文章编号：0253-2239(2009)03-0827-04

多模连续变量系统的可分性条件

蒲忠胜 杜晓芳* 高建龙 关秋云

(兰州理工大学理学院，甘肃 兰州 730050)

摘要 基于一对 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR)型算符的方差求积，利用柯西-施瓦兹不等式和海森伯不确定关系得到了多模连续变量系统的可分性条件，此条件不仅可以用来探测非高斯态，还可以探测相干态的情况。此外，通过对算符方差进行求和，得到了用来判断量子态是否纠缠的另外一个条件。并对推导出的两个可分性条件在算符 $\hat{F}_j$，$\hat{G}_j$ 分别取坐标算符，动量算符且 $n=2$ 的情况下进行了对比讨论。结果表明，当所选的系数满足 $\sum|c_jd_j|>4$ 时前一个不等式相对于后一个不等式探测更强。

关键词 量子纠缠；可分性条件；柯西-施瓦兹不等式；可分离态

中图分类号 O431.2　　**文献标识码** A　　**doi**：10.3788/AOS20092903.0827

Separability Condition for Multi-Mode Continuous-Variable Systems

Pu Zhongsheng　Du Xiaofang　Gao Jianlong　Guan Qiuyun

(*School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, Gansu* 730050, *China*)

Abstract A separability condition based on the product variance of a pair of Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) type operators is obtained for continuous-variable systems by using Heisenberg uncertainty relation and Cauchy-Schwarz inequality. It can be used to detect the entanglement of non-Gaussian states, the entanglement of coherent state. Moreover, anther condition used to judge if quantum state gets entangled is obtained by using total variance. Two conditions were discussed contrastively were $\hat{F}_j$ was position operator, $\hat{G}_j$ was momentum operator and $n=2$. The result shows that detection ability of the former inequality is stronger than the latter when the coefficient is satisfied with the relatin of $\sum|c_jd_j|>4$.

Key words quantum entanglement; separability condition; Cauchy-Schwarz inequality; separable states

1 引　　言

量子态在迅速发展的量子信息处理方面起着至关重要的作用，使得量子信息具有经典信息不能实现的新功能，如量子隐形传态[1]、量子密钥[2,3]、量子编码[4,5]和量子并行计算[6]等。由于纠缠态的物理特征和数学结构不易被理解。因此，判断一个态是否可分(或非纠缠)成为非常重要的问题。

1935 年，Einstein，Podolsky，Rosen (EPR) 和 Schrödinger 首先提出了量子纠缠。1964 年，Bell 以不等式(Bell 不等式)的形式证明了局域性限制自旋关联的预测的正确性，此不等式的推出成为解决 EPR 问题的一个里程碑，也是判定一个量子态是否可分的最早条件。对于纯态是否可分已经得到解决，对于混合态有可操作的必要性判据，如 Positive Partial Transpose (PPT)判据[7]、约化判据[8]、重排判据[9]等。还有不可操作的充要判据，如正映射判据[10]等。目前，连续变量系统的纠缠引起了众多研究者的关注[11~14]。因此，对于应用于量子信息处理和量子计算的连续变量系统，判定其纠缠就显得尤为重要，并且已经取得了重要成果。如：Hillery[14]等提出的判定双模系统纠缠的条件。此外，对于连续变量高斯态的研究也取得了杰出的成就[13,15]。

本文基于上述文献，构造出新的算子，推导出多模连续变量系统所满足的条件，从而得出判定纠缠

收稿日期：2008-06-24；**收到修改稿日期**：2008-09-05

基金项目：甘肃省教育厅基金项目(0703B-11)资助课题。

作者简介：蒲忠胜(1973－)，男，副教授，硕士生导师，主要从事量子信息与量子计算等方面的研究。
E-mail：puzhongsheng@lut.cn

* **通信联系人**：E-mail：nmdduxiaofang@163.com

的充分性条件，并利用非高斯态和相干态进行探测。

2 量子态的可分性条件

定义可观测算符

$$\hat{U}=c_1\hat{F}_1+c_2\hat{F}_2+\ldots+c_j\hat{F}_j\cdots+c_n\hat{F}_n,$$
$$\hat{V}=d_1\hat{G}_1+d_2\hat{G}_2+\cdots+d_j\hat{G}_j\cdots+d_n\hat{G}_n,\quad(1)$$

假定 c_j,d_j 为任意非零实数，且 $\hat{F}_j,\hat{G}_j$ 为厄米算符，满足置换关系

$$[\hat{F}_j,\hat{G}_j]=\mathrm{i}\hat{M}_j,\ j=1,2,\cdots,n\quad(2)$$

因此，算符 $\hat{M}_j$ 也是厄米算符。

定理 假定一个 n 模的可分离态

$$\rho=\sum_k p_k\rho_{k1}\otimes\rho_{k2}\otimes\cdots\otimes\rho_{kj}\cdots\otimes\rho_{kn},$$

其中$\otimes$表示直积，ρ_{kj}为第 j 模正交归一化量子态，并且 $p_k\geqslant0$，满足$\sum_k p_k=1$。则算符 $\hat{U},\hat{V}$ 的方差之积的关系满足：

$$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle\geqslant\widetilde{R}^2,\quad(3)$$

其中

$$\widetilde{R}=\frac{1}{2}\left|\sum_{j=1}^{n}|c_jd_j|\widetilde{R}_j\right|,$$
$$\widetilde{R}_j=\sum_k p_k\langle\hat{M}_j\rangle_k,\quad(4)$$

$\langle\hat{M}_j\rangle_k=Tr[\hat{M}_j\hat{\rho}_{kj}]$为算符$\hat{M}_j$ 在量子态$\hat{\rho}_{kj}$下的平均值。

证明：

$$(\Delta\hat{U})^2=\sum_i p_i[c_1^2(\Delta\hat{F}_1)^2+\cdots+c_n^2(\Delta\hat{F}_n)^2]_i+\sum_i p_i\langle\hat{U}\rangle_i^2-\left(\sum_i p_i\langle\hat{U}\rangle_i\right)^2,\quad(5)$$

$$(\Delta\hat{V})^2=\sum_i p_i(d_1^2(\Delta\hat{G}_1)^2+\cdots+d_n^2(\Delta\hat{G}_n)^2)_i+\sum_i p_i\langle\hat{V}\rangle_i^2-\left(\sum_i p_i\langle\hat{V}\rangle_i\right)^2\quad(6)$$

根据柯西不等式得

$$(\Delta\hat{U})^2(\Delta\hat{V})^2\geqslant\sum_i p_i(c_1^2(\Delta\hat{F}_1)^2+\cdots+c_n^2(\Delta\hat{F}_n)^2)_i\times\sum_i p_i(d_1^2(\Delta\hat{G}_1)^2+\cdots+d_n^2(\Delta\hat{G}_n)^2)_i.\quad(7)$$

且有

$$\langle\hat{M}_j\rangle=Tr(\hat{M}_j\rho_{sep})=\mathrm{Tr}\left(\hat{M}_j\sum_k p_k\rho_{k1}\otimes\rho_{k2}\otimes\cdots\otimes\rho_{kn}\right)=\sum_k p_k\mathrm{Tr}(\hat{M}_j\rho_{k1}\otimes\rho_{k2}\otimes\cdots\otimes\rho_{kn})=\sum_k p_k\mathrm{Tr}(\rho_{k1})\otimes\mathrm{Tr}(\rho_{k2})\otimes\cdots\otimes\mathrm{Tr}(\hat{M}_j\rho_{kj})\otimes\cdots\otimes\mathrm{Tr}(\rho_{kn})=\sum_k p_k\mathrm{Tr}(\hat{M}_j\rho_{kj})=\sum_k p_k\langle\hat{M}_j\rangle_k.\quad(8)$$

利用海森伯不确定关系，即：若$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{C}$，则$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle\geqslant\frac{1}{4}|\langle\hat{C}\rangle|^2$。结合(2)式满足的关系，因此

$$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle\geqslant\frac{1}{4}\left|\sum\nolimits_{j=1}^{n}|c_jd_j|\langle\hat{M}_j\rangle\right|^2=\hat{R}^2.\quad(9)$$

证毕。

若算符 $\hat{F}_j,\hat{G}_j$ 分别取动量和坐标算符，则(3)式可以简化为

$$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle\geqslant\frac{1}{4}\left|\sum\nolimits_{j=1}^{n}|c_jd_j|\right|^2.\quad(10)$$

3 可分性条件的对比说明

本小组利用不确定关系对 n 模连续变量系统的算符的方差进行了求和。假设算符 $\hat{U},\hat{V}$ 分别表示为

$$\hat{U}=c_1\hat{F}_1+c_2\hat{F}_2+c_j\hat{F}_j+\cdots+c_n\hat{F}_n,$$
$$\hat{V}=d_1\hat{G}_1+d_2\hat{G}_2+d_j\hat{G}_j+\cdots+d_n\hat{G}_n,\quad(11)$$

其中 c_j,d_j 是任意非零实数，$\hat{F}_j,\hat{G}_j$ 均为厄米算符，满足对易关系$[\hat{F}_j,\hat{G}_j]=\mathrm{i}\hat{B}_j$。则在可分离态 ρ 上计算可测物理量$\hat{U}$、$\hat{V}$ 的方差和满足

$$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle_\rho+\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle_\rho=(\langle\hat{U}^2\rangle_\rho-\langle\hat{U}\rangle_\rho^2)+(\langle\hat{V}^2\rangle_\rho-\langle\hat{V}\rangle_\rho^2)=\sum_i p_i(\langle\hat{U}^2\rangle_i+\langle\hat{V}^2\rangle_i)-\langle\hat{U}\rangle_\rho^2-\langle\hat{V}\rangle_\rho^2=\sum_i p_i\Big(c_i^2\langle(\Delta\hat{F}_i)^2\rangle+d_i^2\langle(\Delta\hat{G}_i)^2\rangle\Big)+\sum_i p_i\langle\hat{U}\rangle_i^2-\left(\sum_i p_i\langle\hat{U}\rangle_i\right)^2+\sum_i p_i\langle\hat{V}\rangle_i^2-\left(\sum_i p_i\langle\hat{V}\rangle_i\right)^2,\quad(12)$$

其中$\langle\cdots\rangle_i$ 表示在n 模的可分离态ρ 下的平均值。

根据柯西-施瓦兹不等式，有

$$\sum_i p_i\langle\hat{U}\rangle_i^2-\left(\sum_i p_i\langle\hat{U}\rangle_i\right)^2>0,$$
$$\sum_i p_i\langle\hat{V}\rangle_i^2-\left(\sum_i p_i\langle\hat{V}\rangle_i\right)^2>0.\quad(13)$$

则(12)式可以表示为

$$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle_\rho+\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle_\rho\geqslant\sum_i p_i[c_i^2\langle(\Delta\hat{F}_i)^2\rangle+d_i^2\langle(\Delta\hat{G}_i)^2\rangle]\geqslant\sum_i p_i|c_id_i||\langle\hat{B}_i\rangle|.\quad(14)$$

即

$$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle_\rho+\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle_\rho\geqslant\sum_i p_i|c_id_i||\langle\hat{B}_i\rangle|.\quad(15)$$

若算符 $\hat{F}_j, \hat{G}_j$ 分别取动量和坐标算符，则有

$$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle_\rho + \langle(\Delta\hat{V})^2\rangle_\rho \geqslant \sum_i |c_i d_i|. \qquad (16)$$

通过对(10)式和(16)式比较，可以看出，当所选的系数满足 $\sum_j |c_j d_j| > 4$，则有 $\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle > \langle(\Delta\hat{U})^2\rangle_\rho + \langle(\Delta\hat{V})^2\rangle_\rho$。也就是，在这种情况下不等式(10)相对于不等式(16)探测更强，如图 1 所示：

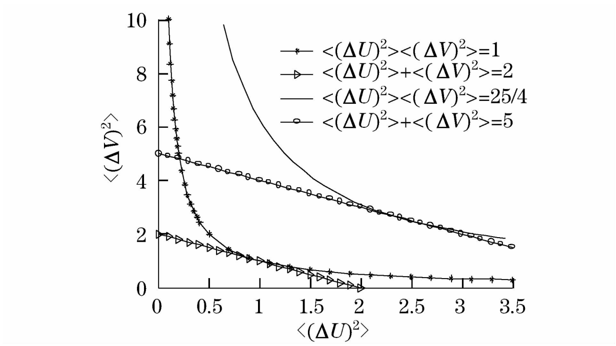

图 1 $\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle$与$\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle$的关系曲线图

Fig.1 Relation of $\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle$ and $\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle$

图 1 中，当系数取 $c_1=1$、$d_1=1$、$c_2=1$、$d_2=-1$ 时，$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle=1$，$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle+\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle=2$，曲线的右上部分分别描述了不等式(10)和不等式(16)探测的量子态可分的范围。当系数为 $c_1=1$、$d_1=1$、$c_2=2$、$d_2=-2$ 时，以上两个不等式可分的范围可表示为 $\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle=25/4$，$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle+\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle=5$ 曲线的右上部分。

4 具体态的探测

利用以上不等式不仅可以探测非高斯态，而且还可以探测相干态[16]的情形。下面分别用具体的量子态进行探测。

4.1 双模非高斯态的探测

如果算符 $\hat{F}, \hat{G}$ 分别为坐标算符 $\hat{X}$ 和动量算符 $\hat{P}$，并且当 $n=2$ 时不等式表示为

$$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle \geqslant (1/4)\Big|\,|c_1 d_1|\langle\hat{M}_1\rangle + |c_2 d_2\langle\hat{M}_2\rangle|\,\Big|^2 = 1/4(|c_1 d_1| + |c_2 d_2|)^2, \quad (17)$$

这个结果完全和文献[11]中的结果一致。

给定量子态[17]

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}(1+|\langle\alpha|\beta\rangle|^2)^{1/2}} \times (|\alpha\rangle_a|\beta\rangle_b + |\beta\rangle_a|\alpha\rangle_b),$$

其中$|\alpha\rangle$，$|\beta\rangle$为相干态，满足 $a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$，$a|\beta\rangle=\beta|\beta\rangle$。其中 a 为降算符，若令算符 $\hat{U}, \hat{V}$ 分别为

$$\hat{U} = \hat{X}_1 + \hat{X}_2, \quad \hat{V} = \hat{P}_1 - \hat{P}_2, \qquad (18)$$

并且，升降算符 a^*，a 和动量 $\hat{P}$ 坐标算符 $\hat{X}$ 满足关系：

$$X_i = (1/\sqrt{2})(a_i^* + a_i), \quad P_i = i/\sqrt{2}(a_i^* - a_i), i = 1,2. \qquad (19)$$

那么，算符 $\hat{U}, \hat{V}$ 可以表达为

$$\hat{U} = (1/\sqrt{2})(a_1^* + a_1 + a_2^* + a_2), \quad \hat{V} = (i/\sqrt{2})(a_1^* - a_1 - a_2^* + a_2). \qquad (20)$$

则有

$$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle \times \langle(\Delta\hat{V})^2\rangle = 1 - \frac{1}{2(1+x)^2}Y, \qquad (21)$$

其中 $x=|\langle\alpha|\beta\rangle|^2$，$Y=\{x^2(\lambda+\lambda^*)^2+x[(\lambda+\lambda^*)^2+(\lambda-\lambda^*)^2]+(\lambda-\lambda^*)^2\}$，$\lambda=\alpha-\beta$，通过上式可以看出 Y 是关于 x 的一元二次多项式，并且满足 $=16|\gamma|^4\geqslant0$，则有 $Y\geqslant0$。得到$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle\times\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle<1$，那么此态为纠缠态。当且仅当 $\alpha=\beta$，也就是 $Y=0$ 时此态为可分离态。

4.2 相干态情况的探测

选取 $|\phi(\alpha)\rangle = \frac{1}{(3+6x)^{1/2}}(|0\rangle_a|0\rangle_b|\alpha\rangle_c + |0\rangle_a|\alpha\rangle_b|0\rangle_c + |\alpha\rangle_a|0\rangle_b|0\rangle_c)$，$x=|\langle\alpha|0\rangle|^2$，且

$$\begin{cases}\hat{U} = \hat{X}_1 + \hat{X}_2 + \hat{X}_3, \\ \hat{V} = \hat{P}_1 - \hat{P}_2 - \hat{P}_3,\end{cases} \qquad (22)$$

通过计算可以得到

$$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle\times\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle = -\frac{3}{(3+6x)^2}[x^2(8T+2Q) + x(8T-7Q) + (2T-4Q)] + 9/4, \quad (23)$$

其中，$T=\alpha^{*2}+\alpha^2$，$Q=|\alpha|^2$。括号中是关于 x 的一元二次式，并且 $\Delta=273|\alpha|^4\geqslant0$，仅当 $\alpha=0$ 时等号成立。故有$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle\times\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle<9/4$，所以可以判断出当 $\alpha\neq0$ 时，此量子态为纠缠态。

5 结　　论

本文基于柯西-施瓦兹不等式和海森伯不确定关系，通过对两组算符方差乘积的运算得到了多模连续变量系统的可分性条件：

$$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle\langle(\Delta\hat{V})^2\rangle \geqslant (1/4)\left|\sum_{j=1}^n |c_j d_j|\langle\hat{M}_j\rangle\right|^2 = \widetilde{R}^2.$$

此外，与已推导出来的不等式

$$\langle(\Delta\hat{U})^2\rangle_\rho + \langle(\Delta\hat{V})^2\rangle_\rho \geqslant \sum_i p_i|c_i d_i||\langle\hat{B}_i\rangle|$$

在 $n=2$，算符 $\hat{F}, \hat{G}$ 分别取动量和坐标算符的条件

下进行了对比说明,并且利用给定的两个量子态对此条件进行了探测。虽然此不等式不是最强的判据,但是一个非常简单而且容易计算的可分性条件。此不等式能否在高斯态探测方面得到推广仍需要进一步的研究。

参 考 文 献

1 C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau *et al.*. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**(13): 1895～1899

2 C. A. Fuchs, N. Gisin, R. B. Griffiths *et al.*. Optimal eavesdropping in quantum cryptography. I. information bound and optimal strategy[J]. *Phys. Rev. A.*, 1997, **56**(2): 1163～1172

3 Yu Yafei, Zhang Zhiming. Analysis on unsecurity of quantum secret sharing based on smolin bound entangled states[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(3): 556～559
於亚飞,张智明. 束缚纠缠态量子秘密共享的不安全性分析[J]. 光学学报,2008,**28**(3): 556～559

4 C. H. Bennett, S. J. Wiesner. Communication via one-and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **69**(20): 2881～2884

5 Y. Guo, L. M. Kuang. Generation of three-mode W-type entangled coherent states in free-travelling optical fields[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2008, **6**(4): 303～306

6 D. P. DiVincenzo. Quantum Computation[J]. Science, 1995, **270**(5234): 255～261

7 A. Peres. Separability criterion for density matrices[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, **77**(8): 1413～1415

8 M. Horodecki, P. Horodecki. Reduction criterion of separability and limits for a class of distillation protocols[J]. *Phys. Rev. A*, 1999, **59**(6): 4206～4216

9 K. Chen, L. A. Wu. A matrix realignment method for recognizing entanglement [J]. *Quantum Information and Computation*, 2003, **3**(3): 193～202

10 M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions[J]. *Phys. Lett. A*, 1996, **223**(25): 1～8

11 G. Giedke, B. Kraus, M. Lewenstein *et al.*. Entanglement criteria for all bipartite Gaussian states[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**(16): 167904(1-4)

12 R. Simon. Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systems[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **84**(12): 2726～2729

13 L. M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac *et al.*. Inseparability criterion for continuous variable systems[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **84**(12): 2722～2725

14 M. Hillery, M. S. Zubairy. Entanglement conditions for two-mode states[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, **96**: 050503(1-4)

15 Y. J. Xia, G. C. Guo. Squeezing and entanglement in continuous variable systems[J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2004, **21**(10): 1877～1880

16 Zhou Ming, Fang Jiayuan, Kong Fanzhi *et al.*. Influence of Entangled-Atoms pair on squeezing of field entropy[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(2): 340～343
周 明,方家元,孔凡志 等. 纠缠双原子对场熵压缩特性的影响[J]. 光学学报,2007,**27**(2): 340～343

17 M. Hillery, M. S. Zubairy. Entanglement conditions for two-mode states: Applications[J]. *Phys. Rev. A*, 2006, **74**: 032333(1-7)