

原子干涉条纹与重力加速度测量精度的关系

王兆英 吴珍菁 林 强

(浙江大学物理系光学研究所, 浙江 杭州 310027)

摘要 从薛定谔方程出发,研究了拉曼脉冲激光与冷原子的相互作用,得出了作用后的密度矩阵方程。利用原子传输矩阵,得出原子在重力场中的各个位置和速度随时间的变化关系。结合原子密度矩阵和原子传输矩阵,得到了原子能态布居与重力加速度的严格关系式。进一步详细讨论了拉曼脉冲有效拉比振荡频率对重力加速度测量精度的影响。

关键词 量子光学; 原子光学; 原子干涉; 矩阵方法; 重力加速度

中图分类号 0431.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20092912.3541

The Relation Between the Atom Interference Fringe and the Measurement Precision of Gravity

Wang Zhaoying Wu Zhenjing Lin Qiang

(Institute of Optics, Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310027, China)

Abstract Based on the schrödinger equation, the interaction between the cold atom and Raman laser pulse is investigated, and the density matrix equation is obtained. The cloud location and velocity of atom under the influence of gravity is calculated by using ABCD propagation matrix for atom beam in space. Using density distribution matrix and propagation matrix of atom beam, the relation between the gravity and the population on the energy level of atom is derived. In the end, the influences of the effective Rabi oscillation frequency of Raman beams on the measurement precision of gravity is discussed in detailed.

Key words quantum optics; atom optics; atom interferometr; matrix method; gravity

1 引 言

随着激光冷却原子技术的发展,原子的动量变小,原子的波动性被充分地表现出来。利用原子的物质波可构成原子干涉仪,用它可作各种精密测量^[1~4]。利用原子干涉进行重力加速度的测量是原子干涉仪的一个重要应用。1999年,朱棣文小组利用原子干涉仪获得绝对重力加速度精度为 $3 \times 10^{-9} g$ ^[5]。2002年,耶鲁大学的 Kasevich 小组使用两个原子干涉仪测得重力加速度梯度的精度为 $40E(1E=10^{-9}/s^2)$ ^[6]。2006年,美国国家航空航天局下属的喷气推进实验室测得的重力加速度梯度精度达到 $30 E$ ^[7]。

以上各小组所进行的精度分析都是基于理想化的理论模型分析,可以得到原子处于基态 $|f\rangle$ 态的

几率 P_f 与重力加速度的关系式为: $P_f = [1 + \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3)]/2$, 其中 $\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3 = k_{\text{eff}}gT^2$ ^[8,9]。但是随着重力加速度测量精度的不断提高,需要对这个理论模型进行修正,并分析各修正项对精度的影响。本文通过较严格的理论计算,给出原子能态分布与重力加速度之间的关系式;并利用此关系式讨论了拉曼光束的有效拉比振荡频率对重力加速度测量精度的影响。

2 原子能态分布与重力加速度的关系式

原子干涉的原理如图 1 所示:当第一个拉曼 $\pi/2$ 脉冲与原子作用时间 τ 后,将初始处于 $|f\rangle$ 态的原子分为两部分,分别位于 $|f\rangle$ 态和 $|e\rangle$ 态。处于 $|e\rangle$ 态

收稿日期: 2008-10-16; 收到修改稿日期: 2008-11-08

基金项目: 国家 973 计划(2006CB921403)、国家自然科学基金(10804097)和浙江大学紫金计划资助课题。

作者简介: 王兆英(1976—),女,博士,副教授,主要从事冷原子物理方面的研究。E-mail: zhaoyingwang@zju.edu.cn

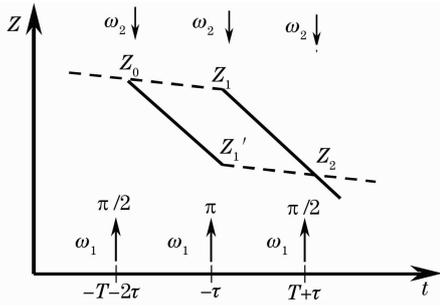


图 1 三拉曼脉冲原子干涉原理示意图

Fig. 1 The schematics of atom interferometer with three Raman pulses

的原子由于接收了一个 $\hbar k_{\text{eff}}$ 的动量而加速,使得 $|e\rangle$ 态的原子与 $|f\rangle$ 态的原子分开,其中 $k_{\text{eff}} = K_1 - K_2$, K_1, K_2 是两束拉曼光的波矢。两束原子在自由空间传输 T 时间后,与第二个拉曼光 π 脉冲作用时

间 2τ , 结果使 $|e\rangle$ 态的原子受激辐射而跃迁到 $|f\rangle$ 态,并获得 $-\hbar k_{\text{eff}}$ 的动量而减速;使 $|f\rangle$ 态的原子受激吸收而跃迁到 $|e\rangle$ 态,并获得 $\hbar k_{\text{eff}}$ 的动量而加速,从而在空间上实现了原子束的位置调换。之后,两束原子束在自由空间中再一次传输 T 时间后,与第三个拉曼光 $\pi/2$ 脉冲作用时间 τ , 结果再一次发生相干分裂,使得在空间两两对应重叠,因而产生干涉效应^[5]。图 1 中, ω_1, ω_2 是拉曼光脉冲的频率, z_0, z_1, z_1', z_2 分别表示原子与拉曼光束作用时的原子的位置。

我们假设拉曼脉冲的初始相位分别为 φ_1^0, φ_2^0 ; 原子处在 $|f\rangle$ 和 $|e\rangle$ 两个基态的能量分别为 $\hbar\omega_f$ 和 $\hbar\omega_e$ 。利用半经典的方法,拉曼光束看成经典场,原子量子化,通过解薛定谔方程,可以得到 t_0 时刻,拉曼光束与原子作用 τ 时间之后,原子处于 $|f\rangle$ 和 $|e\rangle$ 的几率分布的密度矩阵:

$$\mathbf{M}(t_0, \varphi^0, \tau) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\Omega_{\text{eff}}\tau}{2}\right)\exp(-i\omega_f\tau) & -i\exp\{i[(\omega_1 - \omega_2)t_0 + \varphi^0]\}\sin\left(\frac{\Omega_{\text{eff}}\tau}{2}\right)\exp(-i\omega_f\tau) \\ -i\exp\{i[(\omega_1 - \omega_2)t_0 + \varphi^0]\}\sin\left(\frac{\Omega_{\text{eff}}\tau}{2}\right)\exp(-i\omega_e\tau) & \cos\left(\frac{\Omega_{\text{eff}}\tau}{2}\right)\exp(-i\omega_e\tau) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中 $\Omega_{\text{eff}} = \sqrt{\Omega_1\Omega_2}/(2\Delta)$ 为有效拉比振荡频率,反应了激光与原子相互作用的强度。 $\varphi^0 = \varphi_1^0 - \varphi_2^0$ 是拉曼脉冲的初始相位差。当 $\Omega_{\text{eff}} = 0$ 时,公式(1)为原子在不受光脉冲作用时的演化矩阵:

$$\mathbf{M}(T) = \begin{bmatrix} \exp(-i\omega_f T) & 0 \\ 0 & \exp(-i\omega_e T) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中 T 为两个拉曼脉冲之间的间隔。利用矩阵(1)和(2),可以计算出图 1 中经过 $\pi/2 \rightarrow \pi \rightarrow \pi/2$ 拉曼脉冲作用后,原子的分布密度矩阵为:

$$\mathbf{M}_{\text{inter}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathbf{M}(T + \tau, \varphi_3, \tau)\mathbf{M}(T)\mathbf{M}(-\tau, \varphi_2, 2\tau)\mathbf{M}(T)\mathbf{M}(-T - 2\tau, \varphi_1, \tau). \quad (3)$$

假设初始时刻原子全部处于 $|f\rangle$ 态,则干涉后原子处于 $|f\rangle$ 的几率 $P_f = |a|^2$, 处于 $|e\rangle$ 的几率 $P_e = |c|^2 = 1 - P_f$ 。经过计算得到:

$$P_f = |a|^2 = \frac{1}{4}(2 + \cos a_1 + \cos^2 a_1) - \frac{1}{2}\sin^2 a_1 \cos(a_2/2) \cos(a_3/2) - \frac{1}{8}\sin^2 a_1 \cos a_2 + \frac{1}{8}(1 - 2\cos a_1 + \cos^2 a_1) \cos a_3, \quad (4)$$

式中 a_1, a_2, a_3 分别为:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2\tau\Omega_{\text{eff}}, \\ a_2 &= \varphi_3 - \varphi_1 + (2T + 3\tau)(\omega_1 - \omega_2 - \omega_e + \omega_f), \\ a_3 &= -(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3) - \tau(\omega_1 - \omega_2 - \omega_e + \omega_f). \end{aligned} \quad (5)$$

利用原子干涉过程中原子与拉曼脉冲作用引起的相位改变^[5], 可以得到 $\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3 = k_{\text{eff}}(z_1 + z_1' - z_2 - z_0)$ 和 $\varphi_3 - \varphi_1 = k_{\text{eff}}(z_1 - z_1' - z_2 + z_0)$ 。原子波包的传输满足薛定谔方程,根据原子在重力的影响下在自由空间中的传输矩阵,可以得到原子团的各个位置随时间的变化,即 z_0, z_1, z_1', z_2 的

值^[10]。据此可求得：

$$\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3 = k_{\text{eff}}gT^2, \quad (6a)$$

$$\varphi_3 - \varphi_1 = 2k_{\text{eff}}gT^2 - 2k_{\text{eff}}T(v_0 + \hbar k_{\text{eff}}/m), \quad (6b)$$

其中 v_0 为原子的初始速度, $k_{\text{eff}} = K_1 - K_2$ 是拉曼光束的有效波数, g 为重力加速度。因为 $\varphi_3 - \varphi_1$ 和 $\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3$ 中包含了重力加速度 g 的信息, 所以公式(4)给出了原子能态分布与重力加速度的关系。

3 有效拉比振荡频率对重力加速度测量精度的影响

首先讨论与原子相互作用的拉曼光束为严格 $\pi/2$ 脉冲情况, 即 $\Omega_{\text{eff}}\tau = \pi/2$ 。根据原子能态分布与重力加速度的关系式(4), 令 $\delta = \omega_1 - \omega_2 - (\omega_e - \omega_f)$, 原子处于 $|f\rangle$ 态的几率 P_f 可以化简为

$$P_f = [1 + \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3 + \delta\tau)]/2, \quad (7)$$

这个式子与大部分文献所得到结果相一致^[8,9]。

考虑参与干涉的原子团有一定的实际大小为 σ_0 , 拉曼光束呈高斯分布, 腰斑半径为 $w_0 = w_{01} = w_{02}$, 此时对于整个原子团而言, $\Omega_{\text{eff}}\tau$ 不严格等于 $\pi/2$, 而是有一个偏移量为 $\Delta\theta$ 。根据拉曼光束和原子是呈高斯分布的, 可以求出有效拉比振荡频率 Ω_{eff} 的平均值:

$$\langle \Omega_{\text{eff}} \rangle = \frac{\int_0^{\infty} \exp(-r^2/w_0^2) \cdot \exp(-r^2/w_0^2) \cdot \Omega_{\text{eff}} \cdot \exp(-r^2/2\sigma_0^2) \cdot N_0 \cdot 2\pi r \cdot dr}{\int_0^{\infty} \exp(-r^2/2\sigma_0^2) \cdot N_0 \cdot 2\pi r \cdot dr} = \frac{w_0^2}{4\sigma_0^2 + w_0^2} \cdot \Omega_{\text{eff}}, \quad (8)$$

其中 $\Omega_{\text{eff}} = \pi/2\tau$, N_0 为原子团中心点的原子数。那么偏移量 $\Delta\theta$ 为

$$\Delta\theta = (\Omega_{\text{eff}} - \langle \Omega_{\text{eff}} \rangle) \cdot \tau = \frac{4\sigma_0^2}{4\sigma_0^2 + w_0^2} \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

由于拉曼光束的腰斑半径远大于原子团的实际尺寸, 所以 $\Delta\theta$ 的值比较小, 这时原子处于 $|f\rangle$ 态的几率 P_f , (4)式可以化简为

$$P_f = [1 + \cos(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3 + \delta\tau)]/2 - 0.5(\Delta\theta)^2 \{1 + 4\cos[(\varphi_3 - \varphi_1 + 2T\delta + 3\tau\delta)/2] \cos[(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3 + \delta\tau)/2] + \cos[\varphi_3 - \varphi_1 + (2T + 3\tau)\delta] + 2\cos(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3 + \delta\tau)\}. \quad (10)$$

比较有效拉比振荡频率为严格 $\pi/2$ 脉冲的几率公式(7)和当有效拉比有一定偏移量时的几率公式(10), 发现(10)式是在(7)式基础上再减去一个关于偏移量 $\Delta\theta$ 的修正项, 即公式(10)等号右边的第二项。

实验上得到原子干涉图样后, 一般是用(7)式对实验数据进行拟合, 最后得到重力加速度精度的大小。由于 $|\Omega_{\text{eff}}|\tau$ 的偏移量 $\Delta\theta$ 的存在, 我们需要讨论偏移量 $\Delta\theta$ 对重力加速度精度的影响。我们取法国巴黎六大 Torsten Petelski 的博士论文第五章中第 161 页上的实验数据^[11], 见图 2 所示。图 2 中, 纵轴表示的是原子的布居数, 横轴表示的是一对拉曼光束的激光相位差为 $180\delta\tau/\pi$, 图中的小方块表示的是不同拉曼光束的相位差所对应的原子布居数。实验中, 拉曼脉冲间隔时间 $T = 20$ ms, 作用时间 $\tau = 50$ μ s, 原子团平均初始速度 $v_0 = 5$ mm/s, 有

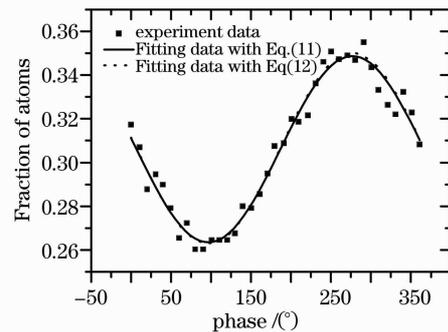


图 2 原子几率随拉曼脉冲相位差变化的曲线

Fig. 2 The Fraction of atoms versus the phase difference between Raman pulses

效拉曼波数 $k_{\text{eff}} = 1.61 \times 10^7$ /m。为了对实验数据进行拟合, 我们对公式(7)和公式(10)进行必要的变形, 分别如下所示:

$$P_f = A[1 + C\cos(\psi + x\pi/180)], \quad (11)$$

$$P_f = A[1 + C\cos(\psi + x\pi/180)] - 0.5(\Delta\theta)^2 \{1 + 4\cos[\psi - k_{\text{eff}}T(v_0 + \hbar k_{\text{eff}}/m) + 401x\pi/180] \times \cos(\psi/2 + x\pi/360) + \cos[2\psi - 2k_{\text{eff}}T(v_0 + \hbar k_{\text{eff}}/m) + 401x\pi/90] + 2\cos(\psi + x\pi/180)\}, \quad (12)$$

其中, A 表示的是原子干涉条纹的初始值, C 表示的是干涉条纹的对比度, $\Delta\psi$ 表示的是干涉条纹的不确定度, 对应的 $\Delta\psi/(k_{\text{eff}}T^2)$ 就是重力加速度精度。利用公式(11)和公式(12)分别对实验数据进行最小二乘法拟合, 结果为: 用公式(11)拟合得到的 $\Delta\psi=29.0$ mrad, 这个结论与 Petelski 论文中的结论 $\Delta\psi=28.7$ mrad^[11] 基本一致。需要说明的是由于我们采用的数据是通过画图软件转换过来, 而非 Petelski 论文中的原始数据, 所以存在一定的误差; 用(12)式拟合得到的最小 $\Delta\psi=28.1$ mrad, 所对应的 $\Delta\theta=0.01$ rad, 这个结论比用公式(11)拟合得到的 $\Delta\psi$ 小 0.9 mrad, 所对应的重力加速度精度约相差 1.43×10^{-8} g。因为拉曼光束的腰斑半径 $w_0=12.5$ mm, 那么 $\Delta\theta=0.01$ rad 对应参与干涉的原子团的实际尺寸约为 $\sigma_0=0.5$ mm, 这个结论与实验情况基本符合。从上述拟合结果可以看到, 用考虑了原子团实际大小以及拉曼激光有效尺寸时推导出的原子能态分布与重力加速度的关系式对原子干涉条纹进行拟合, 能够得到更加精确的重力加速度测量精度。

4 结 论

随着原子干涉仪在重力加速度测量领域中的应用, 对重力加速度的测量精度要求不断地提高, 对原子重力仪的精度分析就显得越来越重要。本文推导出了原子干涉后原子的能态布居数与重力加速度之间的较严格关系式, 并利用这个关系式分析了原子团实际大小、拉曼脉冲激光有效尺寸对重力加速度

测量精度的影响。这些分析数据对利用原子干涉仪测量重力加速度实验提供一定的参考值, 对实验过程具有指导意义。

参 考 文 献

- 1 C. R. Hagen. Aharonov-bohm scattering of particles with spin [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(5): 503~506
- 2 M. V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic transformations[J]. *Proc. Rev. Soc. London, Ser. A*, 1984, **392**(1802): 45~57
- 3 M. Kasevich, S. Chu. Measurement of the gravitational acceleration of an atom with a light-pulse atom interferometer[J]. *Appl. Phys. B*, 1992, **54**(5): 321~332
- 4 D. S. Weiss, B. C. Young, S. Chu. Precision measurement of \hbar/mc_s based on photon recoil using laser-cooled atoms and atomic interferometry[J]. *Appl. Phys. B*, 1994, **59**(3): 217~253
- 5 A. Peters, K. Y. Chung, S. Chu. High-precision gravity measurements using atom interferometry [J]. *Metrologia*, 2001, **38**(1): 25~61
- 6 J. M. McGuirk, G. T. Foster, J. B. Fixler *et al.*. Sensitive absolute-gravity gradiometry using atom interferometry [J]. *Phys. Rev. A*, 2002, **65**(3): 033608
- 7 N. Yu, J. M. Kohel, J. R. Kellogg *et al.*. Development of an atom-interferometer gravity gradiometer for gravity measurement from space[J]. *Appl. Phys. B*, 2006, **84**(4): 647~652
- 8 A. Peters, K. Y. Chung, S. Chu. Measurement of gravitational acceleration by dropping atoms [J]. *Nature*, 1999, **400**(6747): 849~852
- 9 P. Wolf, P. Tournenc. Gravimetry using atom interferometers: some systematic effects [J]. *Phys. Lett. A*, 1999, **251**(4): 241~246
- 10 Zheng Senlin, Lin Qiang. The matrix method in treating atom interferometer[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(6): 860~864
郑森林, 林 强. 分析原子干涉仪的矩阵方法[J]. *光学学报*, 2005, **25**(6): 860~864
- 11 T. Petelski. Atom Interferometers for Precision Gravity Measurements[D]. Florence: University of Florence, 2002, 161~167