

对称分数样条小波域图像去噪研究

张大奇^{1,2} 曲仕茹¹ 李卫斌³ 何 力¹

(¹西北工业大学自动化学院, 陕西 西安 710072; ²解放军西安通信学院基础部, 陕西 西安 710106)

³西北工业大学电子信息学院, 陕西 西安 710072

摘要 根据数据平滑理论推导求解出能够使对称分数 B 样条在函数平滑性和逼近性两者之间达到最优的折衷的分数阶 $\alpha \approx 7.9$; 并通过对 BiraShrink 基于相邻层系数相关性的小波去噪模型进行改进, 得到对分数样条的阶具有自适应性的新阈值公式。试验结果能够说明所推导理论结果的正确性和所给对称分数样条小波系数阈值公式的有效性。基于分数样条小波的图像去噪算法对几何纹理较多的图像去噪效果比较理想, 像 Barbara 这种几何纹理较多的图像当噪声方差不超过 10 时, 该方法去噪后的图像客观峰值信噪比 (PSNR) 可以达到 34.9842, 而且去噪结果中较好地保留了原始图像的纹理信息。

关键词 图像处理; 分数 B 样条小波; 图像降噪; 函数平滑性; 分数阶逼近; 贝叶斯估计

中图分类号 TP391 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20092904.0907

Image Denoising Using Fractional B-Spline Wavelets Thresholding

Zhang Daqi^{1,2} Qu Shiru¹ Li Weibin³ He Li¹

¹Department of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China

²Department of Mathematics, PLA Xi'an Tongxin College, Xi'an, Shaanxi 710106, China

³Department of Electronic Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China

Abstract According to data smooth theory, the best trade-off fractional order of 7.9, which the symmetric fractional B-spline wavelets can achieve between its smoothness and approximation texture, is deduced. A new thresholding formula which has self-adaptability with the order of the fractional spline wavelet, is derived, through improving the wavelet denosing model based on biva-Shrink neighboring coefficients relevance. Fractional spline wavelet transform is a new powerful tool for removing noise and irrelevant information from denoised images. Experimental result testifies the obtained theoretic result. Compared with traditional denoising algorithms, it can achieve higher subjective and objective image qualities, especially for texture images. When the Barbara image with variance is no more than 10, the peak signal-to-noise ratio of the denoised image can reach 34.9842 and its geometric textures are well-protected after denoising by this algorithm.

Key words image processing; fractional B-spline wavelet; image denoising; function smoothness; fractional order of approximation; Bayesian estimation

1 引 言

图像去噪是图像分析和计算机视觉中最基本然而又是十分重要的技术。图像的纹理和边缘在图像配准和图像融合等应用中都是非常重要的拓扑信息。如何在图像去噪的过程中尽可能保护这些拓扑

信息是一个值得研究的课题。小波变换由于具有很多优点, 如低熵性、多分辨分析、去相关性、灵活性选取基函数等, 因而获得了极大的发展。1992 年 Mallat^[1] 提出了奇异性检测的理论, 从而可以利用小波变换模板大值的方法去噪; 1995 年 Donoho 提

收稿日期: 2008-04-30; 收到修改稿日期: 2008-07-15

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(60134010)和陕西省工业攻关项目(2008k07-14)资助课题。

作者简介: 张大奇(1976—), 男, 博士研究生, 主要从事图像处理方面的研究。E-mail: dqzhang2005@yahoo.com.cn

导师简介: 曲仕茹(1963—), 女, 教授, 博士生导师, 主要从事图像处理和模式识别等方面的研究。

E-mail: shiruru@nwpu.edu.cn

出了非线性小波变换阈值去噪算法,后人很多的工作都是在其工作的基础上,通过修改阈值来提高消噪性能和解决实际问题^[2~7]。用小波包进行消噪的过程与用小波进行消噪的过程相似,只是它的阈值处理是加在最优树结构上的。近几年来应用多小波去噪也日益成熟。Candes 和 Donoho 提出了适合表示具有方向性奇异特征的脊波变换,后来又出现的局部脊波变换和曲波变换,被应用在去噪上也取得了很好的效果^[8~10]。

分数样条小波具有分数阶逼近能力,分数样条小波的行为如同分数阶导数算子,因此分数样条小波可以很好地刻画图像纹理。1999 年 Michael Unser 与 Thierry Blu^[11,12]首次提出了分数 B 样条小波,并给出了具体的表达式、对相关性质作了证明,还推导出了基于离散傅里叶变换的分数 B 样条小波分解和重构公式。文献[13]给出了一种利用分数 B 样条对图像进行“平滑”操作的快速算法,虽然图像平滑和图像去噪在一定程度上是一致的,但是它们之间还是存在区别。文献[14]涉及的是利用分数 B 样条基进行图像融合的问题。国内外文献介绍有关基于分数样条小波变换的去噪方法仍然很少见,如果还是沿用传统小波去噪方法,就不会充分考虑分数样条基函数的特性。本文主要根据分数 B 样条函数的平滑性能和函数逼近性能揭示其图像去噪能力。

2 对称分数 B 样条与 K 阶 B 样条

α 阶对称分数 B 样条的定义^[11,12]为

$$\beta_*^\alpha(x) = \beta_+^{\alpha-1/2} \cdot \beta_-^{\alpha-1/2}, \quad (1)$$

其中 $\beta_+^\alpha(x)$ 和 $\beta_-^\alpha(x)$ 分别是 α 阶因果分数 B 样条和

α 阶反因果分数 B 样条 $\beta_+^\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \Delta_+^\alpha x_+^\alpha =$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{\alpha+1}{j} (x-j)_+^\alpha \text{ 和 } \beta_-^\alpha(x) =$$

$$\Delta_+^{\alpha+1} \left(\frac{x_-^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) = \beta_+^\alpha(-x).$$

α 阶对称分数 B 样条的傅里叶变换为

$$\hat{\beta}_*^\alpha(\omega) = \left| \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right|^{\alpha+1} = |\text{sinc}(\omega/2)|^{\alpha+1}, \quad (2)$$

该式在分布意义下总成立。

对称分数 B 样条显式时域表达式^[12]为

1) 当 $\alpha \geq -1$ 且为非偶数时

$$\beta_*^\alpha(x) = \frac{1}{2\sin(\pi\alpha/2)\Gamma(\alpha+1)} \Delta_*^\alpha x_*^\alpha =$$

$$\frac{1}{2\sin(\pi\alpha/2)\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^{j+1} \binom{\alpha+1}{j} |x-j|^\alpha, \quad (3)$$

2) 当 $\alpha = 2n$ 即为偶数时

$$\beta_*^{2n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\Gamma(2n+1)} \Delta_*^{2n} x_*^{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi n!} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^{j+1} \binom{2n+1}{j} |x-j|^{2n} \lg|x-j|, \quad (4)$$

又对 $\forall f \in W_2^{\alpha+1}$

$$\|f - P_a\|_{L^2} \leq \frac{\sqrt{2\zeta(\alpha+2)-1/2}}{\pi^{\alpha+1}} \|D^{\alpha+1}f\|_{L^2} a^{\alpha+1}, \quad (5)$$

上式中 P_a 为函数 f 在尺度为 a 的分数 B 样条空间上的投影。由逼近误差具有 $a^{\alpha+1}$ 衰减性可知分数 B 样条具有 $\alpha+1$ 分数阶逼近能力。

Schoenberg 首先引入 B 样条函数。K 阶(或 K-1 次)B 样条一种定义为

$$\beta^K(x) = \frac{1}{(K-1)!} \sum_{j=0}^K (-1)^j \binom{K}{j} (x+K/2-j)^{K-1}, \quad (6)$$

它与 $\beta_*^\alpha(x)$ 具有相同傅里叶变换

$$\hat{\beta}^K(\omega) = \left| \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right|^K = \text{sinc}^K(\omega/2). \quad (7)$$

不同的是 $\beta_*^\alpha(x)$ 的定义域为整个实数空间, $\beta^K(x)$ 的定义域为 $[-K/2, K/2]$ 。这说明对称分数 B 样条不具有紧支集而 K 阶 B 样条具有紧支集。又由不等式

$$|\beta_*^\alpha(x)| \leq \frac{K_\alpha \{[x]\}_*^\alpha + C_\alpha}{1 + |x|^{\alpha+2}}, \quad (8)$$

$(K_\alpha > 0 \text{ 和 } C_\alpha > 0)$

可知 $\beta_*^\alpha(x)$ 具有较快的衰减性^[11], 且当 $\alpha > -1$ 时, $\beta_*^\alpha(x) \in L^1$, 当 $\alpha > -1/2$ 时, $\beta_*^\alpha(x) \in L^2$ 。

3 函数平滑性和逼近性能

由数据平滑理论对平滑函数 $\theta(x)$ 的三个要求:

1) $\theta(x)$ 为偶函数, 即 $\theta(x) = \theta(-x)$; 2) 归一性, 即 $\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) dx = 1$; 3) 傅里叶变换 $\hat{\theta}(\omega)$ 满足 $|\hat{\theta}(\omega)| <$

1. 对称分数 B 样条正好满足上述要求。主要利用以下两个准则度量了对具有分数阶导数函数 $\theta(x)$ 的平滑性和函数逼近特性:

(1) 设 $y(x)$ 是具有 P 阶分数阶导数, 其平滑性能可用平滑准则 I_P 度量: $I_P(y) = \int_{-\infty}^{\infty} [D^p y(x)]^2 dx$;

(2) 设 $y(x)$ 逼近于 $f(x)$, 则其逼近程度可用逼近准则 E 度量: $E(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [y(x) - f(x)]^2 dx$.

处理目标是得到较为平滑的结果同时又尽可能的逼近原始信号 $f(x)$. 分数阶导数的傅里叶变换定义为 $\int D^p f(x) e^{-i\omega x} dx = (i\omega)^p \hat{f}(\omega)$. 设 $y(x)$ 为平滑函数 $\theta(x)$ 对 $f(x)$ 的平滑结果, 即 $y(x) = \theta(x) * f(x)$. 则由

$$I_P(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |D^p f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^{2p} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \quad (9)$$

$$I_P(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [D^p y(x)]^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^{2p} |\hat{\theta}(\omega)|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \quad (10)$$

所以, 若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^{2p} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega < \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^{2p} |\hat{\theta}(\omega)|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (11)$$

成立, 必须 $|\hat{\theta}(\omega)| < 1$; 而且 $|\hat{\theta}(\omega)|$ 越小, 平滑性能越好. 另一方面:

$$E(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [y(x) - f(x)]^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{\theta}(\omega) - 1]^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \quad (12)$$

$|\hat{\theta}(\omega)|$ 越接近 1, 逼近性能越好. 所以 $\theta(x)$ 在满足函数平滑性和逼近性上是矛盾的.

为了达到折中的效果, 若使用分数样条 $\beta_\alpha^*(x)$ 作为平滑函数, 就需要寻找阶数 $\hat{\alpha}$, 使下面泛函达到最小, 即

$$J(\hat{\alpha}) = \min_{\alpha > -1/2} \{I_P(y) + \rho E(y)\}, \quad (13)$$

其中 $\rho (\rho > 0)$ 为自由参数, 是平滑性相对于逼近性的重要程度系数. 假设所输入信号 $f(x)$ 的频谱 $\hat{f}(\omega) = 1$, 再根据对称性, 得到平滑准则 I_p 和逼近准则 $E(y)$

$$I_P(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \omega^{2p} |\hat{\beta}_\alpha^*(\omega)|^2 d\omega, \quad (14)$$

$$E(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [\hat{\beta}_\alpha^*(\omega) - 1]^2 d\omega. \quad (15)$$

显然, 当 α 增大时, 平滑性变大而逼近性变差. 将(14)式和(15)式代入(13)式, 最终等价于求解 $\hat{\alpha}$, 使下面的泛函达到最小, 即

$$J(\hat{\alpha}) = \min_{\alpha > -1/2} \int_0^{+\infty} \omega^{2p} |\hat{\beta}_\alpha^*(\omega)|^2 d\omega + \rho \int_0^{+\infty} [\hat{\beta}_\alpha^*(\omega) - 1]^2 d\omega, \quad (16)$$

将(2)式代入(16)式, 由连续函数取极值条件, 得

$$2^{\alpha+1} \int_0^{+\infty} \omega^{2(\rho-\alpha)-1} \left| \sin \frac{\omega}{2} \right|^{2\alpha+1} d\omega + 2^{\alpha+1} \rho \int_0^{+\infty} \omega^{-1-2\alpha} \left| \sin \frac{\omega}{2} \right|^{2\alpha+1} d\omega - \rho \int_0^{+\infty} \omega^{-\alpha} \left| \sin \frac{\omega}{2} \right|^\alpha d\omega = 0. \quad (17)$$

由判定广义积分收敛的比较审敛原理, 当 α 分别满足 $p \leq \alpha$ 且 $\alpha > 1$ 时, (17)式中的三个广义积分都收敛. 所以令 $p = |\alpha|$ ($|x|$ 表示对实数 x 下取整), 当 $\rho = 1$ 时, 通过数值积分方法求解(17)式, 得 $\alpha \approx 7.9$. 即当分数 B 样条的阶数为 7.9 时, 其函数“平滑”能力和逼近能力均达到最佳.

4 分数 B 样条小波图像去噪算法

去除受污染图像中的高斯白噪声, 使用小波阈值法去噪时常用的阈值法有硬、软两种阈值公式. 由于软阈值去噪既能较好地去除噪声, 又能保持较为清晰的边缘, 本文试图给出能够与分数阶相关的软阈值公式. 考虑到分数 B 样条小波系数的分布, 建立了一个能近似描述其小波系数的数学模型, 并在小波域系数处理中考虑了分数 B 样条小波分解相邻层间系数分量的相关性.

由于分数 B 样条小波系数也由大量的小数值系数和少量的大数值系数组成, 而且高频的均值基本上分布在零点附近, 所以其概率密度函数(PDF)近似服从广义高斯分布, 其 PDF 波形在零处更尖锐, 而且两翼衰减较快, 寻找能尽量逼近其小波系数的数学模型. 使用中的正常 Shrink 阈值公式^[7] $T_n = \beta \times (\sigma_n^2 / \sigma)$, 其中 $\beta = \sqrt{\lg(L_k / J)}$. 利用分数 B 样条小波变换对含噪图像 Lena 去噪时, 会产生小波系数过“扼杀”的现象, 如图 1 所示. 因此, 必须寻找其它方法来证实上节中所得到的对称分数 B 样条的良好去噪特性.



图 1 正常 Shrink 阈值的 Lena 图像去噪结果
Fig. 1 Denoised Lena image by normal Shrink thresholding

借鉴双变易收缩 (BivaShrink) 给出的去噪方法, 它方法的思想是利用两相邻尺度间系数相关性再通过最大后验概率估计最终求得对小波系数的估计值。模型中所用假定为: 相邻尺度噪声形成向量 $\mathbf{N}=(n_1, n_2)$ 服从分布的概率密度函数和小波系数向量 $\mathbf{F}=(f_1, f_2)$ 服从分布的概率密度函数分别为

$$P_N(\mathbf{N}) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{n_1^2 + n_2^2}{2\sigma_n^2}\right), \quad (18)$$

$$P_F(\mathbf{F}) = \frac{1}{2\pi\sigma_f^2} \exp\left(-\frac{3\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}{\sigma_f}\right). \quad (19)$$

通过求解满足最大后验概率估计的结果为

$$f_1 = y_1 \pm \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{\sigma_f} \sqrt{\frac{1}{1 - y_2^2/y_1^2}}, \quad (20)$$

其中 $\mathbf{Y}=(y_1, y_2)$ 为含噪信号向量。

噪声方差估计由小波去噪通用且比较有效的中值估计公式计算

$$\sigma_n = \frac{\text{Median}(|f_1|)}{0.6475}. \quad (21)$$

由于(20)式中的 \pm 选择不易确定, 所以给出了一个保守阈值策略。使用

$$f = \begin{cases} 0, & \text{if } |y| \leq T_n \\ y, & \text{others} \end{cases} \quad (22)$$

对分解后各层小波系数进行阈值化去噪。阈值 T_n 是在相邻两个尺度选择位置对应的矩形邻域窗口

W_{ij}^k (4×4 或 9×9) 内进行计算, $T_n = \beta \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{\sigma}$, 其中 β

为阈值系数,

$$\beta = \sqrt{2^\alpha} \times \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\min_{(i,j) \in W_{ij}^2} \{f_2^2(i,j)\}}{\max_{(i,j) \in W_{ij}^1} \{f_2^2(i,j)\}}}}, \quad (23)$$

$\max_{(i,j) \in W_{ij}^k} \{f_k^2(i,j)\}$ 和 $\min_{(i,j) \in W_{ij}^k} \{f_k^2(i,j)\}$ 是按绝对值求出的矩形窗口 W_{ij}^k 内小波系数的最大值和最小值。

系数 β 中 $\sqrt{2^\alpha}$ 是考虑到分数 B 样条小波系数非常依赖于分数 B 样条的阶数 α , 因为随着阶数逐层递增, 分解各层系数的最大值和方差呈递增趋势变化。图 2 显示了由 (21) 式计算出的 Lena 图像第一层对角高频系数矩阵的噪声方差随对称分数 B 样条的阶数 α 不断增大的趋势。

基于分数 B 样条小波去噪的过程可分为以下几个主要步骤:

(1) 对原始含噪图像使用阶数为 7.9 的对称分数 Battle-Lemarié 小波进行 N 层小波分解, 分数 Battle-Lemarié 小波是由分数 B 样条正交化得到的。

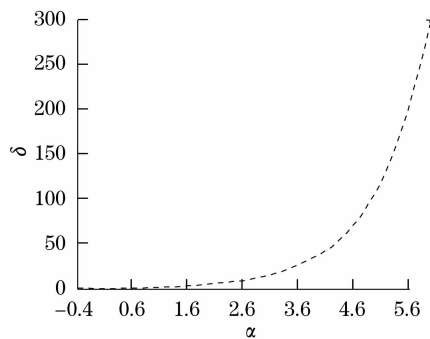


图 2 噪声均方差的变化趋势

Fig. 2 Tendency of noise variance with the order α

(2) 由第一层小波系数中 HH 高频系数矩阵估计噪声分量的方差 σ_n^2 , 公式为 $\sigma_n = \frac{\text{Median}(|f_1|)}{0.6475}$ 。

(3) 求出每个分解层小波系数方差 $\sigma_{y_k}^2$ ($k=1, 2, \dots, N$), 计算公式为 $\sigma_{y_k}^2 = \frac{1}{N^2} \sum y_k^2(i,j)$ 。

(4) 按下式求解每个分解层的小波系数方差 σ_f^2

$$\sigma_f^k = \sqrt{\sigma_{y_k}^2 - \sigma_n^2}.$$

(5) 确定阈值计算窗口 W_{ij}^k (9×9), 由下式计算每层的阈值系数

$$\beta_k = \sqrt{2^\alpha} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\min_{(i,j) \in W_{ij}^k} \{f_k^2(i,j)\}}{\max_{(i,j) \in W_{ij}^{k+1}} \{f_{k+1}^2(i,j)\}}}}}$$

(6) 计算每层小波系数的阈值 $T_k = \beta_k \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{\sigma_f^k}$,

对第 k 层小波系数 f_k 作如下估计

$$f_k = \begin{cases} 0, & \text{if } |y_k| \leq T_k \\ y_k, & \text{others} \end{cases} \quad (k=1, \dots, N).$$

5 实验结果及分析

为了充分地显示不同分数阶 B 样条小波的去噪能力, 本文选用图像处理中常用的 6 幅标准图像 {Lena, Barbara, bridge, monkey, man, bone marrow} 作为测试图像集合, 对其均加入方差 $\delta=20$ 的零均值高斯白噪声作为待降噪图像。实验中均对图像进行 3 层对称分数 B 样条小波 (分数 Battle-Lemarié 小波) 分解, 每层高频系数均使用上述小波系数估计法。利用上节所给的算法含噪标准图像进行去噪, 以图像客观质量评价指标——峰值信噪比 (PSNR) 对降噪效果进行描述, 随 B 样条函数的阶数 α 的不断增大, PSNR 值的变

化情况如图 3 所示。

由图 3 中的峰值信噪比值曲线可见,当大约在 7.9附近取值时经过去噪后的图像能够获得平滑性和逼近性俱佳的主客观图像质量,主观图像质量见图 4 和图 5。而且当取值大于 7.9 时,基于分数样条小波变换去除图像噪声的能力也达到了极限状态。实验结果表明理论推算结果的正确性。

图 4 和图 5 是对含有方差 $\delta = 20$ 时的零均值高斯白噪声的 Lena 和 Barbara 图像使用小波全局硬阈值法(GWT)、伯格-马萨特策略确定的分层软阈值法(SWT)和本文方法的去噪结果。实验中小波全局阈值和分层软阈值均使用‘db8’小波,本文方法中分数样条阶数取 $\alpha = 7.9$,小波分解层数均为 3。表 1、2 中的数据结果是使用不同方法去噪后的图像的客观峰值信噪比 PSNR(单位: dB)。客

观峰值信噪比 PSNR 是反映图像客观质量的一个评价指标,其值越大,说明图像保真度高,图像质量越好。

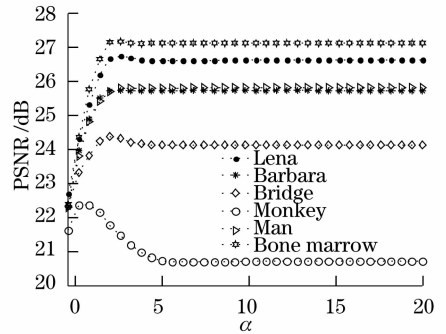


图 3 α 取不同值时对所有测试图像去噪结果

Fig. 3 Denoised image results (PSNR) of the test image as the fractional order α grows

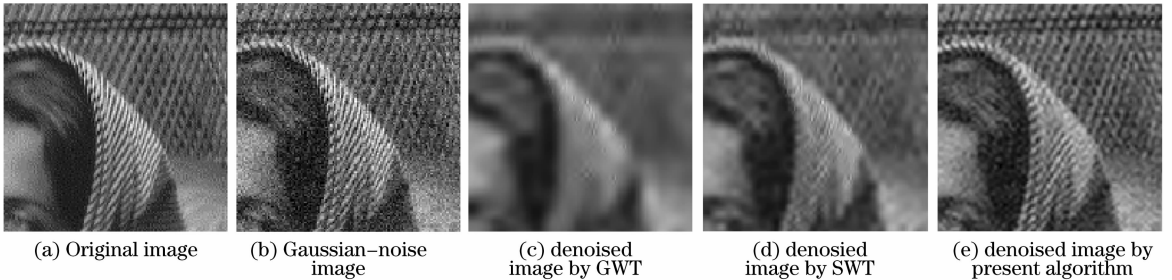


图 4 不同方法去噪后的局部 Babara 图像

Fig. 4 Subjective qualities of denoised Barbara image by different methods

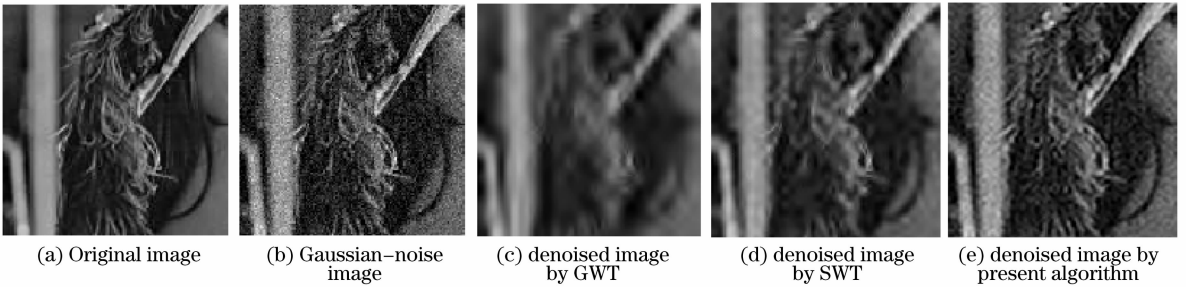


图 5 不同方法去噪后的局部 Lena 图像

Fig. 5 Subjective qualities of denoised Lena image by different methods

通过表 1 及表 2 中的数据结果也可以看出在图像质量客观评价指标峰值信噪比方面,当噪声方差小于 20 时,本文方法优于小波全局阈值和分层软阈值法。但是,随着噪声方差的继续增大,却不如分层软阈值法,这是由于分数 B 样条小波不具有局部支撑性,不能对信号和噪声进行很好地分离,但是由于一些周期性纹理表现出分形信号的特性,而去除分形信号中噪声正是分数样条小波的优势,所以在保护图像几何纹理方面仍然具有很强的优势,这在图 4(e)

和图 5(e)可以看出。观察图 4 和图 5 中经过几种方法去噪后的图像,不难发现利用本文方法去噪结果与小波全局阈值和分层软阈值去噪法相比,除整体平滑性稍差外,却表现出良好的逼近性能,能够较好的保护几何纹理和边缘等细节信息。由于 2 维小波是由两个一维小波张量积构成,高频成份只在 3 个频带方向展开,图像中的部分几何纹理会受到破坏,这从图 4(e)中的 Barbara 图像去噪结果可以看出。

表 1 Lena 含噪图像经过不同方法去噪后的图像客观质量

Table 1 Objective qualities of denoised Lena image
by different methods

Noise variance	Noised image 1	GWT	SWT	Present algorithm
5	34.1905	28.1961	28.2705	31.7058
10	28.1791	25.8997	27.9332	29.7200
15	24.6671	24.7960	27.4845	28.0861
20	22.2769	24.0452	26.8470	26.5315
30	18.8823	23.8601	23.1858	25.6719

表 2 Barbara 含噪图像经过不同方法去噪后的客观图像质量

Table 2 Objective qualities of denoised Barbara image
by different methods

Noise variance	Noised image 2	GWT	SWT	Present algorithm
5	34.1671	29.1892	30.5064	34.9842
10	28.1261	27.7304	30.1338	31.7429
15	24.6653	26.7901	29.6494	29.4532
20	22.1687	26.2075	29.0436	27.3485
30	18.8581	25.3099	27.4424	24.2967

6 结 论

根据数据平滑理论,推导计算出了7.9分数阶对称分数B样条可以达到最好的图像平滑和逼近效果;而且通过所给分数Battle-Lemarié小波系数阈值公式所获得的去噪效果给予了证明。去噪效果与传统小波全局阈值去噪和分层软阈值去噪相比,虽然去噪后的图像平滑性不它们,客观峰值信噪比有时甚至低于这些方法,但是却能较好地保留图像的纹理和边缘等拓扑信息,且使图像噪声得到较大程度的抑制。因此,分数B样条小波变换在图像去噪方面仍具有一定的利用价值。若能将图像按照“平坦”区(变化起伏较小的区域)和“非平坦”区(即纹理和边缘等细节较丰富的区域),利用分块去噪的策略将会得到更好的去噪效果,这是下一步需要研究的

工作。

参 考 文 献

- Mallat S, Hwnag W L. Singularity detection and peocessing with wavelets[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1992, **38**(2):617~643
- Donoho D L. Denoising by soft thresholding[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1995, **41**(3):613~627
- Shi Z, Cherkassky V. Image denoising using wavelet thresholding and model selection [C]. *Int. Conf. Image Processing*, 2000, (3):262~265
- Zong Siguang, Wang Jiang ' an. Multi-scale mathematical morphology fusion filtering and the evaluation of the filtered image[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(9):1176~1180
宗思光,王江安.多尺度形态算子融合图像滤波技术及滤波质量评价[J]. *光学学报*, 2005, **25**(9):1176~1180
- Cao Wanpeng, Che Rensheng, Ye Dong. Illumination independent wavelet scale mutiplication edge detection method [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(10):1751~1757
曹万鹏,车仁生,叶 东.一种照明无关的波多尺度相乘边缘检测方法[J]. *光学学报*, 2007, **27**(10):1751~1757
- Sudha S, Suresh G R, Sukanesh R. Wavelet based image denoising using adaptive thresholding [J]. *Int. Conf. Computational Intelligence and Multimedia Applications*, 2007, (3):296~300
- Luisier F, Blu T, and Unser M. A new SURE approach to image denoising interscale orthonormal wavelet thresholding[J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2007, **16**(3):593~606
- Donoho D L. Orthonormal ridgelets and linear singularities[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2000, **31**(5):1062~1099
- Strack J L, Candes E J, Donoho D L. The curvelet transform for image denoising[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2002, **11**(6):670~684
- Zhang Jingjing, Fang Yonghua. Novel denoising method for remote sensing image based on contourlet transform[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(3):462~466
张晶晶,方勇华.基于Contourlet变换的遥感图像去噪新算法[J]. *光学学报*, 2008, **28**(3):461~466
- Blu T, Unser M. The fractional spline wavelet transform: definition and implementation[C]. *IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing, Istanbul, Turkey*, 2000, **1**:512~515
- Panda R, Dash M. Fractional generalized splines and signal processing[J]. *Signal Processing*, 2006, **86**(9):2340~2350
- Tirosh S, Ville D V D, Unser M. Polyharmonic smoothing splines for multi-dimensional signals $1/\|\omega\|^2$ -like spectra[C]. *IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2004, (3):297~300
- Hongyi Liu, Zhihui Wei. Image fusion based on fractional spline wavelets and IHS transform[J]. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2006, **30**(1):81~84
刘红毅,韦志辉.基于分数阶样条小波与IHS变换的图像融合[J]. *南京理工大学学报*, 2006, **30**(1):81~84