题。Marcuse 只是简单地提到辐射模的积分表达用总和号代替[6]。Qian 和 Huang 提出了一种将辐射模的连续谱按频谱次序进行离散化的具体方法[9]，离散化后的一系列辐射模具有导模一样的正交性，也一样可归一化，且具有实用上的可操作性。这样每一个离散化了的辐射模就

可以像导模一样的包括在(1)式的总和号中。

另一个应用到光波导时出现的特殊问题是发生在多根光波导的传输系统,此时某一光波导中的模式虽与同一光波导中的其他模正交,但不再和另一光波导的模式正交,出现了非正交的模式系列,这在理想金属闭合的多波导中是不会发生的。因此在光波导耦合时用耦合模理论要注意到功率不正交的问题,耦合模方程(4)式将变为[11]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1+\mathrm{j}\beta_i)\left(A_i+\sum_{k\neq i}g_{ik}A_k\right)=-\sum K_{ik}A_k,\tag{6}$$

与(4)式不同,为了简单起见,这里只考虑同向模间的耦合;(6)式中 g_{ik} 为非正交因子,当 i 与 k 模属于同一光波导时,$g_{ik}=0$;当属于不同光波导时,

$$g_{ik}=\int_s \boldsymbol{\varepsilon}_{kt}\times\boldsymbol{h}_{it}^{*}\cdot\boldsymbol{i}_z\mathrm{d}s,\tag{7}$$

式中面积分是对整个横截面 s 进行的。非正交特性给耦合模方程的求解带来麻烦,但实际上,当每根光波导仅考虑主模,在弱导与弱耦合情况下,$g_{ik}^2\ll 1$,因此通常还是容易处理的[11]。

4 光纤中传输模式的正交特性和归一化

耦合模理论的数学基础是正交本征函数的级数展开,即(1)式。这系列的本征函数必须是正交的且是完备的。通常,电磁场问题中选取的本征函数是无耗、规则波导(或光纤)中的简正模,各模的电场和磁场满足如下正交性[6]:

$$\int_s(\boldsymbol{\varepsilon}_{kt}\times\boldsymbol{h}_{it}^{*})\cdot\boldsymbol{i}_z\mathrm{d}s=0,\ i\neq k,\tag{8}$$

在弱导光纤中通常本征模(包括导模和辐射模)都采用 LP 模。其横向分量有如下关系[12]:

$$\boldsymbol{h}_{it}=n\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\boldsymbol{i}_z\times\boldsymbol{\varepsilon}_{it},\tag{9}$$

这里 n 是光纤的折射率,在弱导情况近似为常数。将(9)式代入(8)式,可得正交性的另一种表达形式:

$$\int_s\boldsymbol{\varepsilon}_{kt}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{it}^{*}ds=0,i\neq k,\tag{10}$$

(10)式是一种适用于光纤 LP 模的常用的正交关系[13,14]。

但文献[15]中对这一正交表达式有不同的见解,并指出 Lam,Garside[13] 和 Engan[14] 推得的耦合系数不正确。本文作者认为,并非如此。另外,文献[15]还提到 Kashyap 的著作中用的正交关系(4.1.15)式不正确[16],不过经作者查证,那是笔误或印刷错误不会影响该著作的理论结果。

归一化就是当 $i=k$ 时,(9)或(10)式右边等于什么,可取 1,也可令它等于传输的功率流 P,不同形式的归一化影响的是 $\boldsymbol{\varepsilon}_{it}$ 和 $\boldsymbol{h}_{it}$ 表达式中的系数。同时也相应改变 K_{ik} 表达式的系数,两者相消,实际耦合系数的计算值是不会因归一化不同而改变的。

5 耦合模理论的严格性及解耦合模方程的近似性

宏观电磁场问题中的耦合模理论的出发点是 Maxwell 电磁理论,利用正交函数展开,即(1)式将 Maxwell 方程在扰动后的实际边界条件下,严格地转换成一阶线性常微分方程组,即(4)或(5)式的耦合模方程组,正交函数集的选择是关键的一步。不同的集会得到不同的耦合系数,通常选择与实际扰动边界相接近的规则波导(或光纤)作为参考波导,把其中的简正模作为本征函数。由于后者具备上述提到的正交性和完备性,因此(1)式可用来表达任意分布的横向电场和磁场。另外,尚需按实际的电磁场边界条件来判断(1)式是否是均匀收敛级数。这一点在有金属边界的闭合波导中显得更为重要。导体表面或填充介质界面上的场的不连续性引起级数的不均匀收敛,此时求和号和微分、积分号就不能随意交换,逐项微分会导致级数发散,因此在推导过程中须要注意。但在光纤这一类介质波导中,实际上不存在折射率的突变,即使有快变也属弱变,折射率是坐标的连续函数,因此(1)式是无限大截面域内的均匀收敛级数,可以代入 Maxwell 方程进行逐项微分。再根据实际扰动情况利用正交归一化关系,可得到联立的一阶常微分方程组,即(4)式或(5)式。由于光纤中导模数是有限的,但辐射模数是无限的,因此原则上(1)式应包括无限项,(4)式也有无限个方程。

对于一个具体的实际问题来说,有无限多个方程的耦合模方程,从理论上说严格地和 Maxwell 方程组(连同相应的边界条件)相等效。这就表明耦合模方程是一阶导数的方程,它不像有些推导必须作了近似以后才得到一阶导数[15]。

实际上,为了求解耦合模方程,必须把大量无关紧要的模式忽略,往往只需留下几个模式甚至两个主模就可以了。按常微分方程微扰解的表达式[17],可知每忽略一个模式,就将引入 $|K_{ik}/(\beta_i-\beta_k)|^2$ 量级的误差,这里 k 是代表被省略的模,K_{ik} 是 k 模与主模的耦合系数。这就是说,忽略 k 模的条件是

$$\left|\frac{K_{ik}}{\beta_i-\beta_k}\right|^2 \ll 1, \tag{11a}$$

对于周期性耦合结构，该条件应为

$$\left|\frac{K_{ik}}{\beta_i\pm\beta_k-\dfrac{2\pi}{p}}\right|^2 \ll 1, \tag{11b}$$

这里 p 是周期。当 k 模是辐射模时，由于与主模的相位常数差较大，(11)式更易得到满足，K_{ik} 直接与扰动相关，因此要实现(11)式，还必须扰动是小的，或扰动虽大但是缓变的，这样耦合模方程的微扰解收敛较快。这也就是为什么普遍认为耦合模理论是一种微扰方法。与其他微扰方法明显的不同处是该方法可以正确模拟模间能量的全转换，例如可以正确设计出波导零分贝耦合器的长度[18]，也可确定反射率为 90%(或其他百分比)的光纤光栅长度。这表明耦合模微扰方法引入的误差不会因耦合能量的增大而变大，在(11)式的条件下仍可保持较低的水平。其原因就是耦合模方程的推导是严格的，耦合系数的解析表达式是正确无误的，虽然忽略了其他模只剩下两个模，但这两个模间的耦合系数的正确性不受影响，因此在条件(11)下，可以正确地模拟它们间的能量交换，只要相位条件合适，即 $\beta_i=\beta_k$，或对周期性结构来说 $\beta_i\pm\beta_k=2\pi/p$，就有可能产生全转换。这就是所谓强耦合[18]，能量在两个耦合模间沿耦合长度周期性地交替出现全转换。这是耦合模理论的又一个特点，这一特点说明推导耦合模方程要注意严格性，在推导一开始就忽略某个场分量而引入近似[15]是不可取的。

耦合模理论的另一个特点是耦合模方程的变换，也即本征模系的变换。波导中扰动场可以用理想波导中的理想模来展开，也可以用波导扰动某处的本地模来展开，对于理想模而言，缓变的大扰动可以转换成本地模的小扰动，即原来理想模间的耦合系数较大，用微扰解近似程度差，将耦合模方程变换后，本地模间的耦合系数因缓变而减弱，微扰解收敛就快。必要时，本地模还可以变换成超本地模，模间耦合系数可进一步变弱。这就是早年 Huang 提出的广义耦合模理论[19]。表面上看是一阶线性常微分方程组的求解方法，即缓变系数法[21]，实质有深刻的物理含意。

6　耦合模理论已成为光纤模式理论重要组成部分

耦合模理论是联系波动间耦合的统一理论，并非不同的研究对象出现不同种的耦合模理论[15]。对象不同，建模方式会有差别，但用的方法一样是本征函数展开法，所得结果也是一样的方程。当然，不同的对象或领域各有其特殊性，但不能说是不同种的理论。

耦合模理论在光纤问题中的应用虽是从闭合金属波导引申而来，但其应用范围比闭合波导更广泛。其主要原因是光纤实际上是介质波导，光纤技术中遇到的极大多数问题，如光纤光栅、椭圆芯光纤、熊猫光纤、光纤弯曲、光纤扭转等结构，其折射率偏离未扰动的理想值一般小于 10^{-2}，且是连续变化，因此模间耦合很小，(11)式满足得很好，用耦合模理论来处理就十分有效。

直光纤中光纤折射率剖面扰动引起模间的耦合系数早由 Marcuse 严格推得[6]

$$\begin{aligned}
K_{ik}^{\pm+} &= \pm\frac{j\omega\varepsilon_0}{2}\int_s (n^2-n_0^2)\left[(\varepsilon_{it}^*\varepsilon_{kt})\pm\varepsilon_{zi}^*\varepsilon_{zk}\frac{n_0^2}{n^2}\right]ds,\\
K_{ik}^{+-} &= \pm\frac{j\omega\varepsilon_0}{2}\int_s (n^2-n_0^2)\left[(\varepsilon_{it}^*\varepsilon_{kt})\mp\varepsilon_{zi}^*\varepsilon_{zk}\frac{n_0^2}{n^2}\right]ds,
\end{aligned} \tag{12}$$

与 Marcuse 原式不同的是，这里(8)式的归一化取为 1，因此(12)式与文献[6]的耦合系数公式(3.2－44)差一常数。(12)式中 n_0 和 n 分别为光纤扰动前后截面上折射率分布，ε_z 为本征模轴向电场分量。

(12)式不仅能用于纤芯界面变化的情况，同样，可用于各种类型的光纤光栅。Erdogan[21] 的文章是典型的一篇。该文用耦合模理论透彻地分析了均匀 Bragg 光纤光栅的反射和群迟特性，并研究了切趾光栅、啁啾光栅、倾斜光栅和长周期光栅的相应特性。在研究后两种光纤光栅时，考虑了主模和高次模(包括包层模)间的耦合。(12)式还用来确定光纤弯曲引起的截面上折射率的改变而造成的线双折射[21] 和保偏光纤中应力区造成的线双折射。

多根光纤间模的耦合[7] 和渐变纤芯光纤中模的耦合[6] 也都基于(12)式而推出。常见的光纤耦合器就是两根相同的光纤熔融后拉锥而成；利用两光纤主模间耦合系数随波长和偏振的不同而改变的特性，用耦合器实现了波分复用器和偏振分束器；两根包层直径稍有差别的光纤还可以实现宽带耦合。

扭转光纤[22]、螺旋光纤[23] 则因模间的耦合机制不同需要重新建模推得耦合模方程。特别指出，在熔融状态下扭转光纤用耦合模分析是十分成功的[24]，且已设计出特殊光纤元件即偏振变换器[25,26]，最近用它又成功地分析了扭转的四叶应力

区光纤[27]。

上述列举的多种应用仅是一小部分,也已足以表明耦合模方法在光纤模式理论中的重要地位。由这些例子可见,由于大部份实际光纤问题中,光纤介质的折射率在截面上和沿轴向的变化是缓慢的,如光纤弯曲或扭转等,或即使是快变却是弱变,如光纤光栅;又由于多数光纤问题中涉及的主要模式是两个正交的主模,或是主模及其反射模,或是主模和某一辐射模,同时要考虑的模式只有两个;因此十分适合于用耦合模理论来处理。相反,如果光纤中折射率发生快变且变化较大,如两根不同类型的光纤接头问题,光纤和光波导的连接问题等,用耦合模方法来处理就不合适;另外,在多模光纤中由于必须同时考虑的模式众多,甚至上千,用模式理论不再有效。

7 结 论

耦合模理论是研究多个波动间相互作用的理论,它已成为电磁场模式理论的重要组成部分,其数学表达式是联立的一阶线性常微分方程组,即耦合模方程组,它可以从 Maxwell 方程根据实际边界条件或介质扰动严格地转换而来,实际解方程时需用微扰近似。这一理论在导波光学中得到广泛的应用,并在这一应用中进一步完善与发展。该理论已解决光纤技术中提出的大量理论问题,包括建模、分析、模拟和设计。与其他方法相比,耦合模方程更为直观和简便,且能正确地模拟能量的全转换。

近年来,随着光子晶体、表面等离子体波导等一些新型的光导结构和机制的出现,传统的模式概念和原有的耦合模理论在新型的光导结构前面临挑战,但这也是耦合模理论更进一步发展的大好机遇。

最后,在本文写作过程中曾与杨利博士做过有益讨论,对她所提对文章的修改意见,作者表示感谢。

参 考 文 献

1 J. R. Pierce, W. G. Shephend, Reflex oscillation[J]. *BSTJ*, 1947, **26**(7):460～681

2 S. E. Miller. Coupled Wave Theory and waveguide application [J]. *BSTJ*, 1954, **43**(5): 561～719

3 S. A. Schelkunoff. Conversion of Maxwell's equations into generalized telegraphist equations[J]. *BSTJ*, 1955, **44**(9): 995～1043

4 H. G. Unger. Helix waveguide theory and application[J]. *BSTJ*, 1958, **47**(11): 1599～1647

5 H. C. Huang. *Microwave Principles* [M]. Beijing: Science Press, 1i63, Chapter 8
黄宏嘉. 微波原理[M]. 北京:科学出版社,1963,第八章

6 D. Marcuse. *Dielectric Optical Waveguide* [M]. New York: Academic Press, 1974

7 A. Yariv. Coupled-mode theory for guided-wave optics[J]. *Trans IEEE J. Quant. Electron.*, **QE-9**(9): 919～933

8 A. W. Snyder, and D. Love John. *Optical Waveguide Theory* [M]. London, Chapman and Hall, 1983

9 J. R. Qian, W. P. Huang. Coupled-mode theory for LP modes [J]. *J. Lightwave Tech.*, 1986, **LT-4**(6): 68～74

10 H. A. Haus, W. P. Huang. Coupled mode theory[J]. *Proc. IEEE*, 1991, **79**(10): 1505～1518

11 J. R. Qian. Generalized coupled-mode equations and their applications to fiber coupler[J]. *Electron. Lett.*, 1986, **22**(6): 304～305

12 A. W. Snyder, W. Young. Modes of optical waveguides[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1978, **18**(2): 297～309

13 D. K. W. Lame, B. K. Garsid. Characterization of single-mode optical fiber[J]. *Appl. Opt.*, 1981, **20**(3):440～445

14 H. E. Engan. Analysis of polarization-mode coupling by acoustic torsional wave in optical fibers[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1996, **13**(1):112～118

15 B. Liao, Q. Zhao, D. Feng *et al.*. Coupled-mode theory for optical fiber and its application to fiber Bragg gratings[J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(11):1340～1344
廖帮全,赵启大,冯德军 等. 光纤耦合模理论及其在光纤布拉格光栅上的应用[J]. 光学学报,2002, **22**(11): 1340～1344

16 R. Kashyap. *Fiber Bragg Gratings* [M]. San Diego: Academic press, 1999, Chapter 4

17 J. C. Slater. *Quantum Theory of Matter* [M]. McGraw-Hill, 1951

18 H. C. Huang. Theory of coupled waveguides[J]. *Scientia Sinica*, 1962, **11**(1):16～57

19 H. C. Huang. Generalized theory of coupled local normal modes in multi-wave guides[J]. *Scientia Sinica*, 1960, **9**(1):142～154

20 H. C. Huang. Solution of differential equation with slowly varying coefficients[J]. *Acta Math. Sinica*, 1961, **11**(3):238～247
黄宏嘉. 缓变系数法[J]. 数学学报,1961, **11**(3):238～247

21 T. Erdogan. Fiber grating spectra[J]. *J. Lightwave Tech*, 1997, **LT-15**(8):1277～1294

22 R. Ulrich, A. Simon. Polarization optics of twisted single-mode fibers[J]. *Appl. Opt.*, 1979, **18**(13): 2241～2251

23 J. R. Qian. Coupled mode theory for helical fibers[J]. *Proc. IEE Part J*, 1988, **135**(2):178～186

24 J. R. Qian, Li Luksun. Spun highly linearly-birefringence fibers for current sensors[J]. *Scientia Sinica (series A)*, 1990, **33**(1): 99～105

25 H. C. Huang. Fiber-optic analogs of bulk-optic wave plates[J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(18):4241～4258

26 A. H. Rose, N. Feat, S. M. Etzel. Wavelength and temperature performance of polarization-transforming fibers[J]. *Appl. Opt.*, 2003, **42**(34): 6897～6904

27 Qian Jingren, Wang Xuxu. Coupled-mode theory of spun multi-lobe stress region fibers[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(3): 550～554
钱景仁, 王许旭. 多叶应力区扭转光纤的耦合模理论[J]. 光学学报,2007, **27**(3):550～554