

# 根据远场光斑确定夏克-哈特曼传感器 采样率的一种方法

陈红丽<sup>1,2</sup> 饶长辉<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209; <sup>2</sup> 中国科学院研究生院, 北京 100039)

**摘要** 提出了一种利用夏克-哈特曼波前传感器测量未知波前时确定其子孔径数目的新方法。首先将被测波前相位用傅里叶级数展开表示, 然后对展开表达式的复振幅进行贝塞尔展开, 并对它进行傅里叶变换计算出其远场光斑分布。分析表明, 波前相位频谱分量与远场光斑形态存在某种相互对应的关系, 可根据采样定理通过远场光斑的分布界限确定出夏克-哈特曼波前传感器的采样率。该方法为夏克-哈特曼传感器对未知波前进行测量时其子孔径数目的确定提供了理论依据, 有效避免了夏克-哈特曼传感器由于采样率不足而造成精度下降的问题, 结束了在确定夏克-哈特曼波前传感器的子孔径数目时只依靠经验的状态。

**关键词** 自适应光学; 空间采样率; 傅里叶变换; 夏克-哈特曼波前传感器; 采样定理

**中图分类号** O438.2      **文献标识码** A      **doi**: 10.3788/AOS20092905.1137

## A Method on the Decision of Resolution of Shack-Hartman Sensor According to Far-field Spot

Chen Hongli<sup>1,2</sup> Rao Changhui<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China)  
(<sup>2</sup> Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

**Abstract** A method on how to decide the resolution of Shack-Hartmann sensor when it is used to measure an unknown incident wavefront is presented. The phase of incident wavefront can be according to Fourier progression, the complex amplitude of incident wavefront can be expanded according to Bessel progression, and then the distribution of intensity of far-field spot can be got through Fourier transform. The results indicate that the phase spectrum of incident wavefront have affiliation with the distribution of intensity of far-field spot. The resolution of Shack-Hartmann sensor can be decided through measuring the distribution of intensity of far-field spot. This method provides the theoretic support on the decision of the number of sub-aperture of Shack-Hartmann sensor. So the problem of the decrease in accuracy of Shack-Hartman sensor because of the lack of sub-apertures can be solved.

**Key words** adaptive optics; spatial sampling rate; Fourier transform; Shack-Hartmann wavefront sensor; sampling theorem

## 1 引 言

波前传感器是自适应光学和光学测量等领域的一个重要技术<sup>[1~5]</sup>。现存波前测量的方法有: 干涉仪技术、哈特曼波前测量技术以及曲率测量技术<sup>[6]</sup>。其中夏克-哈特曼波前测量技术和干涉仪技术是最为常用的。二者在性能上各有千秋, 常常需要根据

实际情况来选择波前测量方法。和干涉仪相比, 夏克-哈特曼波前传感器有很多优越之处, 例如: 由于事先用一束高质量的参考光标定, 从而在现场测量时无需参考光, 这使得对环境的要求不如干涉仪那么苛刻。由于事先用参考光标定, 可以使得被测量对象以外的光学元件引入的波前像差自动抵消<sup>[6]</sup>;

**收稿日期**: 2008-07-18; **收到修改稿日期**: 2008-10-20

**基金项目**: 国家 863 计划(2008AA02Z422)资助课题。

**作者简介**: 陈红丽(1979-)女, 博士研究生, 主要从事波前探测方面的研究。E-mail: aabb\_8@163.com

**导师简介**: 饶长辉(1971-)男, 研究员, 博士生导师, 主要从事波前探测方面的研究。E-mail: chrao@ioe.ac.cn

另外由于结构简单,没有运动部件,加上距离选通的门控措施,可以对重复率脉冲进行探测,因而在连续或脉冲光方式下都可以工作。并且它使用成本低<sup>[7]</sup>。在文献[8]中列举夏克-哈特曼波前传感器和 Twyman-Green 干涉仪测量结果相媲美,甚至在 Twyman-Green 干涉仪无法测量的情况下夏克-哈特曼波前传感器也能得到较好的结果的事例。和干涉仪比较夏克-哈特曼波前传感器也有一些不足。干涉仪具有很高的空间分辨率和测量精度,在要求高空间分辨率的情况下,夏克-哈特曼波前传感器测量精度远远不如干涉仪<sup>[9]</sup>。在很多大型激光系统中,需要高质量的脉冲激光光束,因此对于激光波前像差的精密测量显得尤为重要<sup>[9]</sup>。但是由于对大孔径的波前进行测量时,缩束比很大,光束在空间的传播距离长,外界振动,空气的扰动等因素都会对测量精度有很大的影响,这时候很难达到干涉仪要求的环境标准,并且,干涉仪成本较高。另外,在实际测量中,被测的像差一般具有有限的空间频率带宽,往往并不要求波前传感器具备太高的空间分辨率。在这种情况下,使用干涉仪往往发挥不出高分辨率的优势。而夏克-哈特曼波前传感器成为更好的选择。文献[10]详细研究了  $64 \times 64$  子孔径夏克-哈特曼传感器与 Fizeau 移相干涉仪波前测量精度比较,结果表明  $64 \times 64$  子孔径空间分辨率的夏克-哈特曼传感器,其测量精度与干涉仪相当,并在大口径光学测量和激光光束诊断方面有更多的优点。

对于一个待测量的波前,它所具有的空间频率带宽界限是未知的。在采用哈特曼传感器进行波前测量时,其子孔径数的确定始终是个困难。目前最常用的方法是,对于一待测波前,根据经验,确定夏克-哈特曼波前传感器子孔径数进行空间采样,然后进行波前复原,如果复原精度不够,则增加子孔径数,再进行波面复原,重复这个过程一直到复原精度不再随着子孔径数目的增加而明显提高,这种方法费时又费力。文献[11]中 Neal 就是采用此方法给出了测量一个特定的波前夏克-哈特曼波前传感器的最佳子孔径数目。到目前为止文献中还没有报导过反映采样率和探测精度关系的解析表达式,因为这个关系和入射波的具体形状有关<sup>[12]</sup>。如果能给出一个对于任何一个未知待测波前夏克-哈特曼波前传感器所需子孔径数目的简单而又适用的方法就显得迫切需要并且意义重大。本文中的方法就是在这种需要的前提下提出来的。

通过理论分析发现,波前空间频率分布与其远场光斑范围之间存在相互联系。基于对这种相互联系的认识,本文提出了确定未知波前空间频带上限的方法。首先将待测量波前聚焦,然后测量其焦斑范围并估算出波前空间频率上限。在波前空间频率上限确定的情况下根据采样定理确定出夏克-哈特曼传感器的子孔径数目,这样就可以避免由于采样率不足而造成的精度下降的问题,并且简单易行。

## 2 波前空间频率和其远场光斑分布的关系

为了分析方便,先将波前简化为一维,即为  $f(x)$ 。可以用傅里叶三角级数展开表示为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nkx + \varphi_n) \quad (1)$$

式中  $k$  为基波角频率,  $\varphi_n$  为  $n$  次谐波初始相位,  $A_n$  为  $n$  次谐波分量振幅。将波长归一化,则该光波复振幅表示为

$$\begin{aligned} \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}f(x)\right] &= \\ \exp\left\{\frac{i2\pi}{\lambda}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nkx + \varphi_n)\right]\right\} &= \\ \exp\left(\frac{i2\pi}{\lambda}\frac{a_0}{2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda}A_n \cos(nkx + \varphi_n)\right]. \end{aligned} \quad (2)$$

### 2.1 单一空间频率波前分析

假设波前只具有第  $n$  次谐波分量  $f_n(x) = A_n \cos(nkx + \varphi_n)$ , 则其幅度谱为:  $|\mathcal{F}(f_n(x))| = |A_n| \pi [\delta(\omega - nk) + \delta(\omega + nk)]$ , 如图 1(a) 所示。将该单一频率波前的光波复振幅进行贝塞尔展开<sup>[13]</sup>, 展开的数学推导过程见附录:

$$\begin{aligned} \exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda}A_n \cos(nkx + \varphi_n)\right] &= \\ \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm} \cos m(nkx + \varphi_n) &= \\ \alpha_{nm} = 2\varepsilon_m i^m J_m(2\pi A_n) & \end{aligned} \quad (3)$$

$\varepsilon_0 = 1 \quad \varepsilon_m = 2 \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots)$ , 如果将该光波复振幅进行傅里叶变换就可以得到其远场光斑分布:

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{F}\left\{\exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda}A_n \cos(nkx + \varphi_n)\right]\right\} \right|^2 &= \\ \left| \mathcal{F}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm} \cos m(nkx + \varphi_n)\right] \right|^2 &= \end{aligned}$$

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mm} [\exp(im\varphi_1) \pi\delta(\omega - mnk) + \exp(-im\varphi_1) \pi\delta(\omega + mnk)] \right|^2 = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{mm} [\exp(im\varphi_1) \pi\delta(\omega - mnk)] \right|^2 = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{mm}^2 \pi\delta(\omega - mnk) \right|^2, \quad (4)$$

上式即为该频率波前光波的远场光斑分布。可以观察到远场光斑是以  $nk$  为周期延展, 而该周期正好是波前频率。通常实际的波前的幅度较小, 从而导致贝塞尔函数随  $m$  增大而迅速下降, 即远场光斑的旁瓣迅速衰减, 如图 1(b) 所示。

### 2.2 多空间频率波前分析

实际波前往往是各种空间频率成分叠加而成, 如(1)式所示; 其光波复振幅如(2)所示, 与 2.1 过程类似, 将该光波复振幅进行贝塞尔展开为

$$\exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} f(x)\right] = \exp\left\{ \frac{i2\pi}{\lambda} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nkx + \varphi_n) \right] \right\} =$$

$$\exp\left(\frac{i2\pi}{\lambda} \frac{a_0}{2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda} A_n \cos(nkx + \varphi_n)\right] = \exp\left(\frac{i2\pi}{\lambda} \frac{a_0}{2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm} \cos m(nkx + \varphi_n) \right], \quad (5)$$

其中,  $\alpha_{nm} = 2\epsilon_m i^m J_m\left(\frac{2\pi}{\lambda} A_n\right)$ ,  $\epsilon_0 = 1$ ,  $\epsilon_m = 2$ , ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ )。

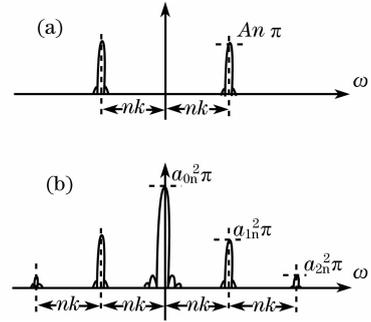


图 1 波前空间频率和其远场关系。(a) 第  $n$  次谐波分量的幅度谱, (b) 第  $n$  次谐波分量的远场光斑。

Fig. 1 Relation between the spatial frequency of wavefront and its far-field distribution. (a) the amplitude of the  $n$ th harmonic component; (b) the far-field spot of the  $n$ th harmonic component.

其远场光斑表达式如下:

$$\left| \mathcal{F}_T \left\{ \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} f(x)\right] \right\} \right|^2 = \left| \mathcal{F}_T \left\{ \exp\left(\frac{i2\pi}{\lambda} \frac{a_0}{2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left[\frac{i2\pi}{\lambda} A_n \cos(nkx + \varphi_n)\right] \right\} \right|^2 = \left| \mathcal{F}_T \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm} \cos m(nkx + \varphi_n) \right] \right] \right|^2 = \left| \mathcal{F}_T \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{m1} \cos m(kx + \varphi_1) \right] \times \mathcal{F}_T \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{m2} \cos m(2kx + \varphi_2) \right] \times \dots \times \mathcal{F}_T \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn} \cos m(nkx + \varphi_n) \right] \right|^2 = \left| \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{m1} \exp(im\varphi_1) \pi\delta(\omega - mk) \right] \times \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{m2} \exp(im\varphi_2) \pi\delta(\omega - 2mk) \right] \times \dots \times \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{mn} \exp(im\varphi_n) \pi\delta(\omega - mnk) \right] \right|^2. \quad (6)$$

上式表明: 波前各个空间频率分量对应的远场相互卷积, 就是波前对应的光波远场。波前远场光斑覆盖范围大于波前空间频带。当波前各个空间频率分量振幅较小时, 各个频率分量对应的远场次旁瓣衰减迅速, 因为卷积具有平滑作用, 相互之间卷积后波前远场光斑覆盖范围略大于波前空间频带。因此可以将波前远场分布范围作为估计光波最高空间频谱成份的依据。

## 3 确定夏克-哈特曼子孔径数目的具体过程

### 3.1 对待测波前聚焦, 产生远场光斑

假设被测波前直径为  $D$ , 光波波长为  $\lambda$ , 通过傅

里叶变换光路(图 2)即可产生远场光斑。

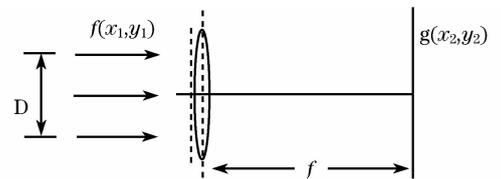


图 2 傅里叶变换光路

Fig. 2 Diagram of optical path obtained by Fourier transform

### 3.2 测量焦斑范围并估算波前空间频率上限

由前面分析可以知道把波前远场的分布作为光波最高空间频谱成分, 实际情况往往是这个标准略大于光波的最高空间频谱成分。故波前的远场分布的范围可以作为波前空间频率的上限。

### 3.3 确定哈特曼的子孔径数目

#### 3.3.1 采样定理(奈魁斯特定理)<sup>[14]</sup>

能由抽样值还原原函数的条件:

① 被还原的函数  $g(x, y)$  为限带函数, 即其频谱仅在频率平面上一个有限区域  $R$  上不为零。

② 在  $x, y$  方向上抽样点最大允许的间隔分别为  $\frac{1}{2B_x}, \frac{1}{2B_y}$ 。其中  $2B_x, 2B_y$  为包围有限区域  $R$  的最小矩形在  $f_x, f_y$  方向上的宽度。

采样定理告诉我们一个重要的结论: 一个连续的限带函数可以由其离散的抽样序列来代替, 而并不丢失任何信息。换句话说, 这个连续函数具有的信息内容等效于一些离散的信息抽样。采样定理指出了重新产生原函数所必须的离散值的最低数目。

#### 3.3.2 根据采样定理确定子孔径的数目

严格来说频带有限在物理上并不存在。在本文中提到的光分布, 仅存在于有限的空间范围内, 属于非周期函数, 其频率范围可能扩展到无穷。但是这些函数的频谱随着频率高到一定的程度, 总是大大的减小的, 大部分能量总是由一定频率范围内的分量所携带。这样我们就可以把它近似看作限带函数, 而忽略高频分量引入的误差。

函数在空域  $|x| \leq X, |y| \leq Y$  的区间上抽样数目最少应该为

$$\left(\frac{2X}{1/2B_x}\right)\left(\frac{2Y}{1/2B_y}\right) = (4XY)(4B_x B_y), \quad (7)$$

其中,  $4XY$  为函数在空域的面积, 即入射光的口径,  $4B_x B_y$  为函数在频域上的面积。

光场的远场是通过凸透镜实现的, 将光场置于透镜的前焦面时, 在透镜的后焦面上可以得到该光场的远场。根据傅里叶光学, 光学的前焦面和后焦面上的光场分布存在傅里叶变换的关系。若前焦面光场为  $f(x_1, y_1)$ , 其傅里叶变换为<sup>[15]</sup>

$$\mathcal{F}(f_x, f_y) = \mathcal{F}[f(x_1, y_1)] = \iint f(x_1, y_1) \cdot \exp[-i2\pi(f_x x_1 + f_y y_1)] dx_1 dy_1, \quad (8)$$

则透镜后焦面光场为

$$g(x_2, y_2) = \frac{1}{i\lambda f} \mathcal{F}\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right), \quad (9)$$

这里存在空域和频域坐标变换的问题, 二者的关系为

$$f_x = \frac{x_2}{\lambda f}, \quad f_y = \frac{y_2}{\lambda f}, \quad (10)$$

其中  $\lambda$  为光波长,  $f$  为透镜焦距。  $f_x, f_y$  分别为  $x, y$  方向的采样频率。则透镜后焦面光场的坐标向量为

$$x_2 = f_x \lambda f, \quad (11)$$

通常, 远场坐标以衍射极限为单位, 本文中系统采用方形孔径, 其衍射极限为

$$M_{DL} = \frac{\lambda f}{D}, \quad (12)$$

因此, 若以衍射极限作为远场坐标的单位, 则远场坐标向量变为

$$x_{DL} = \frac{x_2}{M_{DL}} = \frac{f_x \lambda f}{\lambda f / D} = f_x D. \quad (13)$$

在使用计算机进行傅里叶变换运算时, 不能对连续信号进行变换或反变换。如果对连续信号进行采样, 再对离散后信号进行离散傅里叶变化, 则可以得到离散的频谱函数。对连续的光场在一个二维网格进行采样, 如果空域采样周期为  $T$ , 采样点数为  $N$ , 则  $W = NT = 1/f_F$ , 其中  $f_F$  是输入连续光场的频率分辨率, 即频域采样中两相邻点间的频率间隔。为了增加数字分辨率一般要进行补零处理, 如果把原采样点数扩充为原采样点数的  $p$  倍, 远场的范围占有  $L$  个单元格, 则以衍射极限为单位远场的范围为

$$n = L \times \frac{1}{(D/N)pN} \times D = \frac{L}{p}, \quad (14)$$

则此远场光斑范围对应的频域范围为:  $\Delta f_x = \frac{\Delta x}{\lambda f} =$

$\frac{n_x}{D}, \Delta f_y = \frac{\Delta y}{\lambda f} = \frac{n_y}{D}$  代入(7), 可以知道当入射波面的

远场光斑范围为  $n$  倍衍射极限时, 若要完整还原波面所需子孔径数目不能少于

$$\left(\frac{2X}{1/2B_x}\right)\left(\frac{2Y}{1/2B_y}\right) = (4XY)(4B_x B_y) = n_x n_y. \quad (15)$$

## 4 仿真结果

假设透镜阵列是方形的, 并且下文中所提到的子孔径数目均指一个方向上的子孔径数目。分别以单一像差和组合像差为例来验证公式(15)的正确性。在验证的时候有两个标准, 分别是:

(a) 如果夏克-哈特曼波前传感器采用模式法复原波面, 对于一个由  $N$  阶 Zernike 多项式构成的入射波前,  $m$  个子孔径要建立  $2m$  个方程, 必须满足  $N \leq 2m$  时才是超定方程组, 即子孔径数目必须满足:  $m \geq N/2$ 。

(b) 最为常用的方法, 即变化子孔径数目, 观察波前重构精度和子孔径数目的关系, 当重构精度不再随子孔径数目增加有明显变化时, 此时的子孔径数目就是所需的子孔径数目。

### 4.1 单一像差仿真

单一像差以离焦为例,根据条件(a)对于离焦  $N=4$ ,故所需的子孔径数目不能小于 2。图 3 是根据标准(b)得到的,它反映离焦波面重构精度和子孔径数目的关系,从图中可以看出,子孔径数目大于 12 时复原精度已经很高 ( $N_{sub}=12$ , 重构精度为 0.0046)。其中波前重构精度为残余波前相位均方根值和原始波前相位均方根值的比值。

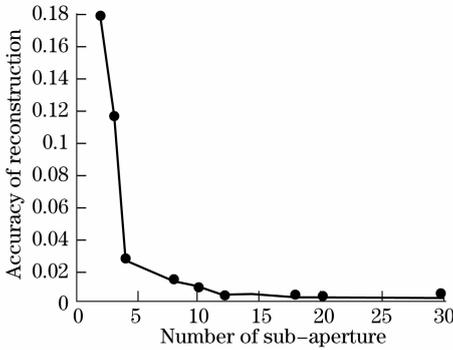


图 3 离焦像差子孔径数目和波前复原精度之间的关系  
Fig. 3 Relation between the number of sub-apertures and the accuracy of reconstruction for defocus

图 4 是离焦像差的远场光斑分布图。波面的远场可能是扩展到无穷的,但是大部分能量都是集中在有限范围内,随着范围的增大,能量总是大大的减小的,以致舍去有限范围外的能量所引入的误差也是可以容许的。如图 4 远场的主要能量主要集中在 548~608,分别截取能量的 80% (557~602),截取能量的 85% (555~604) 截取能量的 90% (551~606)。在仿真中,进行补零处理时,使采样点数扩充为原来的 4 倍,故当截取远场光斑能量分别为 80%、85%、90% 光斑的范围为 11.5, 12.5, 14 倍的衍射极限,根据(15)式,要完整的复原该波面,采样点个数(子透镜的数目)至少为:  $12 \times 12$ ,  $13 \times 13$ ,  $14 \times 14$ 。可以看出(15)式得到的结果是满足上述的

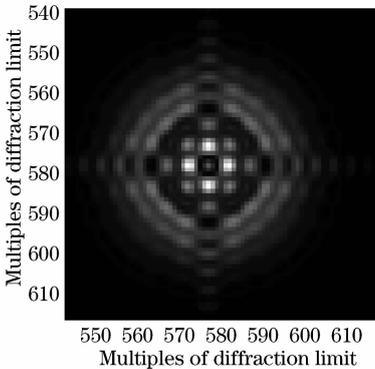


图 4 离焦像差的远场光斑  
Fig. 4 Far-field spot of defocus

两个条件的,截取能量的范围视系统所要求的复原精度来定。

### 4.2 组合像差仿真

组合像差以前 20 阶组合像差为例,根据条件(a),所需最小子孔径数目为 10。图 5 是前 20 阶组合像差的波面图。图 6 由标准(b)得到的,它反映组合像差波面重构精度和子孔径数目的关系,从图 6 可以看出,子孔径数目大于 28 时复原精度已经很高 ( $N_{sub}=28$ , 重构精度为 0.0058)。图 7 是前 20 阶组合像差波面的远场光斑分布图。截取能量的 80% (533~638),截取能量的 85% (520~631),截取能量的 90% (520~651) 光斑的范围分别为 26.5, 33, 46.5 倍的衍射极限。根据(15),要完整的复原该波面,采样点个数(子透镜的数目)至少为:  $27 \times 27$ ,  $33 \times 33$ ,  $47 \times 47$ 。仿真结果可以看出(15)得到的结果对于复合像差也是成立的,截取能量的范围视系统所要求的复原精度来定。

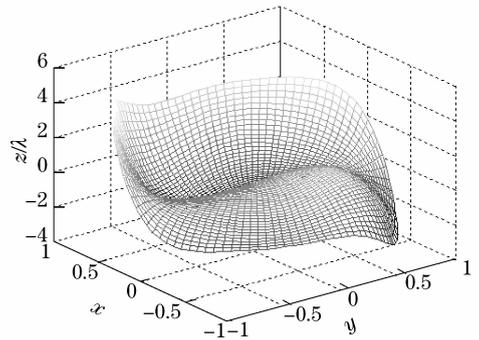


图 5 前 20 阶 Zernike 多项式生成的组合像差波面  
Fig. 5 Wavefront of combinatorial aberration generated by first 20 orders of Zernike polynomial

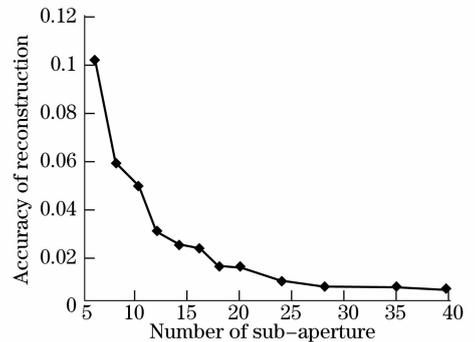


图 6 前 20 阶 Zernike 多项式生成的组合像差子孔径数目和波前复原精度的关系  
Fig. 6 Relation between the number of sub-apertures and the accuracy of reconstruction for combinatorial aberration generated by first 20 orders of Zernike polynomial

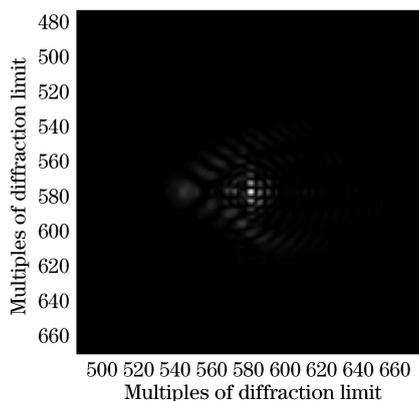


图7 前20阶 Zernike 多项式生成的组合像差波面的远场光斑分布

Fig.7 Far-field spot of combinatorial aberration generated by first 20 orders of Zernike polynomial

## 5 结 论

该方法给出利用夏克-哈特曼波前传感器测量未知波前时,如何确定其子孔径数目,并仿真验证。为夏克-哈特曼传感器合理子孔径数的确定提供了理论依据,使得确定夏克-哈特曼波前传感器的空间采样率不再单纯依靠经验,并且该方法和现存的方法相比要简单易行,利用它可以有效避免由于采样不足而造成的夏克-哈特曼波前传感器测量精度降低的问题。

**致谢:**感谢中国科学院光电技术研究所的姜文汉院士对本文的修改,另外作者就论文有关问题与教明武、李华强、樊志华、马小焯、黄林海等人进行了有益的讨论,在此一并向他们表示感谢。

## 参 考 文 献

- 1 Ang Zhang, Changhui Rao, Yudong Zhang *et al.*. Performance analysis of Shack-Hartmann wavefront sensor with variable subaperture pixels[C]. *Proc. SPIE*, 2004, **5490**: 1268~1277
- 2 Li Min, Li Xinyang, Jiang Wenhan. Experimental comparison between linear phase retrieval sensor and Hartmann wavefront sensor[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(4): 619~625  
李敏,李新阳,姜文汉. 线性相位反演传感器与哈特曼传感器的实验研究对比[J]. *光学学报*, 2008, **28**(4): 619~625
- 3 Yu Xiang, Rao Xuejun, Xun Lixia *et al.*. Dynamic aberration measuring instrument inducing human eye accommodation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(7): 1198~1204  
余翔,饶学军,薛丽霞等. 可诱导人眼自主调节的动态像差测量仪[J]. *光学学报*, 2007, **27**(7): 1198~1204
- 4 Hu Xinqi, Yu Xin, Zhao Dazun. Influence of scene structure and noise on precision of correlating Hartmann-Shack wavefront sensing[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(8): 1414~1418  
胡新奇,俞信,赵达尊. 目标图像结构和噪声对相关哈特曼-夏克波前传感器精度的影响[J]. *光学学报*, 2007, **27**(8): 1414~1418

- 5 Xie Wenke, Jiang Zongfu. Real-time wavefront construction approach based on proper orthogonal decomposition basis function [J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34**(3): 327~330  
谢文科,姜宗福. 基于本征正交分解基的实时波前重构方法[J]. *中国激光*, 2007, **34**(3): 327~330
- 6 S.-H. Baik, S.-K. Park, C.-J. Kim *et al.*. A center detection algorithm for Shack-Hartmann wavefront sensor[J]. *Optics and Laser Technology*, 2007, **39**: 262~267
- 7 Jiang Wenhan. Adaptive optics techniques investigations in institute of optics and electronics [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 1995, **22**(1): 1~13  
姜文汉. 光电技术研究所的自适应光学技术[J]. *光电工程*, 1995, **22**(1): 1~13
- 8 J. Pfund, N. Lindlein and J. Schwider. Absolute sphericity measurement: a comparative study of the use of interferometry and a Shack-Hartmann sensor[J]. *Opt. Lett.*, 1998, **23**(10): 742~744
- 9 Wenhan Jiang, Xuejun Rao, Ning Ling *et al.*. Laser wavefront measurement of ICF amplifiers using Hartmann-Shack wavefront sensor[C]. *Proc. SPIE*, 2000, **4124**: 148~157
- 10 J. A. Koch, R. W. Prestra, R. A. Sacks *et al.*. Experimental comparison of a Shack-Hartmann sensor and a phase-shifting interferometer for large-optics metrology applications[J]. *Appl. Opt.*, 2000, **39**(25): 4540~4546
- 11 D. R. Neal, J. Copland, D. Neal. Shack-Hartmann wavefront sensor precision and accuracy[J]. *Proc. SPIE*, 2002, **4779**: 148~160
- 12 C. Curatu, G. Curatu, J. Rolland. Fundamental and specific steps in Shack-Hartmann wavefront sensor design [C]. *Proc. SPIE*, 2006, **6288**: 628801
- 13 Department of Mathematics in Sichuan University. *Higher Mathematics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2005. 360~361  
四川大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005. 360~361
- 14 Lü Naiguang. *Fourier Optics* [M]. Beijing: China Machine Press, 1987. 48~52  
吕乃光. 傅里叶光学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1987. 48~52
- 15 Su Xianyu, Li Jitao. *Information Optics* [M]. Beijing: Science Press, 1999. 51~52  
苏显渝,李继陶. 信息光学[M]. 北京: 科学出版社, 1999. 51~52

## 附 录

对光波复振幅进行贝塞尔展开的数学推导过程如下:  
由于贝塞尔的母函数为

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n,$$

如令

$$z = \text{iexp}(i\theta),$$

因为

$$\cos\theta = [\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)]/2,$$

则

$$\exp(\text{i}x\cos\theta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \text{i}^n J_n(x) \cos n\theta,$$

所以可以得到

$$\begin{aligned} \exp\left[\text{i} \frac{2\pi}{\lambda} f(x)\right] &= \exp\left\{\frac{\text{i}2\pi}{\lambda} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nkx + \varphi_n)\right]\right\} = \\ &= \exp\left(\frac{\text{i}2\pi}{\lambda} \frac{a_0}{2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left[\frac{\text{i}2\pi}{\lambda} A_n \cos(nkx + \varphi_n)\right] = \\ &= \exp\left(\frac{\text{i}2\pi}{\lambda} \frac{a_0}{2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm} \cos m(nkx + \varphi_n)\right], \end{aligned}$$

其中,  $\alpha_{nm} = 2\epsilon_n \text{i}^m J_m(2\pi A_n)$ ,  $\epsilon_0 = 1$ ,  $\epsilon_m = 2$ , ( $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ).