

一种三维超材料的非线性磁响应

王政平 武立华 伍法美

(哈尔滨工程大学理学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要 理论研究了将金属线和谐振环埋入非线性介质构成的具有三维周期性结构的超材料 (metamaterial) 的有效磁响应, 推导了在裂环谐振器 (SRR) 间耦合条件下有效磁导率的表达式, 计算了该种超材料在有 SRR 间耦合和无 SRR 间耦合条件下的非线性磁响应。结果表明, 虽然二者的磁导率表达式非常相似, 但两种条件下的有效磁响应特性仍然表现出明显不同的性质。此结果对于实现三维非线性超材料及优化其结构设计有参考意义。

关键词 非线性光学; 超材料; 回滞效应; 有效磁导率

中图分类号 O437.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20092912.3458

Nonlinear Magnetic Response of a 3-Dimensional Metamaterial

Wang Zhengping Wu Lihua Wu Famei

(School of Sciences, Harbin Engineering University, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

Abstract The effective magnetic nonlinear response of a 3-dimensional composite created by periodical arrays of wires and split-ring resonators (SRR) embedded into a nonlinear dielectric, was analyzed theoretically, the general expression of the effective permeability for the composite with the consideration of the effects of mutual interactions among the SRR was derived, and the nonlinear magnetic response with and without the mutual interaction effects was calculated. It could be demonstrated that the nonlinear permeability is obviously different for the two cases even though the expressions of the nonlinear permeability of them are very similar. The results are expected to have referential meaning for the realization and design optimization of nonlinear metamaterials.

Key words nonlinear optics; metamaterials; hysteresis effect; effective permeability

1 引言

早在 20 世纪 40 年代, 就有人提出了负折射的概念^[1]。1968 年 Veselago^[2] 报告了同时具有负介电常数和负磁导率的介质 (双负材料, Double negative material, DNG) 的电动力学性质, 指出这种介质具有奇异的物理特性, 如反多普勒效应、负折射、反切伦柯夫辐射等。因为在这种物质中, 波矢、电场强度与磁场强度三者之间遵循左手螺旋关系, 故也称这种材料为左手材料 (Left-handed materials, LHM)。30 年后人们基于有效介质理论分别在理论^[3,4] 和实验^[5] 上证明了用金属线 (wires) 和裂环谐振器 (Split ring resonators, SRR) 构成的周期性结构实现 LHM 的可能性与可行性。目前, 国际上学者将由人工设计的、具有特异电磁性质的结构安排制备形成的材料统称

为超材料 (metamaterial), 其中除了 LHM 外, 还包括那些仅有负的介电常数的材料 (电单负材料, Epsilon-negative, ENG) 及仅有负的磁导率的材料 (磁单负材料, Mu-negative, MNG)。相应地将同时具有正介电常数和正磁导率的介质称为双正材料 (Double positive materials, DPS) 或右手材料 (Right handed materials, RHM)。

迄今为止, 大多数对超材料的研究还主要集中在其线性特性方面, 即认为材料的介电常数和磁导率与外加电场和磁场强度之间无关系。近年来, 人们也开展了对超材料非线性光学特性的研究。2003 年 Zharov 等^[6] 在忽略谐振环间互感条件下分析了由金属线和 SRR 构成的二维周期性结构的磁非线性特性, 给出了磁导率与外场强度的非线性关

收稿日期: 2008-12-12; 收到修改稿日期: 2009-03-11

作者简介: 王政平 (1949—), 教授, 博士生导师, 主要从事异质材料领域方面的研究。E-mail: zpwang@hrbeu.edu.cn (中国光学学会高级会员号: S040420057S)

系。该研究结果激起了人们研究超材料非线性特性的浓厚兴趣。随后研究者们对于超材料在二次谐波产生^[7]、三波混频现象^[8]、四波混频现象^[9]、光子特性^[10]等非线性光学分支领域中的特性分别开展了研究。关于超材料非线性性质的应用如光学双稳态^[11]、超短脉冲的传输^[12]等的研究也有报道。以上理论研究都没有考虑 SRR 间互感及其大小变化对这种结构非线性磁响应的影响。已有研究表明,在不考虑各个 SRR 间的耦合情况下这种结构的磁导率的理论分析结果和仿真结果之间有明显偏差^[13],而且各个 SRR 间的相互作用显著地影响其谐振频率的位置^[14]。所以这种结构中 SRR 间的耦合效应对其磁非线性的影响是不可忽视的。基于此,本文研究了 SRR 间互感对由金属线和 SRR 构成的三维周期性结构超材料在有互感和无互感条件下的有效非线性磁响应,计算得到了该结构有效磁导率实部和虚部随外磁场变化的非线性变化。研究表明:磁导率实部对外磁场的响应仍然具有回滞效应。这种现象可能被用于实现光学双稳态。本文还讨论了该超材料在不同互感条件下针对某一频率范围内的入射电磁波在 DPS, LHM, ENG 与 MNG 材料之间的跳变现象,表明通过控制外场强度可实现控制结构透射特性的目的。这种现象可能被用于实现微波或光学开关器件。以上结果对于实现非线性 LHM 及其材料结构的优化设计有重要的参考意义。

2 模型及理论分析

由金属线和 SRR 构成的三维周期性超材料的结构如图 1 所示^[15],其中 a 为 SRR 半径, d_0 为 SRR 狭缝间距, r 为金属线半径, d 为结构周期。在外磁场存在情况下,由微观磁场 \mathbf{H}' 和宏观磁场 \mathbf{H} 的洛伦兹-洛伦茨(Lorentz-Lorenz)关系^[16] $\mathbf{H}' = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}/3 = \mathbf{B} - 8\pi\mathbf{M}/3$ 及磁感应强度的定义式 $\mathbf{B} = \mu_{\text{eff}}\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ 推得其有效磁导率为

$$\mu_{\text{eff}} = 1 + \frac{1}{\mathbf{H}'/4\pi\mathbf{M} - 1/3}. \quad (1)$$

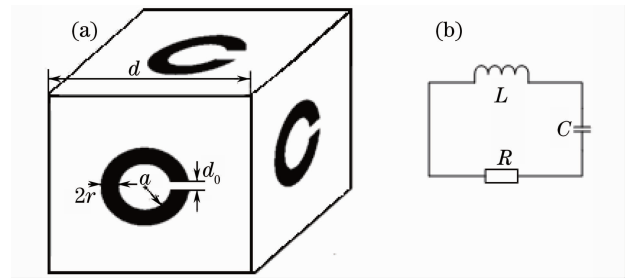


图 1 (a) 金属线与 SRR 阵列构成的超材料的结构示意图; (b) SRR 单元的等效电路

Fig. 1 (a) Schematic diagram of the metamaterial created by arrays of wires and SRR; (b) the unit structure's equivalent circuit

由文献^[17]可知,对于该结构有

$$\frac{\mathbf{H}'}{4\pi\mathbf{M}} = \frac{|\mathbf{H}|c}{2\pi^2 a^2 n_m I}, \quad (2)$$

式中 a 为 SRR 半径, n_m 为 SRR 体密度, I 为 SRR 的电流, c 为真空中的光速。当外磁场取 $e^{i\omega t}$ 形式,则电流 I 可表示为

$$I = \frac{\epsilon}{\sum_{n \neq n'} Z_{m'} + Z_n}, \quad (3)$$

式中 Z_n 为第 n 个 SRR 的阻抗, $Z_{m'}$ 为第 n 个 SRR 和第 n' 个 SRR 间的互阻抗, ω 为入射光的角频率。令 $\sum_{n \neq n'} Z_{m'} + Z_n = Z$ 且 $Z_n = 1/(i\omega C) + i\omega L + R$, L 为 SRR 的自感, C 为 SRR 狭缝间的电容, R 为 SRR 的电阻。SRR 内由外场产生的电动势为 $\epsilon = ZI$,又沿着电流环路总的电压降为 $\epsilon = RI + I/(i\omega C) + i\omega IL - i\omega IM$ ^[13], M 代表 SRR 间的互感系数。所以有

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L - i\omega M. \quad (4)$$

应用(1)式~(4)式得到

$$\mu_{\text{eff}} = 1 + \frac{F\omega^2}{\omega_{0\text{NL}}^2 - \omega^2(1 + F/3) + i\Gamma\omega}, \quad (5)$$

式中 $\omega_{0\text{NL}}$ 为非线性本征频率, $F = \frac{2\pi n_m (\pi a^2)^2}{c^2 (L - M)}$ 为结构参数, $\Gamma = R/(L - M)$ 为损耗系数。所以无互感和有互感两种情况下非线性本征频率分别为

$$\omega_{0\text{NL}} = 1/\sqrt{CL} = 2\sqrt{d_0/\epsilon_D}(|\mathbf{E}|^2)r^2L \quad (6)$$

$$\omega_{0\text{NL}} = 1/\sqrt{C(L - M)} = 2\sqrt{d_0/\epsilon_D}(|\mathbf{E}|^2)r^2(L - M) \quad (7)$$

式中 M 为互感系数。比较(6)式和(7)式,可看出互感对非线性频率的影响。由(5)式可知 SRR 间的耦合增大了超材料的损耗。又由外场与非线性本征频率的表达式^[6]

$$|\mathbf{H}|^2 = \alpha A^2 E_C^2 \frac{(1 - \omega_{0\text{NL}}^2/\omega_0^2) [(\omega_{0\text{NL}}^2/\omega_0^2 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (\omega^2/\omega_0^2)\gamma^2]}{(\omega_{0\text{NL}}^2/\omega_0^2)^6}, \quad (8)$$

式中 $A^2 = 16\epsilon_{D0}^3\omega_0^2(2r)^2/c^2$, $\omega_0 = (c/a)[d_0/(\pi 2r\epsilon_{D0})]^{1/2}$ 为该超材料的线性本征频率, ϵ_{D0} 为线性介电常数, γ 为磁损耗系数, 可确定非线性本征频率对外磁场 $|\mathbf{H}|$ 的依赖关系(即可求得 ω_{0NL})。然后再利用非线性本征频率与非线性介电常数的关系表达式 $\omega_{0NL} = 1/\sqrt{C(L-M)} = 2\sqrt{d_0/\epsilon_D(|\mathbf{E}|^2)r^2(L-M)}$ 得到非线性介电常数对外磁场的依赖关系 $\epsilon_D(|\mathbf{E}|^2) = \epsilon_D(|\mathbf{E}(\mathbf{H})|^2)$ 。最后, 将非线性本征频率表达式代回(5)式中并化简得到

$$\mu_{\text{eff}} = 1 + \frac{F\omega^2}{4d_0/[\epsilon_D(|\mathbf{E}(\mathbf{H})|^2)r^2(L-M)] - \omega^2(1+F/3) + i\Gamma\omega}, \quad (9)$$

从(9)式可看出电介质的非线性特性是如何影响磁导率的非线性响应的。

3 有效磁导率对外磁场变化的非线性关系

利用(6)式~(9)式可计算得到有效磁导率在各个 SRR 间存在耦合及无耦合条件下随外磁场的变化规律。计算结果如图 2 所示。

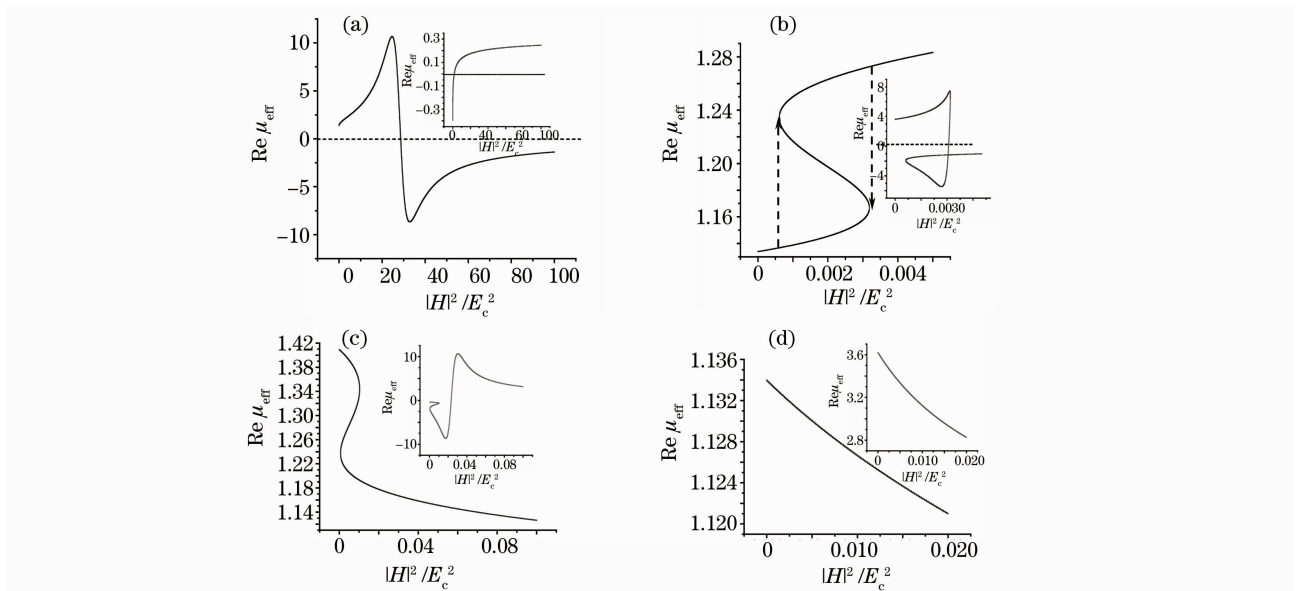


图 2 有效磁导率实部随外磁场强度的变化, 图中出现的插图为在 $M=0$ 条件下的计算结果。(a) $\omega/\omega_0 = 1.2, \alpha = 1$;
(b) $\omega/\omega_0 = 0.8, \alpha = 1$; (c) $\omega/\omega_0 = 1.2, \alpha = -1$; (d) $\omega/\omega_0 = 0.8, \alpha = -1$

Fig. 2 The real part of the effective magnetic permeability vs. strength of external magnetic field. The right insets show the real part of the effective permeability vs. strength of external magnetic field with the condition of $M=0$. (a) $\omega/\omega_0 = 1.2, \alpha = 1$; (b) $\omega/\omega_0 = 0.8, \alpha = 1$; (c) $\omega/\omega_0 = 1.2, \alpha = -1$; (d) $\omega/\omega_0 = 0.8, \alpha = -1$

SRR 狭缝嵌入的克尔介质的介电常数可表示为 $\epsilon_D(|\mathbf{E}|^2) = \epsilon_{D0} + \alpha \frac{|\mathbf{E}|^2}{E_c^2}$, $\alpha = \pm 1$ 分别代表克尔聚焦和非聚焦情况, E_c 为非线性电介质的特征电场强度值^[18]。根据以上理论分析结果可以计算出该超材料的有效磁导率和在两种条件下磁导率对外磁场的响应。当 $a = 0.5 \text{ cm}, r = 0.02 \text{ cm}, d_0 = 0.001 \text{ cm}, d = 1 \text{ cm}$ 时, 由以上参数计算得到^[17,13] $L = 1.6 \times 10^{-18} \text{ s}^2/\text{cm}, M = 1.37 \times 10^{-18} \text{ s}^2/\text{cm}$, 图 2 分别给出了有效磁导率实部在聚焦介质和散焦介质情况下的非线性特性。

由图 2 可知, 即使是存在很弱的 SRR 间的耦合

情况下, 所研究的超材料的非线性磁响应也与无 SRR 间的耦合情况下的响应相去甚远, 所以 SRR 间的耦合是不如忽视的。值得指出的是, 只有考虑 SRR 间的耦合情况得到的有效磁特性才更接近于实际情况。

图 2(a) 给出了在聚焦 ($\alpha = 1$) 且 $\omega_0 < \omega < \omega_p$ (ω_p 为等离子频率) 情况下, 有效磁导率实部随外磁场强度的变化情况。由图可见, 在存在 SRR 间耦合的情况下, 有效磁导率实部值随外磁场强度增加先是增大, 此时材料特性为 ENG, 此时超材料与空气界面只存在 TM 表面波, 这一点可在超透镜成像方面被用于放大倏逝波。当外磁场强度变化到某一

值时, $\text{Re}\mu_{\text{eff}}$ 将跳变为负值。此时该超材料特性由 ENG 材料跳变为 DNG。随外磁场强度的增加, 超材料由最初的不透明介质向透明介质转变, 表明通过改变外场强度可实现改变结构透射特性的目的。此外由于非线性折射率正比于 $|\mathbf{E}|^2$, 当 $\text{Re}\mu_{\text{eff}} < 0$ 时, 随着外磁场强度的增加非线性折射率增大, 所以在 SRR 中的局域电场不断增大, 因而在此情况下可以获得较强的非线性效应。

图 2(b) 为在聚焦 ($\alpha = 1$) 且 $\omega < \omega_0 < \omega_p$ 的情况下, 有效磁导率实部随外磁场强度的变化情况。由该图可见, 由于非线性本征频率的平方是外磁场的三值函数, 导致有效磁导率实部在磁场变化过程中有一回滞过程。考虑到 SRR 间耦合情况, 随着外磁场强度的不断变大, 有效磁导率的实部在某一临界值处由最初的较小值跳到了较大值。由该图还可知, 在磁场强度由大变小的过程中, 有效磁导率的实部在临界值处由最初的较大值跳到较小值。这一过程可以实现光学双稳态。由于此时超材料的介电常数大于零, 所以此情况下的超材料为 DPS, 材料的光学性质为透明材料。而对于 SRR 间无耦合情况, 超材料的特性则在 ENG 材料和 LHM 间跳变, 材料由最初的不透明材料向透明材料转变。

图 2(c) 给出了在散焦 ($\alpha = -1$) 且 $\omega > \omega_0 > \omega_p$ 的情况下, 有效磁导率实部随外磁场强度的变化情

况。在考虑 SRR 间耦合情况的条件下, 在外磁场由小变大的过程中, 非线性磁导率的实部在某一外磁场临界值处由较大的正值跳变到较小的正值。在外磁场由大变小的过程中, 非线性磁导率的实部在另一外磁场临界值处也发生数值跳变(由较小值跳变到较大值)。此情况下的超材料的特性为 DPS, 此时材料为光学透明。对于 SRR 间无耦合的情况, 这种超材料的特性则可以在 MNG 材料和 DPS 材料间跳变, 材料也可以由最初的不透明材料向透明材料转变。

图 2(d) 描述了在散焦且 $\omega_p < \omega < \omega_0$ 的情形下, 有效磁导率实部随外磁场强度的变化情况。随着外磁场增大, 有效磁导率实部逐渐减小。在此条件下, 该结构的磁导率的实部始终为正值, 所以该结构是 DPS 材料。图 2(b) 与 (c) 显示的回滞特性有可能在光学双稳态器件中得到应用。

图 3 给出了该超材料的有效磁导率虚部对外磁场的非线性响应曲线。

由图 3(a) 可知, 对于存在环间耦合情形, 随着外磁场强度的增加, 该超材料的损耗将减小。当外场强度增至某一值时, 该超材料的损耗又将增大。由图 3(b)、(c)、(d) 可见, 存在 SRR 间耦合的情况下该超材料的损耗要比无环间耦合时情况大。这与理论分析结果完全一致。

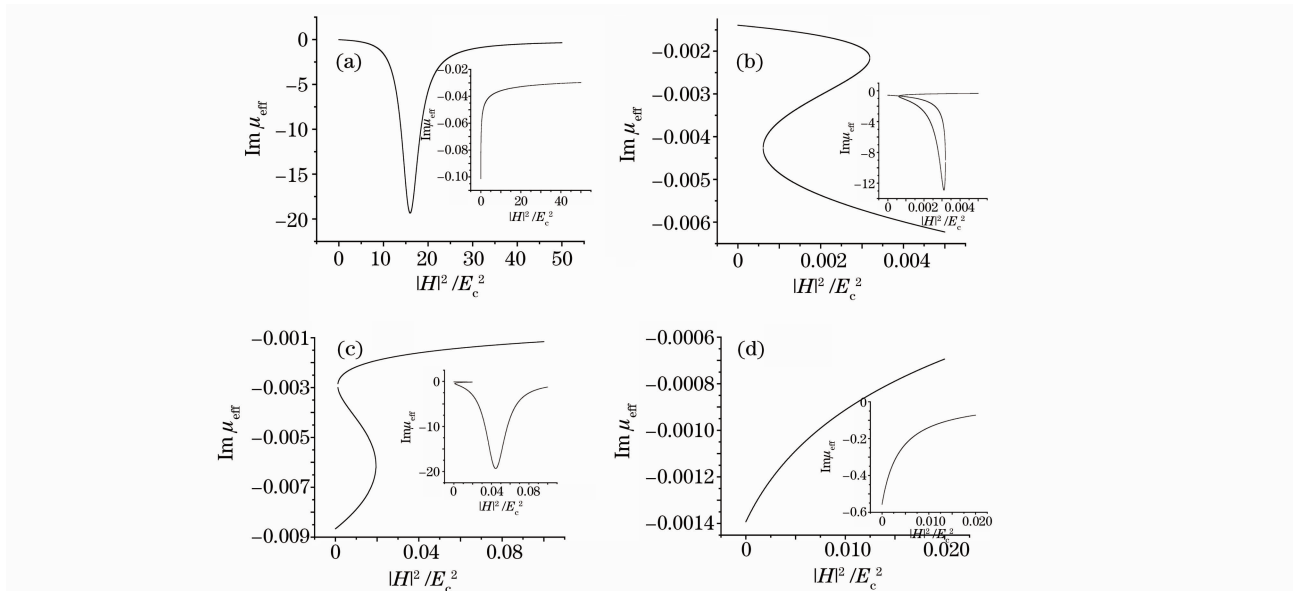


图 3 有效磁导率虚部随外场强度的变化, 图中出现的插图为在 $M=0$ 条件下的计算结果。(a) $\omega/\omega_0 = 1.2, \alpha = 1$;

(b) $\omega/\omega_0 = 0.8, \alpha = 1$; (c) $\omega/\omega_0 = 1.2, \alpha = -1$; (d) $\omega/\omega_0 = 0.8, \alpha = -1$

Fig. 3 The imaginary part of the permeability vs. strength of external magnetic field. The right insets show the imaginary part of the effective permeability vs. strength of external magnetic field with the condition of $M=0$. (a) $\omega/\omega_0 = 1.2,$

$\alpha = 1$; (b) $\omega/\omega_0 = 0.8, \alpha = 1$; (c) $\omega/\omega_0 = 1.2, \alpha = -1$; (d) $\omega/\omega_0 = 0.8, \alpha = -1$

外场角频率对于导致该材料特性跳变的磁场强度临界值有明显的影响。当外场角频率和该超材料的线性本征频率相差较大时,即使非线性本征频率与外场频率差别较小,也可以降低该材料特性跳变点的外磁场强度临界值,如图 4 所示。

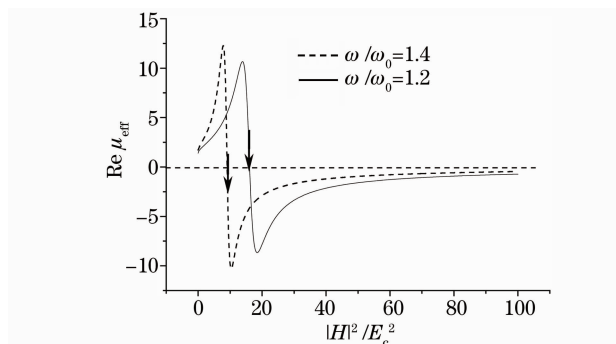


图 4 不同 ω/ω_0 值条件下有效磁导率实部随外磁场强度的变化

Fig. 4 The real part of the effective permeability vs. strength of the magnetic field for different values of ω/ω_0

图 4 中分别给出了 $\omega/\omega_0 = 1.2$ 及 $\omega/\omega_0 = 1.4$ 两种情况下有效磁导率实部随外磁场变化的情况。当 $\omega/\omega_0 = 1.2$ 时,该超材料由 ENG 材料有效磁导率实部由正值跳变到负值的外场临界值约为 $3.91E_c$; 当 $\omega/\omega_0 = 1.4$ 时,其相应的外场临界值约为 $3.00E_c$, 所以通过选择 ω/ω_0 的值可以有效控制跳变点的值。此结果与不考虑 SRR 间耦合情况正好相反。

4 结 论

本文研究了一种具有周期性微结构的三维超材料的有效磁导率的非线性及其对该超材料属性的影响,计算得到了 SRR 间存在耦合和无耦合情况下其有效磁导率实部和虚部随外磁场强度的变化关系。研究表明,这种超材料有效磁导率实部对外磁场的非线性响应具有回滞特性。共同考虑该超材料的介电常数,表明在一定的条件下,这种超材料的性质可在 DPS, DNG, ENG 及 MNG 之间转换。利用此结果可以实现对这种超材料属性的调控。另外,这种超材料磁导率随外场强度的变化关系可增强非线性效应和实现双稳态转化。该研究结果对于微波/光开关等器件研究有一定的参考意义。

参 考 文 献

1 L. I. Mandel'shtam. Group velocity in crystal lattice[J]. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 1945, **15**, 475~478

- 2 V. G. Veselago. The electrodynamics substances with simultaneously negative values of ϵ and μ [J]. *Sov. Phys. Usp.*, 1968, **10**(14): 509~514
- 3 J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart *et al.*. Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, **76**(25): 4773~4776
- 4 J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins *et al.*. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena [J]. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, 1999, **47**(11): 2075
- 5 D. R. Smith, W. Padilla, D. C. Vier *et al.*. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **84**(18): 4184~4187
- 6 A. A. Zharov, I. V. Shadrivov, Y. S. Kivshar. Nonlinear properties of left-handed metamaterials [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2003, **91**(3): 037401-1~037401-4
- 7 N. Mattiucci, G. D. Aguanno, M. J. Bloemer *et al.*. Second-harmonic generation from a positive-negative index material heterostructure [J]. *Phys. Rev. E.*, 2005, **72** (6): 066612-1~066612-8
- 8 M. Lapine, M. Gorkunov. Three-wave coupling of microwaves in metamaterial with nonlinear resonant conductive elements [J]. *Phys. Rev. E.*, 2004, **70**(6): 066601-1~066601-7
- 9 A. K. Popov, S. A. Myslivets, T. F. George *et al.*. Four-wave mixing, quantum control, and compensating losses in doped negative-index photonic metamaterials [J]. *Opt. Lett.*, 2007, **32**(20): 3044~3046
- 10 M. Marklund, P. K. Shukla, L. Stenflo. Ultrashort solitons and kinetic effects in nonlinear metamaterials [J]. *Phys. Rev. E.*, 2006, **73**(3): 037601-1~037601-4
- 11 N. M. Litchinitser, I. R. Gabitov, A. I. Mainmistov. Optical bistability in a nonlinear optical coupler with a negative index channel [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **99** (11): 113902-1~113902-4
- 12 Zhuo Hui, Wen Shuangchun. Property of ultrashort electromagnetic pulse propagation in metamaterial [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(8): 1475~1480
- 卓 辉,文双春. 超常介质中超短电磁脉冲的传输特性研究[J]. *光学学报*, 2007, **27**(8): 1475~1480
- 13 Chen Hongsheng. *Equivalent Circuit Model and Experimental Study of Metamaterials* [D]. 2005. 31~39
- 陈红胜. 异向介质的等效电路理论和实验研究 [D]. 2005. 31~39
- 14 M. Gorkunov, M. Lapine, E. Shamonina *et al.*. Effective magnetic properties of a composite material with circular conductive elements [J]. *Eur. Phys. J. B.*, 2002, **28**: 263~269
- 15 A. A. Zharov, I. V. Shadrivov, Y. S. Kivshar. Suppression of left-handed properties in disordered metamaterials [J]. *J. Appl. Phys.*, 2005, **97**, 113906-1~113906-3
- 16 M. Born, E. Wolf. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light* [M]. UK: Cambridge University Press, 2002.
- 17 I. V. Shadrivov, N. A. Zharova, A. A. Zharov *et al.*. Defect modes and transmission properties of left-handed bandgap structures [J]. *Phys. Rev. E.*, 2004, **70** (4): 046615-1~046615-6
- 18 A. M. Belyantsev, V. A. Kozlov, V. I. Piskaryov. Submillimetre wave harmonic generation in magnetized plasma in n-InSb [C]. *Infrared Physics*, 1981, **21**: 79~84