第 29 卷 第 4 期
2009 年 4 月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 29, No. 4
April, 2009

文章编号：0253-2239(2009)04-1101-04

研究热相干态的 Wigner 函数

王 帅

（菏泽学院物理系，山东 菏泽 274015）

摘要 利用相干态表象下的 Wigner 算符和有序算符内的积分(IWOP)技术，首先得到了热相干态(量子纯态)的 Wigner 函数；同时借助相干态表象和算符的正规乘积形式给出了相应混合态的 Wigner 函数。结果表明，热相干态与相应混合态的 Wigner 函数是相一致的，支持了热场动力学(TFD)理论，且采用相干态表象下的 Wigner 算符、IWOP 技术和算符的正规乘积形式来研究量子态的 Wigner 函数非常简捷方便。研究结果加深了人们对量子统计中相空间技术和热场动力学(TFD)理论的认识，且对于其它量子纯态与相应混合态相空间分布函数一致性的研究具有很好的理论指导意义。

关键词 量子光学；相空间分布函数；热相干态；有序算符内的积分技术

中图分类号 O413.2 **文献标识码** A **doi**：10.3788/AOS20092904.1101

Wigner Functions of Thermal Coherent State

Wang Shuai

(*Department of Physics*, *Heze College*, *Heze Shandong* 274015, *China*)

Abstract Using the Wigner operator in coherent state representation and the technique of integration within an ordered product of operators (IWOP), the Wigner function of the thermal coherent state was obtained. By adopting the coherent state representation and normal product form of operators, the Wigner function of the corresponding mixed states was obtained too. It is found that the Wigner function of the thermal coherent state agrees with that of the corresponding mixed states, which support the thermofield dynamics laws. And it is convenient to study the Wigner functions of quantum states by the coherent state representation, IWOP technique and normal product form of operators. The results provide further new insights into the phase space technology of quantum statistics and thermo field dynamics, and have certain theoretical guidance meaning for studying other quantum phase-space distribution functions.

Key words quantum optics; phase-space distribution function; thermal coherent state; integration within an ordered product technique (IWOP)

1 引 言

在量子相空间理论中，分布函数是量子统计[1]与量子光学[2]等领域的重要课题。尤其是 Wigner 准概率分布函数，是量子相空间理论的奠基性工作，也是实际应用中主要的工具之一。通常 Wigner 函数通过量子态的密度矩阵来定义[3]，而密度矩阵包含了系统量子态的概率分布及相位等信息，因而 Wigner 函数与密度矩阵一样包含了该量子态在整个相空间演化过程中的全部信息。通过重构和测量量子态的 Wigner 函数即可获得量子态在演化过程中的全部信息。因此，Wigner 函数的重构和测量对研究量子态演化过程具有重要意义。目前，已经提出了多种重构和测量量子态 Wigner 函数的方法[4~9]。一些典型的量子态(如真空态、压缩态、Fock 态、相干态、奇偶相干态以及双模激发压缩真空态等等)的 Wigner 函数先后得到了重构[7~12]。

以上文献所得到的 Wigner 函数对应于温度为零时的量子纯态，当量子系统处在有限温度 T 时，

收稿日期：2008-05-15；**收到修改稿日期**：2008-10-08

基金项目：菏泽学院自然科学基金(XY07WL01)资助项目。

作者简介：王 帅(1979—)，男，讲师，硕士，主要从事理论物理的教学和量子光学方面的研究。
E-mail：wangshuai197903@sohu.com

系统处于混合态。Takahashi 与 Umezawa 在 1975 年提出了热场动力学理论(TFD)，混合态可以等价于一个量子纯态，使得量子系统处于非零温度时的系综平均值可以等价地转换为对一个量子纯态的期望值[13]，并给出了热真空态的表达式。随后热相干态和热压缩态等量子纯态相继提出，并在量子统计和量子光学中得到了广泛应用[14~16]。Fan 通过利用有序算符内的积分技术(IWOP 技术)和相干态表象下的 Wigner 算符，重构了热真空态的 Wigner 分布函数，并得到了热真空态与相应混合态(能量本征态所组成的混合态)的 Wigner 函数相一致的结果[17]。文献[18]进而得到热真空态与相应混合态的 Husimi 分布函数也是相一致的结论，加深了人们对相空间理论中分布函数的认识。本文将进一步利用 IWOP 技术和相干态表象下的 Wigner 算符，重构热相干态这一量子纯态的 Wigner 函数，并借助相干态表象和算符的正规乘积形式，方便简捷地给出相应混合态的 Wigner 函数。通过比较发现热相干态与相应混合态的 Wigner 函数相同，这一研究结果自然包含了热真空态与相应混合态的 Wigner 函数相同的结论。

2 热相干态—量子纯态的 Wigner 函数

由于量子系统所处的环境温度一般不为零，系统将处于某个混合态。利用 TFD 理论，可将一个力学量的系综平均值等价地转换为对一个量子纯态的期望值，随后热真空态和热相干态等量子纯态被相继提出。目前，在量子光学和量子统计等领域中热真空态、热相干态等量子态有着重要的应用。文献[14]给出了如下热相干态的定义

$$|\gamma\rangle_{DT}=D(\gamma)|0\rangle_T,\ |0\rangle_T=T(\theta)|0\widetilde{0}\rangle, \tag{1}$$

式中$|0\rangle_T$为热真空态，$D(\gamma)=\exp(\gamma a^*-\gamma^* a)$为标准平移算符，$T(\theta)=\exp[-\theta(a\widetilde{a}-a^*\widetilde{a}^*)]$为热压缩算符。对于处在热库中的一维谐振子系统，热真空态[17]为$|0\rangle_T=(1-e^{-\beta\omega\hbar})^{1/2}\exp(e^{-\beta\omega\hbar/2}a^*\widetilde{a}^*)|0\widetilde{0}\rangle$，则相应的热相干态表达式为

$$|\gamma\rangle_{DT}=D(\gamma)|0\rangle_T=(1-e^{-\beta\omega\hbar})^{1/2}D(\gamma)\exp(e^{-\beta\omega\hbar/2}a^*\widetilde{a}^*)|0\widetilde{0}\rangle. \tag{2}$$

在文献[17]给出了在相干态表象下的 Wigner 算符为

$$\Delta_w(\alpha,\alpha^*)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2z}{\pi}|\alpha+z\rangle\langle\alpha-z|\exp(\alpha z^*-z\alpha^*). \tag{3}$$

对于任意量子纯态$|\psi\rangle$，其相应的 Wigner 函数为$\langle\psi|\Delta(\alpha,\alpha^*)|\psi\rangle$。为了重构热相干态的 Wigner 函数，引入对偶空间的相干态表象

$$|\widetilde{z}\rangle=\exp[-1/2|\widetilde{z}|^2+\widetilde{z}\widetilde{a}^*]|\widetilde{0}\rangle,\quad \widetilde{a}|\widetilde{z}\rangle=\widetilde{z}|\widetilde{z}\rangle,\quad \int\frac{d^2\widetilde{z}}{\pi}|\widetilde{z}\rangle\langle\widetilde{z}|=1. \tag{4}$$

则热相干态的 Winger 函数为

$$W_{DT}(\alpha)={}_T\langle 0|D^*(\gamma)\Delta_w(\alpha,\alpha^*)D(\gamma)|0\rangle_T. \tag{5}$$

利用以下算符公式和相干态表象

$$|0\rangle\langle 0|=:e^{-a^*a}:,\ e^ABe^{-A}=B+[A,B]+1/2[A,[A,B]]+\cdots,\ |z\rangle=\exp[-1/2|z|^2+za^*]|0\rangle \tag{6}$$

容易证明

$$D^*(\gamma)\Delta_w(\alpha,\alpha^*)D(\gamma)=\Delta_w(\alpha-\lambda,\alpha^*-\lambda^*)=\int\frac{d^2z}{\pi}|\alpha+z-\gamma\rangle\langle\alpha-z-\gamma|\exp[(\alpha-\gamma)z^*-z(\alpha^*-\lambda^*)] \tag{7}$$

代入式(5)，并利用对偶空间相干态表象的完备性，可以得到

$$W_{DT}(\alpha)=(1-e^{-\beta\hbar\omega})\langle 0\widetilde{0}|\exp(e^{-\beta\hbar\omega/2}a\widetilde{a})\int\frac{d^2z}{\pi}|\alpha+z-\gamma\rangle\langle\alpha-z-\gamma|\cdot \exp[(\alpha-\gamma)z^*-z(\alpha^*-\gamma^*)]\int\frac{d^2\widetilde{z}}{\pi}|\widetilde{z}\rangle\langle\widetilde{z}|\exp(e^{-\beta\hbar\omega/2}a^*\widetilde{a}^*)|0\widetilde{0}\rangle \tag{8}$$

再利用 IWOP 积分技术和以下积分公式

$$|0\widetilde{0}\rangle\langle 0\widetilde{0}|=:\exp(-a^*a-\widetilde{a}^*\widetilde{a}): \tag{9}$$

$$\int\frac{d^2z}{\pi}\exp[\lambda|z|^2+fz+gz^*]=(-1/\lambda)\exp(-fg/\lambda) \tag{10}$$

对式(8)进行积分得到

$$W_{DT}(\alpha)=\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}{1+\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}\exp\left[\frac{-2(1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega})}{1+\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}\mid\alpha-\gamma\mid^{2}\right]\tag{11}$$

这样就得到了热相干态这一量子纯态的 Wigner 函数。由式(11)可知。当平移算符 $D(\gamma)=1$，即 $\gamma=0$ 时，可以得到热真空态的 Wigner 函数，与文献[17]的结果相一致。显然当 $\gamma=0, T=0$ 时，由式(11)就可得出真空态的 Wigner 函数。文献[17,18]研究结果证明了热真空态与相应混合态的相空间分布函数是相一致的。受此启发，下面研究热相干态这一量子纯态与其相应混合态的 Wigner 函数相一致的问题。通过利用相干态表象和算符的正规乘积形式，先给出相应混合态的 Wigner 函数，再来研究量子纯态与相应混合态相空间分布函数的一致性问题。

3 混合态的 Wigner 分布函数

在有限温度 T 时，量子系统以一定的几率处于某一个量子态上，需要用一组态矢量及其概率来描述，即系统处于混合态。对于处于热平衡的系统，混合态常用与吉布斯正则分布相联系的密度矩阵来表征，其密度矩阵可表示为[19]

$$\rho_T=Z^{-1}\mathrm{e}^{-\beta H}\tag{12}$$

式中 $Z=\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H})$ 为配分函数，这时量子系统处在自由热态，由能量本征态所组成的混合态[19]。由于密度矩阵包含了量子态的概率分布及相位等信息，所以由密度矩阵 ρ 所构建的 Wigner 函数一样也包含了量子态的所有量子信息。利用算符恒等式 $\mathrm{e}^{\lambda a^{*}a}=:\exp[(\mathrm{e}^{\lambda}-1)a^{*}a]:$ 这一公式[17]，把 $\rho_T=Z^{-1}\mathrm{e}^{-\beta H}$ 化为正规乘积形式有

$$\rho_T=(1-e^{-\hbar\omega\beta}):\exp[-(1-e^{-\hbar\omega\beta})a^{*}a]:\tag{13}$$

对于热场中一维谐振子系统的哈密顿量 $H=\hbar\omega a^{*}a$。配分函数 Z 在能量本征态表象中为

$$Z=\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H})=\sum_{n=0}^{\infty}\langle n\mid\mathrm{e}^{-\beta H}\mid n\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta n}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta}}\tag{14}$$

由式(12)，可以得到与热相干态这一量子纯态相对应的混合热态的密度矩阵为[20]

$$\rho_T(\gamma)=D(\gamma)\rho_T D(\gamma)=(1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta}):\exp[-(1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})(a^{*}-\lambda^{*})(a-\gamma)]:\tag{15}$$

在相干态表象中，混合态密度矩阵的 Wigner 函数可以由下式导出

$$W_{\rho}(\alpha)=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\langle\alpha+z\mid\rho\mid\alpha-z\rangle\exp(z\alpha^{*}-\alpha z^{*})\tag{16}$$

所以式(15)所表示的密度矩阵的 Wigner 函数为

$$W_{\rho}(\alpha)=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\langle\alpha+z\mid(1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta}):\exp[-(1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})(a^{*}-\gamma^{*})(a-\gamma)]:\mid\alpha-z\rangle\exp(z\alpha^{*}-\alpha z^{*})\tag{17}$$

利用算符恒等式 $\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}=\mathrm{e}^{B}\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{[A,B]}$ 和相干态表象，经简单计算可得

$$\begin{aligned}W_{\rho}(\alpha)=&(1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\exp\{-(1+\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})\left|z\right|^{2}+\\&(1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})[(\alpha^{*}-\gamma^{*})z+(-a+\gamma)z^{*}-\left|\alpha-\gamma\right|^{2}]\}\end{aligned}\tag{18}$$

利用积分公式(10)，积分可得

$$W_{\rho}(\alpha)=\frac{1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}{1+\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}\exp[\frac{-2(1-\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega})}{1+\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}\left|\alpha-\gamma\right|^{2}]\tag{19}$$

这就是式(15)所表示的混合热态的 Wigner 函数，与文献[20]的研究结果相一致。但与应用特征函数或坐标表象计算密度矩阵的 Wigner 函数相比较，利用相干态表象和算符的正规乘积形式来计算混合态的 Wigner 函数显得非常简洁方便，这是利用相干态表象和算符正规乘积形式进行有关量子计算的优点。因此给出了计算量子混合态的 Wigner 函数一种简捷方法。

(19)式与量子纯态热相干态的 Wigner 函数(11)式相比较发现，热相干态与相应混合态的 Wigner 函数是相同的。所以，量子系统处于非零温度时的系综平均值可以等价地转换为对一个量子纯态的期望值，使得混合态可以等价于一个量子纯态，支持了热场动力学(TFD)理论。且更为重要的

是，这一研究结果自然包含了热真空态与相应混合态的 Wigner 函数相同的结论，因而与 Fan 在 1997 年所得热真空态和自由热态(混合态)的 Wigner 函数视为统一在理论上是相一致的[17]。

4 结 论

本文利用相干态表象下的 Wigner 算符和 IWOP 积分技术，首先得到了热相干态的 Wigner 函数；同时借助相干态表象和算符的正规乘积形式给出了相应混合态的 Wigner 函数。推导过程简洁易懂，体现了采用 IWOP 积分技术、相干态表象下的 Wigner 算符和算符正规乘积形式在进行量子计算时方便简捷的优点。研究结果表明，热相干态与相应混合态的 Wigner 函数完全相同，这一结论自然包含了热真空态与相应混合态 Wigner 函数相一致的结果，支持了热场动力学(TFD)理论。因此，本文研究结果进一步加深人们对量子统计中相空间技术和热场动力学(TFD)理论的认识，且对于其它量子纯态与相应混合态相空间分布函数一致性的研究具有较好的理论指导意义。

参 考 文 献

1 W. P. Schleich. *Quantum optics in phase space* [M]. Berlin: Wiley-VCH, 2001

2 R. J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field [J]. *Phys. Rev.*, 1963, **131**(6): 2766～2788

3 E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium[J]. *Phys. Rev.*, 1932, **40**(5): 749～759

4 G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, M. G. A. Paris. Detectio of the density matrix through optical homodyne tomography without filtered back projection[J]. *Phys. Rev. A*, 1994, **50**(5): 4298～4302

5 S. Wallentowitz, W. Vogel. Unbalanced homodyning for quantum state measurements [J]. *Phys. Rev. A*, 1996, **53**(6): 4528～4533

6 K. Banaszek, C. Radzewicz, K. Wodkiewicz Direct *et al.*. Measurement of the wigner function by photon counting [J]. *Phys. Rev. A*, 1999, **60**(1): 674～677

7 D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer *et al.*. Measurement of the wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography Application to squeezed states and the vacuum[J]. *Phys. Rev. A*, 1993, **70**(9): 1244～1247

8 D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King *et al.*. Experimental determination of the motional quantum state of a trapped atom [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, **77**(21): 4281～4285

9 G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi *et al.*. Measurement of a negative value for the wigner functions of radiation [J]. *Phys. Rev. A*, 2000, **62**(5) : 054101～054103

10 Meng Xiangguo, Wang Jisuo, Liang Baolong. Wigner function for the photon added even and odd coherent state[J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, **56**(4): 2160～2167
孟祥国，王继锁，梁宝龙. 增光子奇偶相干态的 Wigner 函数[J]. 物理学报, 2007, **56**(4): 2160～2167

11 Meng Xiangguo, Wang Jisuo, Liang Baolong. Wigner functions of two-mode excited squeezed vauccm states [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(9): 1070～1075
孟祥国，王继锁，梁宝龙. 双模激发压缩真空态的维格纳函数[J]. 光学学报, 2007, **27**(9): 1070～1075

12 Meng Xiangguo, Wang Jisuo, Liang Baolong. Wigner Functions and Tomogram Functions of Even and Odd Pair Coherent states [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(3): 549～555
孟祥国，王继锁，梁宝龙. 奇偶对相干态的维格纳函数和层析图函数[J]. 光学学报, 2008, **28**(3): 549～555

13 Y. Takahashi, H. Umezawa. Thermo field dynamics [J]. *Collective Phenomena*, 1975, (2): 55～80

14 H. Fearn, M. J. Collett. Representation of squeezed states with thermal noise[J]. *Journal of Modern Optics*, 1988, **35**(3): 553～564

15 Fan Hongyi, Liang Xianting. Quantum fluctuation in thermal vacuum state for mesoscopic LC electric circuit [J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2000, **17**(3): 174～176

16 Li Hongqi, Xu Xinglei, Wang Jisuo. Quantum fluctuations of current and voltage for mesoscopic quartz piezoelectric crystal at finite temperature[J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2006, **23**(11): 2892～2895

17 Fan H Y. Application of weyl-wigner method in calculating thermal averages[J]. *Commun. Theor. Phys.*, 1991, **16**(1): 123～128

18 Wang Shuai. Husimi distribution function of thermal vacuum state[J]. *Acta Quantum Optica Sinica*, 2009, **15**(1): 7～10
王 帅. 研究热真空态的 Husimi 分布函数[J]. 量子光学学报, 2009, **15**(1): 7～10

19 Department of Physics, Peking University. *Quantum Statistical Physics*[M]. Beijing: Peking University Press, 1987, **28**
北京大学物理系《量子统计物理学》编写组. 量子统计物理学[M]. 北京: 北京大学出版社, 1987, **28**

20 Wang Baigen, Zhu Jianxin. Wigner functions for coherent and squeezed states with thermal noise [J]. *Journal of Modern Optics*, 1993, **40**(10): 1917～1922