

广义超几何光束在 $ABCD$ 光学系统中的传播

陈建农 于永江 王菲菲

(鲁东大学物理与电子工程学院, 山东 烟台 264025)

摘要 新型特殊模式激光束的传播是激光应用研究的基础和重要课题。利用柯林(Collins)积分公式研究了广义超几何光束在 $ABCD$ 近轴光学系统中的传播行为,得到了光束在输出平面复振幅的解析表达式。结果表明,其传播后的复振幅分布与库默尔(Kummer)函数成正比。通过将 Kummer 函数展开成级数,获得了光束在输出平面复振幅的模的级数形式,从该级数可以看出,广义超几何光束在 $ABCD$ 近轴光学系统中传播时的模式结构一般是要发生变化的。作为特殊光学系统,讨论了自由空间传播时近场和远场衍射近似表达式,它们均为一系列同心圆环,空间频率随径向坐标增加而增加,近场衍射时横向模式结构保持不变,而远场衍射时则发生变化。给出了光束的归一化系数,分析了该光束一些简化模式与高斯光束的关系。

关键词 超几何光束; $ABCD$ 光学系统; 传播; 自由空间

中图分类号 O436 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20092904.0902

The Propagation of Generalized Hypergeometric Beams in $ABCD$ Optical Systems

Chen Jiannong Yu Yongjiang Wang Feifei

(Department of Physics and Electronic Engineering, Ludong University, Yantai, Shandong 264025, China)

Abstract The study on the propagation of laser beams of new special modes is a fundamental and significant topic in laser application. Based on the Collins integral formula, the propagation of generalized hypergeometric beams in paraxial $ABCD$ optical systems is studied and the analytical expressions for complex amplitude at output plane are obtained. It is shown that the complex amplitude distribution after propagation in paraxial $ABCD$ optical systems is proportional to Kummer function. By expanding Kummer function as a series, the modulus of this complex amplitude at the output plane could be represented as series summation which shows that the transverse structure of generalized hypergeometric beams propagating in paraxial $ABCD$ optical systems will generally change its form. As a special optical system, the near-field and far-field diffraction behavior in free space is discussed. The transverse structures of both the near-field and far-field are a series of concentric rings and the spatial frequency increases with increase of the radial coordinate. The normalization coefficient was derived and also the relation between simplified modes of hypergeometric mode and Gaussian modes is analyzed.

Key words hypergeometric beams; $ABCD$ optical systems; propagation; free space

1 引 言

随着激光应用领域的拓展,科学家对新型激光束理论和实验研究的兴趣在不断地增加。除了已被大家所熟知的厄米-高斯光束,贝塞尔-高斯光束和拉盖尔-高斯光束外^[1-6],最近几年出现了关于马提厄(Mathieu)光束、英斯(Ince)光束、艾里-高斯光束

与迪卡儿光束等的实验产生方法和理论研究报道^[7-12]。对于那些具有无衍特性和传播方向有确定光子轨道角动量等特殊性质的光束来说,在光捕获、图像处理、医疗外科、激光无线通信与激光加工等方面已找到了很多应用。

Victor V. Kotlyar 等^[13]提出了超几何激光模

收稿日期: 2008-09-28; **收到修改稿日期**: 2008-10-15

基金项目: 国家自然科学基金(10601045)和校科研基金(20052801)资助课题。

作者简介: 陈建农(1963-),男,硕士,教授,主要从事光学信息处理和光束变换等方面的研究。

E-mail: jnchen1963@yahoo.com.cn

式光束,从理论上进行了分析,该光束在均匀空间传播,能够保持其初始结构,只是尺度发生变化。它的横截面光强度分布与贝塞尔模式光束类似,是一系列亮暗交替的同心圆环。由于该光束复振幅分布正比于合流超几何函数,所以被冠以超几何激光模式。文章还介绍了实验室利用二元衍射光学元件产生该激光光束的方法。

Ebrahim Karimi 等^[14]报道了一族被称为超几何-高斯近轴光束,它是标量亥姆赫兹(Helmholtz)近轴波动方程的解。它具有有限的能量并可以在实验室里产生。

Victor V. Kotlyar 等^[15]又报道了超几何激光模式的广义形式。理论分析表明,低价模拉盖尔-高斯光束,超几何模式光束和超几何-高斯近轴光束是广义超几何激光模式的特例。

本文讨论广义超几何模式在 ABCD 光学系统中的传播行为。这里,广义的超几何模式是由四个因子构成的复振幅:高斯光束项、对数项、螺旋相位项和一个在坐标原点可能存在奇点的振幅幂项。得到了传播后的解析表达式。接下来,讨论了自由空间作为最简单的特殊光学系统对广义的超几何模式

的变换,并分析了远场和近场衍射结果。另外,还进一步研究了一些简化的广义超几何模式。

2 广义超几何光束在 ABCD 光学系统中的传播

由 Victor V. Kotlyar 等^[15]提出的广义超几何激光模式的复振幅可表示为

$$E_{gm}(r, \varphi, z=0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r}{\omega}\right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\gamma \ln \frac{r}{\omega} + in\varphi\right), \quad (1)$$

这是在初始平面($z=0$)的复振幅形式, ω 和 γ 都是实参量, σ 为高斯光束的束腰半径, n 为整数。在(1)式中,振幅奇点处在 $r=0$ 和 $m<0$ 。这个复振幅描述的是一个具有无限能量的光场。尽管有这个事实,与起始点相距 z 的其它任何横截面上,由(1)式所产生的光场复振幅将不再有奇点,而且有限。除此之外,在 $\gamma \neq 0$ 时,(1)式中的复振幅在中心处有一相位奇点。

随着光场在近轴光学系统中传播,在与原点距离 z 处的复振幅将由柯林(Collins)公式变换得到

$$E_{gm}(\rho, \theta, z) = \frac{ik}{2\pi B} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} E_{gm}(r, \varphi, z=0) \exp\left\{-\frac{ik}{2B}[Ar^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \theta) + Dr^2]\right\} r dr d\varphi. \quad (2)$$

(1)式依赖于方位角 φ ,可以写成 $E(r, \varphi) = A(r)\exp(in\varphi)$ 的形式,对于这样一个函数,可以将(2)式写成

$$E_{gm}(\rho, \theta, z) = \frac{ik}{2\pi B} \exp\left(-\frac{ik}{2B}Dr^2\right) i^{-n} \exp(in\varphi) \int_0^{\infty} J_{-n}\left(\frac{k}{B}r\rho\right) \left(\frac{r}{\omega}\right)^{m+i\gamma} \exp\left(-\frac{r^2}{\omega^2} \frac{\omega^2}{2\sigma^2} + \frac{ikAr^2}{2B}\right) r dr, \quad (3)$$

式中 J_{-n} 表示 n 阶贝塞尔函数,应用以下积分公式^[16]:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-px^2) J_{\nu}(Cx) dx = C^{\nu} p^{-\nu-1} \Gamma\left(\frac{\nu+\alpha}{2}\right) \Gamma^{-1}(\nu+1) {}_1F_1\left(\frac{\nu+\alpha}{2}, \nu+1, -\frac{C^2}{4p}\right), \quad (4)$$

式中 ${}_1F_1$ 是合流超几何函数或为 Kummer 函数, Γ 是伽玛(Gamma)函数。可以得到下列结果:

$$E_{gm}(\rho, \theta, z) = \frac{i^{1-n}k}{2B\pi} \exp\left(-\frac{ik}{2B}D\rho^2\right) \exp(in\theta) (-1)^n \Gamma\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}\right) \left(\frac{1}{\omega}\right)^{m+i\gamma} \left(\frac{k\rho}{B}\right)^n \times \left(\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{ikA}{2B}\right)^{-(n+m+2+i\gamma)/2} 2^{-n-1} \Gamma^{-1}(n+1) {}_1F_1\left[\frac{n+m+2+i\gamma}{2}, n+1, -\frac{(k\rho/B)^2}{2(1/\sigma^2 + ikA/B)}\right], \quad (5)$$

这是广义超几何激光模式在 ABCD 光学系统中传播距离 z 后的复振幅在极坐标中的分布。矩阵元素的数值与 z 的大小有关。可以看出该复振幅的模可表示为

$$|E_{gm}(\rho, \theta, z)| = Cx^{n/2} \left| {}_1F_1\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}, n+1, -Zx\right) \right|, \quad (6)$$

式中 C 为实参数, Z 为复常数, x 为复参量

$$C = \left| \frac{i^{1-n}k}{2B\pi} \exp\left(-\frac{ik}{2B}D\rho^2\right) \exp(in\theta) (-1)^n \Gamma\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}\right) \Gamma^{-1}(n+1) \right| \times \left| \left(\frac{1}{\omega}\right)^{m+i\gamma} \left(\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{ikA}{2B}\right)^{-(n+m+2+i\gamma)/2} 2^{-n-1} \right|, \quad (7)$$

$$Z = \frac{B\sigma^2}{2(B + ikA\sigma^2)}, \quad (8)$$

$$x = (k\rho/B)^2, \quad (9)$$

利用 Kummer 函数的下列级数形式:

$${}_1F_1(a, b, -x) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l (-1)^l x^l, \quad (10)$$

$$C_l = \frac{\Gamma(a+l)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b+l)l!}. \quad (11)$$

可以将(6)式写成以下级数形式:

$$|E_{\gamma m}(\rho, \theta, z)| = C \left(\frac{k\rho}{B} \right)^{n/2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l C_l Z^l \left(\frac{k\rho}{B} \right)^{2l} \right|, \quad (12)$$

对一个确定的光学系统, 矩阵元 A 和 B 为复常数, (12) 式可以表示为

$$E_{\gamma m}(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{zq^2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{\omega q} \right)^{m+iy} \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz} \right)^n \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \times \Gamma\left(\frac{n+m+2+iy}{2}\right) \times {}_1F_1\left[\frac{n+m+2+iy}{2}, n+1, -\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}qz}\right)^2\right], \quad (14)$$

式中 $z_0 = k\sigma^2, q = (1 - iz_0/z)^{1/2}$ 。

3.1 在近场中的广义超几何光束

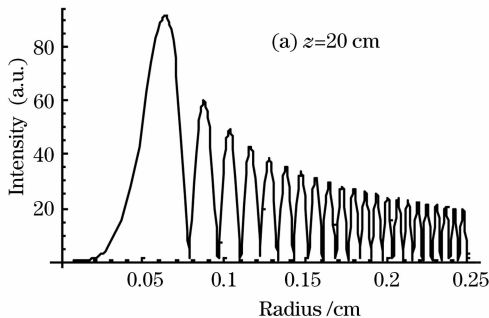
在 $z \ll z_0 = k\sigma^2$ 时, 可作如下简化:

$$\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{ik}{2z} \approx -\frac{ik}{2z}, \quad q^2 \approx -i \frac{z_0}{z}, \quad (15)$$

可以将(14)式写成

$$E_{\gamma m}(\rho, \theta, z \ll z_0) = \frac{(-i)^{(n-m-iy)/2}}{2\pi n!} \left(\frac{k\omega^2}{2z} \right)^{-(m+iy)/2} \left(\frac{k\rho^2}{2z} \right)^{n/2} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \Gamma\left(\frac{n+m+2+iy}{2}\right) \times {}_1F_1\left(\frac{n+m+2+iy}{2}, n+1, -\frac{ik\rho^2}{2z}\right). \quad (16)$$

从(16)式可以得出, 在 $z \ll z_0$ 时, 径向坐标均附加了一个同样的与传播距离有关的因子, 复振幅的模 $|E_{\gamma m}(\rho, \theta, z \ll z_0)|$ 将保持不变, 改变的仅是标度大小。注意到当 $\sigma \rightarrow \infty$ 时(高斯光束变成一平面



$$|E_{\gamma m}(\rho, \theta, z)| = C \left(\frac{k\rho}{B} \right)^{n/2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l C_l P^l \rho^l \exp(iQl) \right|, \quad (13)$$

式中 P 和 Q 为实参数。从(13)式可以看出, 求和号中每一项的振幅和相位均随光学系统参数而变化。它们干涉的结果是在传播过程中, 模的结构将发生变化。

3 广义超几何光束的近场和远场衍射

由矩阵光学可知, 当 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 时, 光在自由空间传播, 由(5)式得到

波)(14)式也会转变成(16)式。图1为近场传播时的光强径向分布, 其中波数 $k = 2\pi/\lambda$ 。

3.2 在远场中的广义超几何光束

当 $z \gg z_0 = k\sigma^2, q = (1 - iz_0/z)^{1/2} \approx 1$ 时,

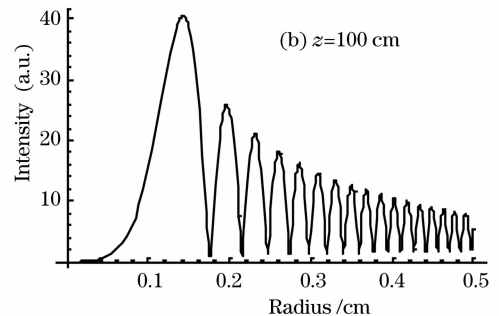


图1 为近场传播时的光强径向分布。 $z_0 = 24822$ cm, $n=3, m=-1, \gamma=3, \omega=15$ cm, $\lambda=6328 \times 10^{-8}$ cm

Fig. 1 Radial distribution of optical intensity when propagating in the near field, where $z_0 = 24822$ cm,

$n=3, m=-1, \gamma=3, \omega=15$ cm, $\lambda=6328 \times 10^{-8}$ cm

(14) 式可以写成

$$E_{\gamma m}(\rho, \theta, z \gg z_0) = \frac{(-i)^{n+1}}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{z}\right) \left(\frac{\sqrt{2}\sigma}{w}\right)^{m+i\gamma} \left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}z}\right)^n \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \Gamma\left(\frac{n+m+2+i\gamma}{2}\right) \times {}_1F_1\left[\frac{n+m+2+i\gamma}{2}, n+1, -\left(\frac{k\sigma\rho}{\sqrt{2}z}\right)^2\right]. \quad (17)$$

可以看出衍射图样与 z 有关, 在不同传播距离处, 复振幅对径向坐标的依赖是不一样的, 因此衍射图样形状不再保持不变。由于振幅的分布与 ρ^2 有关, 近场和远场的衍射图样都可以表示成一系列同心的环。而且随 ρ 增加, 环的空间频率也在增加。图 2 是远场传播时的光强径向分布。图 2(a) 表明, 当 z 与 z_0 比较稍大一些时, 还可以看到光强的多个圆环结构; 但当 $z \gg z_0$ 时, 只有一个靠近中心的圆环。

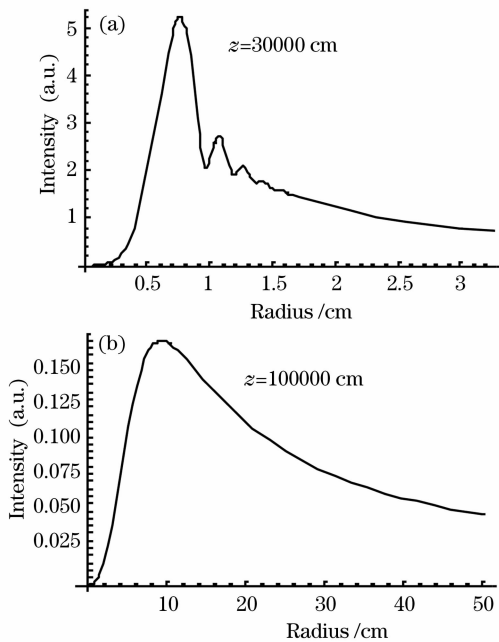


图 2 为远场传播时的光强径向分布, 其中 $z_0 = 24822$ cm,

$$n=3, m=-1, \gamma=3, w=15 \text{ cm}, \lambda=6328 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

Fig. 2 Radial distribution of optical intensity when propagating in the far field, where $z_0 = 24822$ cm

$$n=3, m=-1, \gamma=3, w=15 \text{ cm}, \lambda=6328 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

4 广义超几何光束的归一化

尽管广义超几何模式的传播行为已被清楚地了解, 但我们还不知道该光束的归一化系数。下面来推导这一系数。原理上讲, 找出归一化系数的问题归结为对 $|E_{\gamma m}|^2$ 在整个光束横截面进行积分, 并使之等于一。令归一化系数为 K_m , 得到

$$K_m^2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{r}{w}\right)^{2m} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) r dr d\varphi = 1, \quad (18)$$

利用积分公式

$$\int_0^\infty x^m \exp(-\mu x) dx = m! \mu^{-m-1}, \quad (19)$$

$$\text{Re } \mu > 1$$

得到

$$K_m = \frac{2w^m}{\sigma^{m+1}} \sqrt{\frac{\pi}{m!}}, \quad (20)$$

将此系数代入广义超几何激光模式的复振幅表达式 (1), 于是归一化的广义超几何模式应为

$$E_{\gamma m}(r, \varphi, z=0) = \sqrt{\frac{1}{\pi m!}} \frac{r^m}{\sigma^{m+1}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2} + i\gamma \ln \frac{r}{w} + in\varphi\right), \quad (21)$$

式中令 $m=0$, 可以得到一种简化的超几何激光模式:

$$E_{\gamma 0}(r, \varphi, z=0) = \sqrt{\frac{1}{\pi m!}} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(i\gamma \ln \frac{r}{w} + in\varphi\right), \quad (22)$$

该模式可以从螺旋对数相位板对归一化高斯分布光束的衍射获得。进一步令 $\gamma=0$, 得到

$$E_{0n0}(r, \varphi, z=0) = \sqrt{\frac{1}{\pi m!}} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \exp(in\varphi), \quad (23)$$

该模式是归一化高斯分布光束经过螺旋相位板衍射的结果。

5 结 论

讨论了广义超几何模式在 ABCD 光学系统中的传播行为。广义超几何模式是一种新的三参数近轴激光束族, 得到了传播后的解析表达式。其模式的级数表达式表明, 广义超几何模式结构在 ABCD 光学系统中的传播时, 一般是要发生变化的。对自由空间近场衍射和远场衍射结果进行了简化和分析, 在自由空间近场情况下, 模式结构基本不发生变化。给出了广义超几何模式的归一化系数。这些结果对广义超几何模式的进一步研究和应用将发挥一定的作用。

参 考 文 献

- 1 A. E. Siegman. Hermite-Gaussian functions of complex argument as optical-beam eigenfunctions[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1973, **63**: 1093~1094
- 2 Zhangrong Mei, Daomu Zhao. Propagation of Laguerre-Gaussian and elegant Laguerre-Gaussian beams in apertured fractional Hankel transform systems[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2004, **21**(12): 2375~2381
- 3 M. A. Clifford, J. Arlt, J. Courtial *et al.*. High-order Laguerre-Gaussian laser modes for studies of cold atoms[J]. *Opt. Commun.*, 1998, **156**(4): 300~306
- 4 Atsushi Wada, Takumi Ohtani, Yoko Miyamoto *et al.*. Propagation analysis of the Laguerre-Gaussian beam with astigmatism[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2005, **22**(12): 2746~2754
- 5 Victor V. Kotlyar, Svetlana N. Khonina, Anton A. Almazov *et al.*. Elliptic Laguerre-Gaussian beams[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2006, **23**(1): 43~56
- 6 Carl Paterson, Robin Smith. Higher-order Bessel waves produced by axicon-type computer-generated holograms [J]. *Opt. Commun.*, 1996, **124**(1): 121~130
- 7 J. C. Gutiérrez-Vega, M. D. Iturbe-Castillo, G. A. Ramírez *et al.*. New experimental demonstration of optical Mathieu beams [J]. *Opt. Commun.*, 2001, **195**(1): 35~40
- 8 Miguel A. Bandres, Julio C. Gutiérrez-Vega. Ince-Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2004, **21**(5): 873~880
- 9 Miguel A. Bandres, Julio C. Gutiérrez-Vega. Airy-Gauss beams and their transformation by paraxial optical systems[J]. *Opt. Express*, 2007, **15**(25): 16719~16728
- 10 Miguel A. Bandres, Julio C. Gutiérrez-Vega. Cartesian beams [J]. *Opt. Lett.*, 2007, **32**(24): 3459~3461
- 11 A. Chafiq, Z. Hricha, A. Belafhal. A detailed study of Mathieu-Gauss beams propagation through an apertured ABCD optical system[J]. *Opt. Commun.*, 2006, **265**(2): 594~602
- 12 Miguel A. Bandres. Elegant Ince-Gaussian beams [J]. *Opt. Lett.*, 2004, **29**(15): 1724~1726
- 13 V. V. Kotlyar, R. V. Skidanov, S. N. Khonina *et al.*. Hypergeometric modes[J]. *Opt. Lett.*, 2007, **32**(7): 742~744
- 14 Ebrahim Karimi, Gianluigi Zito, Bruno Piccirillo *et al.*. Hypergeometric-Gaussian modes[J]. *Opt. Lett.*, 2007, **32**(21): 3053~3055
- 15 Victor V. Kotlyar, Alexey A. Kovalev. Family of hypergeometric laser beams[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2008, **25**(1): 262~270
- 16 A. Erdelyi. Tables of Integral Transforms[M]. New York: McGraw-Hill, 1954