

# 角谱衍射公式的快速傅里叶变换计算及在数字全息波面重建中的应用

李俊昌

(昆明理工大学, 云南 昆明 650093)

**摘要** 从取样定理出发, 对角谱衍射公式及逆运算的快速傅里叶变换(FFT)进行了研究。基于研究结果, 讨论数字全息研究中物光通过一个光学系统到达 CCD 探测器的波面重建问题, 提出物光场的逆运算追迹重建及像空间波面重建两种方法。最后, 通过数字全息实验及波面重建计算, 对两种波面重建方法的可行性作出证明。

**关键词** 衍射计算; 数字全息; 波面重建

**中图分类号** O438.1      **文献标识码** A      **doi**: 10.3788/AOS20092905.1163

## FFT Computation of Angular Spectrum Diffraction Formula and its Application in Wavefront Reconstruction of Digital Holography

Li Junchang

(Kunming University of Science and Technology, Kunming, Yunnan 650093, China)

**Abstract** Starting from the sampling theorem, the fast Fourier transform (FFT) computation of angular spectrum diffraction formula and its inverse operation are studied. Based on the studied results, the wavefront reconstruction problem in digital holography, that is, the object light passing through an optical system and then reaching CCD detector, is studied. Two methods are proposed: inverse operation tracking reconstruction of the object wave field and wavefront reconstruction in image space. Finally, the feasibility of these two methods is proved by digital holography experiments and the calculation of wavefront reconstruction.

**Key words** diffraction calculation; digital holography; wavefront reconstruction

### 1 引 言

随着计算机及电荷耦合器件(CCD)探测技术的进步, 使用 CCD 代替传统全息感光板的数字全息检测正成为一个研究热点<sup>[1~9]</sup>。近年来, 随着记录飞秒级超快瞬态过程的脉冲数字全息技术<sup>[8,9]</sup>出现, 数字全息更展现出在科学研究及光学无损检测中的活力, 获得高质量的重建物光场是实现准确检测的基本保证, 且使用菲涅耳衍射积分重建物光场是通常采用的波面重建方法。根据标量衍射理论, 瑞利-索末菲公式是衍射问题的准确解, 菲涅耳衍射积分可以视为是瑞利-索末菲公式中衍射长度展开式保留 2 次项的傍轴近似<sup>[10]</sup>。为提高波面重建质量, 将

瑞利-索末菲公式中衍射长度展开式保留到 4 次项进行研究是一种可取的途径<sup>[3,4]</sup>。然而, 通过研究, 能够直接使用瑞利-索末菲公式或消傍轴近似的其他衍射公式重建物光场, 可以得到更准确的结果。此外, 在数字全息检测研究中, 由于 CCD 面阵尺寸固定, 为有效获取不同尺寸物体发出的光波场信息, 让物光通过光束变换系统到达 CCD 是通常采用的方法<sup>[7]</sup>。在这种情况下, 如果也能够使用准确的衍射公式进行波面重建, 更具实际意义。

对衍射的数值计算研究表明<sup>[11]</sup>, 基尔霍夫公式、瑞利-索末菲公式以及角谱衍射公式均能使用快速傅里叶变换(FFT)进行计算。由于这三个公式均

**收稿日期**: 2008-09-01; **收到修改稿日期**: 2008-10-06

**基金项目**: 云南省自然科学基金(2007F028M)资助课题。

**作者简介**: 李俊昌(1945—), 男, 研究员, 博士生导师, 主要从事信息光学理论及数值计算方面的研究。

是标量衍射准确解,只要遵循取样定理正确完成快速傅里叶变换计算,便可以直接用它们进行数字全息波面重建。由于角谱衍射公式相对于另外两个公式的取样条件容易满足,本文以角谱衍射公式为对象进行研究。为便于实际应用,首先导出角谱衍射公式的取样条件,然后在物光通过一个光学系统到达 CCD 的前提下,提出使用角谱衍射公式进行波面重建的两种方法,并给出相应的实验证明。

## 2 角谱衍射积分及其逆运算的快速傅里叶变换计算

在直角坐标系中,令物平面坐标为  $x_0, y_0$ ,光波场为  $U_0(x_0, y_0)$ ,经某一空间距离  $d$  衍射后的衍射屏坐标为  $x, y$ ,衍射场为  $U(x, y)$ 。引用傅里叶变换及逆变换符号  $\mathcal{F}\{\} \mathcal{F}^{-1}\{\}$ ,角谱衍射积分可以写为<sup>[10]</sup>:

$$U(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{U_0(x_0, y_0)\}H(f_x, f_y)\} \quad (1)$$

式中  $f_x, f_y$  为频域坐标

$$H(f_x, f_y) = \exp\left[ikd\sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}\right], \quad (2)$$

$k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  为光波长。

根据(1)式,得到逆运算的表达式:

$$U_0(x_0, y_0) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{U(x, y)\}H^*(f_x, f_y)\}, \quad (3)$$

式中

$$H^*(f_x, f_y) = \exp\left[-ikd\sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2}\right]. \quad (4)$$

将  $H(f_x, f_y)$  及  $H^*(f_x, f_y)$  视为传递函数,衍射及衍射逆运算相当于光波场通过一个线性空间不变系统的变换,可以使用快速傅里叶变换进行计算。现作让计算满足取样定理的讨论。

由于(3)式的变换函数由函数  $U(x, y)$  的傅里叶变换与传递函数  $H^*(f_x, f_y)$  的乘积组成。分析  $H^*(f_x, f_y)$  的表达式知,它是在整个频域都有取值的函数。因此,要使(3)式的离散计算严格地满足取样定理是不可能的。然而,在形式上让  $H^*(f_x, f_y)$  满足取样定理可以视为是在计算区域内  $H^*(f_x, f_y)$  最高频率所对应的空间周期上至少要有两个取样点。并且,  $H^*(f_x, f_y)$  的取样满足取样定理后,通常情况  $\mathcal{F}\{U(x, y)\}$  的取样也满足取样定理。基于这个分析可以导出近似满足取样定律的条件<sup>[11]</sup>。

设衍射场的计算宽度为  $\Delta L$ ,若取样数为  $N \times N$ ,  $H^*(f_x, f_y)$  的离散表示式为

$$H^*(f_x, f_y) = \exp\left[-ikd\sqrt{1 - (\lambda m \Delta f_x)^2 - (\lambda n \Delta f_y)^2}\right] \quad (5)$$

式中,  $\Delta f_x = \Delta f_y = \frac{1}{\Delta L}$ ,  $m, n = -N/2, -N/2+1, \dots, N/2-1, N/2$ 。

由于  $m, n = N/2$  对应于最高频谱所在区域,若在该区域取样变化率小于或等于  $\pi$ ,则有

$$\left| \frac{\partial}{\partial m} kd \sqrt{1 - (\lambda m \Delta f_x)^2 - (\lambda n \Delta f_y)^2} \right|_{m, n = N/2} \leq \pi, \quad (6)$$

求解得

$$\frac{\lambda d N}{\Delta L \sqrt{\Delta L^2 - 2(\lambda N/2)^2}} \leq 1, \quad (7)$$

通常  $\Delta L^2 \gg 2(\lambda N/2)^2$  总是满足的,(7)式的一个较好近似是

$$\frac{\Delta L}{N} \geq \sqrt{\lambda d / N}. \quad (8)$$

(7),(8)式为角谱衍射公式取样计算提供了依据。

从形式上看,(7)式或(8)式似乎是很容易满足的条件,但应该记住这个条件是在  $U(x, y)$  的取样间距  $\Delta L/N$  满足取样定理的前提下得出的,对于给定的  $N, \lambda$  及  $d$ ,取样间距并不能任意地扩大。

对于衍射的正向运算,通常也假定  $\mathcal{F}\{U_0(x_0, y_0)\}$  的取样条件相对于传递函数的取样容易实现<sup>[12]</sup>,上面的讨论方法及结论可以直接使用。

## 3 物光通过一光学系统时波面重建的两种方法及实验证明

在数字全息检测研究中,为有效获取不同尺寸物体发出的光波场信息,让物光通过一光束变换系统到达 CCD 是通常采用的方法,并且通常让 CCD 面阵置于物光场的像平面,利用像与物的对应关系实现数字全息检测。因此,物光通过光学系统后,研究 CCD 在任意位置的波面重建问题具有实际意义。本文提出两种波面重建方法,用一个透镜对物光场进行变换的数字全息系统为例进行研究。

图 1 是实验简化光路,照明物是来自  $O$  点的发散球面波,穿过物平面的光波通过透镜后成为会聚的物光波,该列光波穿过分束器(Bs)后投向 CCD 成为物光。平面参考光自上而下由分束器引入,经反射到达 CCD 成为参考光。可见,实验光路能适应于被测量的透射式物体尺寸变化的情况。当物体尺寸较小时,物体移近  $O$  点,携带物体信息的光波较好地充满 CCD 窗口;反之,当物体尺寸较大时,物体移近透镜,CCD 较满意地获取物光信息。

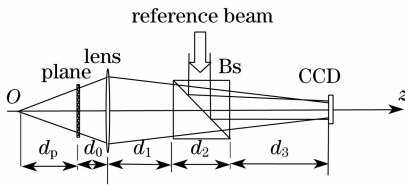


图 1 数字全息实验简化光路

fig. 1 Simplified optic path of digital holography experiment

实验中物体是透光孔为“龙”字的平面光阑，物平面计算宽度  $\Delta L = 12.87 \text{ mm}$ ，取样数  $N = 512$ 。与装置相关的其余参数为： $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ， $d_p = 908 \text{ mm}$ ， $d_0 = 147 \text{ mm}$ ， $d_1 = 260 \text{ mm}$ ， $d_2 = 80 \text{ mm}$ ， $d_3 = 1100 \text{ mm}$ ；透镜焦距  $f = 699 \text{ mm}$ ，分束器折射率  $n = 1.5$ ；CCD 面阵尺寸为  $4.34 \text{ mm} \times 6.17 \text{ mm}$ ，对应  $552 \text{ pixel} \times 784 \text{ pixel}$ 。由于衍射传递函数法计算前后光波场宽度不变<sup>[12]</sup>，为能完整重建物平面，通过插值将 CCD 面阵有效像素变为  $236 \text{ pixel} \times 335 \text{ pixel}$ ，周边补零形成  $512 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$  的图像。实验中将到达 CCD 的参考光设计成与光轴成一微小角度的平面波，参照文献<sup>[13]</sup>的消零级衍射光方法，在同一实验条件下参考光引入一非  $2\pi$  整数倍的相移，记录相移前后的两幅数字全息图灰度相减形成差值图，从差值图的频谱中设计滤波器取出物光频谱。

### 3.1 光波场逆向追迹重建

基于衍射逆运算的物理意义，从 CCD 平面出发，利用角谱衍射的逆运算公式可以逐一计算原光波传播时在各光学元件分隔面上的光波场，最终能获得物平面光波场。追迹步骤及相关结果如下：

1) 求差值图像，图 2(a)、(b) 分别是参考光相移前后的 CCD 探测图像，图 2(c) 是二者的差值图；

2) 求差值图的频谱，图 2(d) 是差值图的频谱，由于零级衍射光频谱被有效削弱，物光频谱与零级衍射光频谱能有效分离；

3) 设计滤波器取出物光频谱，在物光频谱区域通过数值计算确定物光频谱“重心”，以“重心”位置为中心，在尽量避开残余零级衍射光频谱的前提下，选择半径足够大的滤波窗取出物光频谱(图中用浅色圆周示出圆形选通滤波器范围)。再将选通滤波器获取的物光频谱移动到频率平面中心，通过补零重新形成  $512 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$  的物光离散频谱。

按照上面的步骤得到  $\mathcal{F}\{U(x, y)\}$  的离散频谱，根据逆运算(3)式的物理意义及图 1 所示的距离参数，能逐一在各光学元件界面间作衍射场的逆向追迹，相关表达式如下。

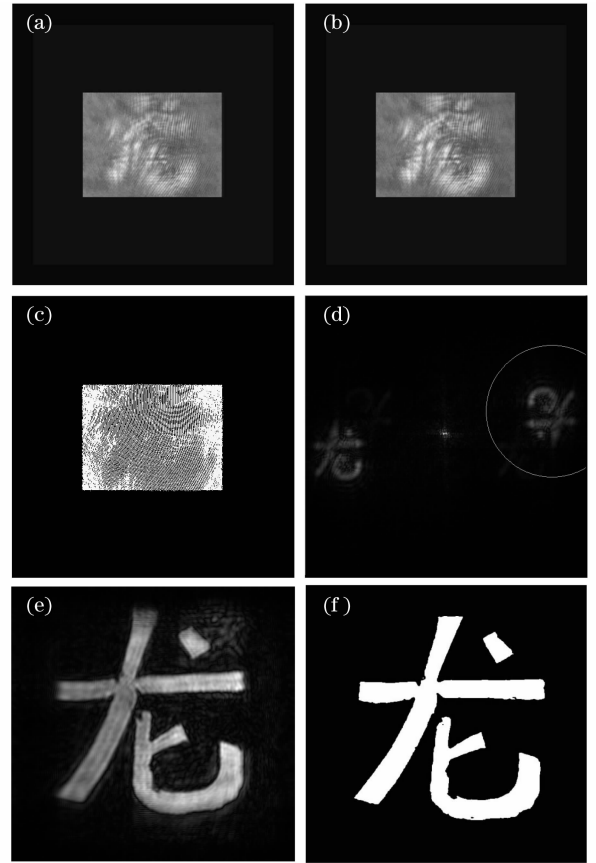


图 2 逆向追迹重建的相关图像参考光无相移(a)、有相移(b)的 CCD 图像，(c)差值干涉图像及其频谱(d)，(e)物平面图像，(f)物平面光阑的二值图像  
Fig. 2 Corresponding images reconstructed by inverse tracing calculation CCD image for reference light without (a) and with (b) phase shift, (c) interpolating interference image and its spectrum (d), (e) object plane image, (f) two valued image of object plane aperture

首先求出立方分束器右侧光波场为

$$U_3(x_3, y_3) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F}\{U(x, y)\} \times \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda} d_3 \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2} \right] \right\}, \quad (9)$$

令  $\lambda_s = \lambda/n$ ，立方分束器左侧面的衍射场为

$$U_2(x_2, y_2) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F}\{U_3(x_3, y_3)\} \times \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda_s} d_2 \sqrt{1 - (\lambda_s f_x)^2 - (\lambda_s f_y)^2} \right] \right\}. \quad (10)$$

根据上面结果，透镜右侧衍射场为

$$U_1(x_1, y_1) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F}\{U_2(x_2, y_2)\} \times \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda} d_1 \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2} \right] \right\}, \quad (11)$$

从透镜返回到物平面的计算时应消除透镜变换作

用,因此有

$$U'_0(x_0, y_0) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \left[ U_1(x_1, y_1) \exp \left( jk \frac{x_1^2 + y_1^2}{2f} \right) \right] \times \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda} d_0 \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2} \right] \right\}. \quad (12)$$

由于物平面是被球面波照明的,物平面光波场复振幅重建还必须进行运算:

$$U_0(x_0, y_0) = U'_0(x_0, y_0) \exp \left( -jk \frac{x_0^2 + y_0^2}{2d_p} \right). \quad (13)$$

图 2(e), (f) 分别是追迹重建图像及物平面光阑强度图像。将重建图像与原物比较可见,重建图像字体边沿出现灰度的平滑过渡,不再像原光阑透光孔那样黑白分明,这是由于 CCD 窗口及选通滤波器不能获取物光频谱高频成份的必然结果<sup>[1]</sup>,但实验研究对追迹重建的可行性已给出证明。

应该指出,物平面到 CCD 间无透镜的波面重建可以视为上述方法的一个特例。由于角谱衍射公式是消傍轴近似的准确公式,因此利用角谱衍射的逆运算可以完成高质量的波面重建。

### 3.2 像空间波面重建

分析逆向追迹重建方法可见,逆向追迹计算量随光学系统元件数量的增加而增加。在应用研究中,当光学系统的衍射受限作用可忽略,并且能够视为轴对称傍轴系统时,可以简明地按下面方法进行波面重建。

在忽略光学系统的衍射受限作用后,物平面光波场  $U_0(x_0, y_0)$  与理想像  $U(x_i, y_i)$  的关系为<sup>[14]</sup>

$$U(x_i, y_i) = \frac{1}{M} U_0 \left( \frac{x_i}{M}, \frac{y_i}{M} \right) \times \exp \left[ jk \left( 1 - \frac{1}{M} \right) \frac{x_i^2 + y_i^2}{2d_{hi}} \right], \quad (14)$$

式中  $M$  为像的横向放大率,  $d_{hi}$  为光学系统像方主面到像平面的距离。

因此,可用 CCD 探测的数字全息图先对物光场的像重建,然后根据物像关系表示出物光场。该方法可称为像空间波面重建法。

为便于实际应用,现用矩阵光学理论确定相关计算参数。图 3 给出理论研究的参考坐标,光波自左向右传播,物平面为  $x_0y_0$  平面,  $x_iy_i$  平面是物光场的像平面, CCD 所在平面为  $xy$  平面,  $x_hy_h$  平面是光学系统的像方主面,  $d_{ci}$ ,  $d_{hi}$  分别为  $xy$  平面及  $x_hy_h$  平面到像平面的距离。

设  $x_0y_0$  平面到  $xy$  平面间的光学矩阵为  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ , 光波从  $x_0y_0$  平面传播到  $x_iy_i$  平面的光学

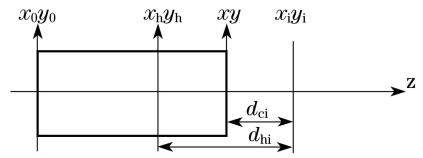


图 3 理论研究的参考坐标

Fig. 3 Reference coordinates of theoretical research  
矩阵则为

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d_{ci} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + Cd_{ci} & B + Dd_{ci} \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (15)$$

根据矩阵光学理论<sup>[14]</sup>, 当  $x_0y_0$  平面与  $x_iy_i$  平面为共轭像面时  $B' = 0$ , 并且  $x_iy_i$  平面上像的横向放大率  $M = A'$ . 因此有

$$d_{ci} = -B/D, \quad (16)$$

$$M = A + Cd_{ci}. \quad (17)$$

于是,通过 CCD 探测的全息图获取到达 CCD 的物光场后,用经典衍射积分对物光场的像重建,根据光学系统结构确定出系统像方主面到像平面距离  $d_{hi}$ , 就能求得物光场。

对于图 1 所示实例,将波面半径为  $d_p$  的球面波照明等效于平面波照明,但物平面后方有一焦距为  $d_p$  的负透镜。  $x_0y_0$  平面到  $xy$  平面间的光学矩阵则为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_2/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/d_p & 1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

将相关参数代入(18)式得到  $A = 0.4388$ ,  $B = 1164.33 \text{ mm}$ ,  $C = -0.0006/\text{mm}$ ,  $D = 0.7896$ , 再代入(16), (17)式得  $d_{ci} = -1474.49 \text{ mm}$ ,  $M = 1.2664$ 。

将 CCD 平面的物光频谱  $\mathcal{F}\{U(x, y)\}$  代入角谱衍射公式

$$U_i(x_i, y_i) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F}[U(x, y)] \times \exp \left[ j \frac{2\pi}{\lambda} d_{ci} \sqrt{1 - (\lambda f_x)^2 - (\lambda f_y)^2} \right] \right\}, \quad (19)$$

重建的像光场强度图像如图 4(a) (图像宽度  $12.87 \text{ mm} \times 12.87 \text{ mm}$ , 取样数  $512 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$ )。

为利用(14)式重建物平面光波场,必须求出光学系统像方主面位置。由于实验系统可等价于平行光照明,但紧贴物平面有一焦距  $d_p$  的负透镜系统,在确定像方主面的位置时,可利用透镜的成像作用求出点源  $O$  的像,并将像视为平行光射入系统后系

统的像方焦点,像方主面在透镜右方的距离则为  $fd_0/(d_p+d_0-f)$ , 于是有  $h_{hi} = d_1 + d_2 + d_3 + d_{ci} - fd_0/(d_p+d_0-f)$ 。将  $M=1.2664$  及相关参数代入(14)式后获得的物光场强度图像如图 4(b)。通过比较可见,图 4(b)中图像与图 2(e)或图 2(f)有相同的尺度,即 4(a)横向尺寸的确是物光场的 1.2664 倍,像空间进行波面重建也是可行的。

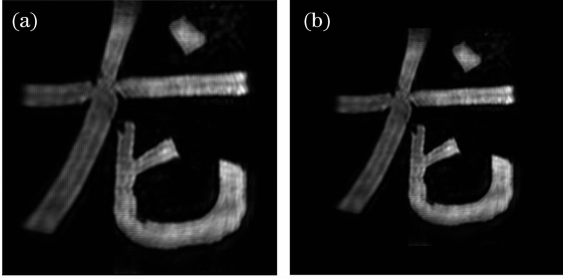


图 4 基于瑞利衍射理论的重建像光场图像

(a)和重建平面物光图像(b)

Fig. 4 Reconstructed image optic wave field (a) and object plane optic wave field (b) image based on Rayleigh diffraction theory

对于本研究实例,比较两种方法重建物光场强度图像可见,它们重建光波场的质量没有本质的区别。

从较严格的理论意义上,两种波面重建方法是有区别的。如果能够准确表述物光通过光学系统时每一光学元件对光波场的振幅及相位的变换作用,角谱衍射公式逆向追迹能获得更接近实际的物光场。相较而言,像空间波面重建算法基于理想的物像关系,是在无衍射受限的理想光学系统前提下导出的。因此,为提高波面重建质量,还有必要对两种方法进行更深入的研究。应该指出,波面重建包含振幅及相位的准确重建,在满足取样定理的前提下物光场相位可以准确重建。

## 4 讨论与结论

通过对角谱衍射公式及其快速傅里叶变换计算研究,提出了在数字全息研究中物光通过光学系统到达 CCD 时波面重建的两种方法,并给出了实验证明。由于基尔霍夫公式及瑞利-索末菲公式及其逆运算也能使用快速傅里叶变换计算,本文的波面重建计算原则上也能用这两个公式进行。然而,这两个公式遵循的是另外的取样条件。通常情况下,利用角谱衍射公式可以使用较少的取样数完成同等条件的计算。

由于物光通过介质空间直接到达 CCD 的过程可以视为物光通过一简单光学系统的过程,且角谱衍射公式是标量衍射的准确解,菲涅尔衍射积分也是

角谱衍射公式的傍轴近似,相较于常用的菲涅尔衍射积分波面重建方法,所做的工作对提高数字全息波面重建质量的研究提供了有益的参考。

## 参 考 文 献

- 1 Kreis Thomas M. Frequency analysis of digital holography with reconstruction by convolution[J]. *Opt. Eng.*, 2002, **41**(8): 1829~1839
- 2 Liu Cheng, Li Yinzhu, Li Liangyu *et al.*. A new way to eliminate the zero-order image in digital holography[J]. *Chin. J. Lasers*, 2001, **A28**(11): 1024~1026  
刘 诚,李银柱,李良钰等. 数字全息测量技术中消除零级衍射像的方法[J]. *中国激光*, 2001, **A28**(11): 1024~1026
- 3 Xiaoxu Lü, Yimo Zhang. Fourier algorithm method for reconstruction of large-aperture digital holograms based on phase compensation[J]. *Opt. Lett.*, 2004, **29**(6): 614~616
- 4 Luo Peng, Lü Xiaoxu, Zhong Liyun. Recording and reconstruction of near-distance digital holography[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(10): 1735~1739  
罗 鹏,吕晓旭,钟丽云. 近距离数字全息和再现问题[J]. *光学学报*, 2007, **27**(10): 1735~1739
- 5 Lü Qieni, Ge Baozhen, Zhang Yimo. An experimental method of eliminating zero-order diffraction in digital off-axis holography[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(3): 1014~1017  
吕且妮,葛宝臻,张以谟. 一种消除数字离轴全息零级像的实验方法[J]. *光子学报*, 2004, **33**(3): 1014~1017
- 6 Xu Ying, Zhao Jianlin, Fan Qi *et al.*. Determination of the poisson's ratio of material by digital holographic interferometry[J]. *Chin. J. Lasers*, 2005, **32**(6): 787~790  
徐 莹,赵建林,范 琦等. 利用数字全息干涉术测定材料的泊松比[J]. *中国激光*, 2005, **32**(6): 787~790
- 7 Li Junchang, Fan Zebin, Peng Zujie. Application research on digital holography zoom system[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, **37**(7): 1420~1424  
李俊昌,樊则宾,彭祖杰. 数字全息变焦系统的研究及应用[J]. *光子学报*, 2008, **37**(7): 1420~1424
- 8 Liu Zhiwen, Centurion Martin, Panotopoulos George *et al.*. Holographic recording of fast events on a CCD camera[J]. *Opt. Lett.*, 2002, **27**(1): 22~24
- 9 翟宏琛,王晓雷,母国光. 记录飞秒级超快瞬态过程的脉冲数字全息技术[J]. *激光与光电子学进展*, 2007, **44**(2): 19
- 10 Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*[M]. Third edition. Qin Kecheng *et al.* trans. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2006: 59~65  
Joseph W. Goodman. *傅里叶光学导论*[M]. 第 3 版, 秦克诚等译, 北京: 电子工业出版社, 2006. 59~65
- 11 Junchang Li, Zujie Peng, Yunchang Fu. Diffraction transfer function and its calculation of classic diffraction formula[J]. *Opt. Commun.*, 2007, **208**(2): 243~248
- 12 D. Mas, J. Pérez, C. Hernández *et al.*. Fast numerical calculation of fresnel patterns in convergent systems[J]. *Opt. Commun.*, 2003, **227**(4-6): 245~258
- 13 Yimo Zhang, Qieni Lü, Baozhen Ge. Elimination of zero-order diffraction in digital off-axis holography[J]. *Opt. Commun.*, 2004, **240**(4-6): 261~267
- 14 Li Junchang. *Laser Diffraction and Heat Effect Calculation (Revised edition)*[M]. Beijing: Science Press, 2008. 85, 50  
李俊昌. *激光的衍射及热作用计算(修订版)*[M]. 北京: 科学出版社, 2008. 85, 50