

# 二值图像的 Tchebichef 矩缩放不变量

吴海勇

(南京晓庄学院物理与电子工程学院, 江苏 南京 211171)

**摘要** 提出了一种新的 Tchebichef 矩的缩放不变量。利用递降阶乘和第一类 Stirling 数, 将 Tchebichef 多项式表示为幂级数的线性组合, 分离出包含在缩放后图像矩中的缩放系数, 然后用第二类 Stirling 数和递降阶乘将新得到的幂级数转回为 Tchebichef 多项式组合。这样 Tchebichef 矩的缩放不变量可以转化为原始矩的线性组合来计算, 计算量小, 没有迭代误差积累。实验表明, 提出的描述子能够更好地提取二值图像的缩放不变特征。

**关键词** 图像处理; 缩放不变量; 递降阶乘; Tchebichef 离散正交矩

**中图分类号** TP391. 41 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20092912.3374

## Scale Invariants of Tchebichef Moments for Binary Image

Wu Haiyong

(School of Physics and Electronic Engineering, Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing, Jiangsu, 211171, China)

**Abstract** New scale invariants of Tchebichef moments are proposed. Using the falling factor and the first Stirling numbers, Tchebichef polynomials are represented with the linear combinations of power series, therefore, scale factors in moments of scaled image are separated. Then, new power series are transformed back to Tchebichef polynomials. Consequently, scaled invariants of Tchebichef moments can be expressed as linear combinations of original moments. They have lower the computational complexity and no iterative error accumulations. Experiments show that the proposed descriptors have better performance in extracting scale invariant features of a binary image.

**Key words** image processing; scale invariants; falling factor; Tchebichef discrete orthogonal moments

## 1 引 言

M. K. Hu<sup>[1]</sup>提出了基于几何矩的不变量, 在图像平移、缩放和旋转后能够保持不变, 因而在图像分析和模式识别中得到了广泛应用。但是, 几何矩的核函数是非正交的多项式, 使得图像重建<sup>[2~5]</sup>变得相当困难, 高阶矩的抗噪声能力比较差。R. Mukundan 等<sup>[6]</sup>, Yap P. T.<sup>[7]</sup>提出了离散 Tchebichef 矩和 Krawtchouk 矩, 具有不需要进行积分的近似, 值的动态范围变化较小, 不需要坐标空间的转换等优点, 相比于传统的连续矩<sup>[8,9]</sup>, 能够更好地表现图像的特征。

Zhu Hongqing 等<sup>[10]</sup>构造了一种新的 Tchebichef 矩的缩放不变量, 表示为 Tchebichef 矩的组合, 避免了用几何矩间接表示时, 对噪声敏感的缺点。但是, 组合系数需要多次迭代才能得到, 计算量大, 存在误差积累。本文提出了一种新的 Tchebichef 矩的不变量, 并将之表示为系数可以直接计算的 Tchebichef 矩

的组合, 有着较高的计算精度。

## 2 Tchebichef 矩的缩放不变量

### 2.1 Tchebichef 矩

$n$  阶 Tchebichef 多项式定义为<sup>[11]</sup>

$$t_n(x) = (1-N)_n \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (-x)_k (1+n)_k}{(k!)^2 (1-N)_k},$$
$$n, x = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

式中  $(a)_n$  是 Pochhammer 符号:

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1),$$
$$n \geq 1 \text{ 且 } (a)_0 = 1 \quad (2)$$

Tchebichef 多项式满足正交性:

$$\sum_{x=0}^{N-1} t_n(x)t_m(x) = \rho(n, N)\delta_{nm}, \quad 0 \leq m, n \leq N-1 \quad (3)$$

式中

$$\rho(n, N) = \frac{(N+n)!}{(2n+1)(N-n-1)!} \quad (4)$$

收稿日期: 2009-02-13; 收到修改稿日期: 2009-03-23

基金项目: 江苏省教育厅自然科学基金(03KJD140120)资助课题。

作者简介: 吴海勇(1976—), 男, 硕士, 讲师, 主要从事医学图像的处理、模式识别等方面的研究。E-mail: wu.haiyong@163.com

因为 Tchebichef 多项式的值以  $N^n$  增长, 计算时通常用尺度变换后多项式<sup>[12]</sup>:

$$\bar{t}_n(x) = \frac{t_n(x)}{\beta(n, N)} = \frac{t_n(x)}{\sqrt{\rho(n, N)}}. \quad (5)$$

一幅大小为  $N \times N$ , 灰度为  $f(x, y)$  的图像,  $p+q$  阶 Tchebichef 矩定义为

$$T_{pq}^f = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \bar{t}_p(x) \bar{t}_q(y) f(x, y). \quad (6)$$

### 2.2 Tchebichef 多项式一些性质

与 Pochhammer 符号类似, 递降阶乘  $\langle a \rangle_n$  定义为

$$\langle a \rangle_n = a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1) = (-1)^n (-a)_n, \quad n \geq 1 \text{ 且 } \langle a \rangle_0 = 1 \quad (7)$$

Tchebichef 多项式可以改写为

$$\begin{aligned} \bar{t}_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{\rho(n, N)}} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k!)^2} \frac{(1-N)_n}{(1-N)_k} \\ \langle x \rangle_k &= \sum_{k=0}^n c(n, k) \langle x \rangle_k, \end{aligned} \quad (8)$$

显然,

$$c(n, k) = \frac{1}{\sqrt{\rho(n, N)}} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k!)^2} \frac{(1-N)_n}{(1-N)_k}, \quad (9)$$

$\langle x \rangle_n$  也可用 Tchebichef 多项式展开<sup>[13]</sup>:

$$\langle x \rangle_n = \sum_{k=0}^n d(n, k) \bar{t}_k(x), \quad (10)$$

式中

$$d(n, k) = (-1)^{n+k} \frac{\sqrt{\rho(k, N)} (2k+1)(n!)^2 (1-N)_n}{(n+k+1)!(n-k)!(1-N)_k}, \quad (11)$$

递降阶乘和幂级数  $x^n$  之间也可以相互展开<sup>[14]</sup>:

$$\langle x \rangle_n = \sum_{i=0}^n s_1(n, i) x^i, \quad (12)$$

$$x^n = \sum_{i=0}^n s_2(n, i) \langle x \rangle_i, \quad (13)$$

式中  $s_1(n, i)$  为第一类 Stirling 数, 满足迭代关系:

$$\begin{aligned} s_1(0, 0) &= 1, \\ s_1(0, i) &= s_1(n, 0) = 0, \quad n \geq 1, i \geq 1 \\ s_1(n, i) &= s_1(n-1, i-1) - (n-1)s_1(n-1, i), \end{aligned} \quad (14)$$

$s_2(n, i)$  为第二类 Stirling 数, 满足迭代关系:

$$\begin{aligned} s_2(0, 0) &= 1, \\ s_2(0, i) &= s_2(n, 0) = 0, \quad n \geq 1, i \geq 1 \\ s_2(n, i) &= s_2(n-1, i-1) + i s_2(n-1, i). \end{aligned} \quad (15)$$

(8) 式和 (12) 式通过递降阶乘建立了 Tchebichef 多项式和幂级数直接的联系。幂级数的运算相对比较简单, 而 (13) 式和 (10) 式可以将运算后的幂级数转换为 Tchebichef 多项式, 以便直接运用矩的定义。

### 2.3 Tchebichef 缩放不变量

记图像  $f(x, y)$  沿着  $x$  轴和  $y$  轴分别缩放  $a$  和  $b$  倍后的图像为  $g(x, y)$ , 它的  $p+q$  阶 Tchebichef 矩可以表示为

$$T_{pq}^g = ab \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \bar{t}_p(ax) \bar{t}_q(by) f(x, y), \quad (16)$$

运用 (8) 式、(10) 式、(12) 式和 (13) 式可以将 (16) 式转化为

$$T_{pq}^g = \sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^j \sum_{m=0}^q \sum_{n=0}^m \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^r c(p, k) c(q, m) s_1(k, i) a^{i+1} s_2(i, j) d(j, l) s_1(m, n) b^{n+1} s_2(n, r) d(r, s) T_{ls}^f, \quad (17)$$

(17) 式说明, 缩放后图像的 Tchebichef 矩可以表示为原始图像的 Tchebichef 矩的线性组合。根据这个关系, 构建新的 Tchebichef 矩的缩放不变量:

定理: 大小为  $N \times N$ , 灰度为  $f(x, y)$  的图像,  $p+q$  阶 Tchebichef 矩为  $T_{pq}^f$ , 令

$$\psi_{pq}^f = \sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \sum_{l=0}^j \sum_{m=0}^q \sum_{n=0}^m \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^r c(p, k) c(q, m) s_1(k, i) \lambda^{i+1} s_2(i, j) d(j, l) s_1(m, n) \theta^{n+1} s_2(n, r) d(r, s) T_{ls}^f, \quad (18)$$

式中

$$\lambda = \frac{m}{\max \left[ \sum_{x=0}^{N-1} f(x, y) \right]}, \theta = \frac{m}{\max \left[ \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \right]}, \quad (19)$$

式中  $m$  为常数, 则  $\psi_{pq}^f$  对图像缩放不变。

证明: 定义一些矩阵符号:  $\mathbf{S}_K^1 = [s_1(i, j)]$ ,  $\mathbf{S}_K^2 = [s_2(i, j)]$ ,  $\mathbf{C}_K = [c(i, j)]$ ,  $\mathbf{D}_K = [d(i, j)]$ ,  $0 \leq j \leq i \leq K$ ;  $\mathbf{\Gamma}_{KL} = (T_{i,j})$ ,  $0 \leq i \leq K, 0 \leq j \leq L$ ,  $\mathbf{A}_K = \text{diag}(\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{K+1})$ ,  $\mathbf{\Theta}_K = \text{diag}(\theta, \theta^2, \dots, \theta^{K+1})$ 。

对于缩放后的图像  $g(x, y)$ , 由(18) 式定义的  $K \times L$  阶缩放不变量矩阵可以表示为

$$\Psi_{KL}^g = \mathbf{C}_K \mathbf{S}_K^1 \mathbf{A}_K^g \mathbf{S}_K^2 \mathbf{D}_K \mathbf{T}_{KL}^g (\mathbf{C}_L \mathbf{S}_L^1 \mathbf{O}_L^g \mathbf{S}_L^2 \mathbf{D}_L)^T, \quad (20)$$

由(17)式可知

$$\mathbf{T}_{KL}^g = \mathbf{C}_K \mathbf{S}_K^1 \text{diag}(a, a^2, \dots, a^{K+1}) \mathbf{S}_K^2 \mathbf{D}_K \mathbf{T}_{KL}^f [\mathbf{C}_L \mathbf{S}_L^1 \text{diag}(b, b^2, \dots, b^{L+1}) \mathbf{S}_L^2 \mathbf{D}_L]^T, \quad (21)$$

对于二值图像, (19)式的分母分别表示垂直方向和水平方向的投影的最大值, 即图像的宽度和高度<sup>[15]</sup>, 因此,

$$\mathbf{A}_K^g \text{diag}(a, a^2, \dots, a^{K+1}) = \mathbf{A}_K^f; \mathbf{O}_L^g \text{diag}(b, b^2, \dots, b^{L+1}) = \mathbf{O}_L^f. \quad (22)$$

两类 Stirling 数之间存在着正交性:

$$\sum_{k=0}^{\max(n,m)} s_1(n, k) s_2(k, m) = \delta_{nm}, \quad (23)$$

所以  $\mathbf{S}_N^1 \mathbf{S}_N^2 = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵. 将(21) ~ (23) 式代入(20) 式, 并考虑到  $\mathbf{C}_K \mathbf{D}_K = \mathbf{I}$ , 可得

$$\Psi_{KL}^g = \Psi_{KL}^f, \quad (24)$$

即  $\Psi$  对图像是缩放不变的.

### 3 实验结果

表 1 描述了两种方法计算速度的比较, 实验对象为  $64 \text{ pixel} \times 64 \text{ pixel}$  的汉字“舒”(如图 1 所示), 沿  $x$  轴和  $y$  轴方向同时缩放  $0.5 \sim 2$  倍. 算法用 C++ 在 CPU 为 Intel Celeron 430 1.8 GHz、内存为 1 GB 的计算机上实现. 可以看出, 随着阶数的增加, 提出的不变量有着较大时间优势.

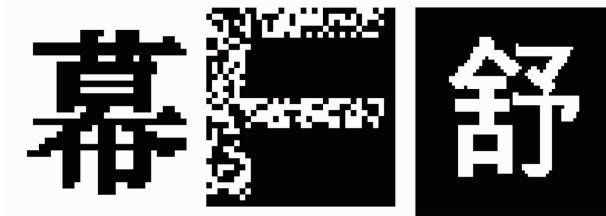


图 1 测试用的二值图像

Fig. 1 Binary images to be tested

表 1 计算时间比较 /ms

Table 1 Comparison of CPU elapsed time /ms

Scale factor	Order of invariants	References [10]'s	Proposed method
0.5	0~10	15	15
	0~30	31	16
	0~60	469	204
1.0	0~10	27	16
	0~30	47	31
	0~60	547	262
1.5	0~10	45	31
	0~30	63	47
	0~60	625	293
2.0	0~10	57	37
	0~30	107	90
	0~60	859	293

用  $32 \text{ pixel} \times 32 \text{ pixel}$  的二值图像“幕”来测试提出的缩放不变量, 表 2 描述了原始图像沿着  $x$  轴方向和  $y$  轴方向缩放不同倍数后, 用(18)式得到的缩放不变量集. (19)式中的  $m$  是一大于 1 的常数, 它使得不变量的值不至于太小而无法与 0 区分, 文中  $m$  取 10. 为了对比, 表 3 描述了同样的图用文献 [10] 的缩放不变描述子得到的不变量集. 定义不变量集的标准差除以均值来表征不变量的性能, 值越小, 表示越“不变”.

表 2 对于放大缩小后二值图像“幕”用本文提出的缩放描述子

Table 2 Proposed scale descriptors for a contracted or expanded binary image “幕”

	$\psi_{00}$	$\psi_{01}$	$\psi_{10}$	$\psi_{11}$	$\psi_{02}$	$\psi_{20}$	$\psi_{03}$	$\psi_{12}$	$\psi_{21}$	$\psi_{30}$
$a = 1.0, b = 1.0$	0.54308	-0.83371	0.82799	-0.78555	1.206	-1.1977	0.67016	-1.0289	1.0219	-0.32647
$a = 0.6, b = 1.1$	0.53667	-0.82446	0.82011	-0.76953	1.1824	-1.1765	0.64089	-0.98507	0.98107	-0.28607
$a = 1.1, b = 0.6$	0.52711	-0.81052	0.8076	-0.75978	1.1682	-1.1639	0.64194	-0.98684	0.98274	-0.30204
$a = 1.1, b = 2.3$	0.54519	-0.83927	0.83918	-0.79003	1.2163	-1.2164	0.67702	-1.0426	1.0432	-0.3341
$a = 1.2, b = 2.1$	0.54965	-0.84342	0.83661	-0.79017	1.2125	-1.2027	0.66249	-1.0165	1.0082	-0.30245
$a = 1.4, b = 1.2$	0.55768	-0.85581	0.84928	-0.80921	1.2418	-1.2325	0.69639	-1.0688	1.061	-0.34989
$a = 1.6, b = 2.4$	0.53381	-0.81741	0.80682	-0.77457	1.1862	-1.171	0.66626	-1.0205	1.008	-0.33334
$\sigma/\mu / \%$	0.0028	0.0043	0.0045	0.0048	0.0073	0.0076	0.0081	0.0123	0.0123	0.0230

表 3 对于放大缩小后二值图像“幕”用文献[10]提出的缩放描述子  
Table 3 References[10]'s scale descriptors for a contracted or expanded binary image “幕”

	$\psi_{00}$	$\psi_{01}$	$\psi_{10}$	$\psi_{11}$	$\psi_{02}$	$\psi_{20}$	$\psi_{03}$	$\psi_{12}$	$\psi_{21}$	$\psi_{30}$
$a = 1.0, b = 1.0$	74.41	51.27	48.36	42.74	33.35	39.41	38.20	27.85	27.18	34.64
$a = 0.6, b = 1.1$	67.70	46.89	44.01	38.99	30.66	35.58	34.67	25.68	24.87	30.98
$a = 1.1, b = 0.6$	71.22	49.01	47.41	40.48	32.53	38.60	35.87	26.92	26.29	33.67
$a = 1.1, b = 2.3$	80.07	55.50	51.46	46.27	35.82	41.71	41.27	30.02	29.13	36.53
$a = 1.2, b = 2.1$	71.84	50.19	47.00	42.11	32.82	38.41	37.74	27.56	26.76	33.79
$a = 1.4, b = 1.2$	79.94	54.83	51.73	45.78	35.54	42.27	41.07	29.72	28.99	37.31
$a = 1.6, b = 2.4$	71.61	49.47	46.70	41.28	32.38	38.05	36.89	27.12	26.48	33.40
$\sigma/\mu/\%$	4.1923	2.7431	2.2256	2.4128	1.4287	1.8929	2.3287	1.2319	1.2136	1.8466

表 4 和表 5 对比了(18)式和文献[10]的描述子的抗噪声性能,用  $32 \text{ pixel} \times 32 \text{ pixel}$  的二值图像“F”,加上均值为 0,方差为 0.01 的高斯噪声后,沿

着  $x$  轴方向和  $y$  轴方向缩放不同倍数后得到测试图像集。实验结果显示,本文所提出的描述子能够更好地提取图像缩放不变的特征。

表 4 对于放大缩小后二值噪声图像“F”用本文提出的缩放描述子

Table 4 Proposed scale descriptors for a contracted or expanded noised binary image “F”

	$\psi_{00}$	$\psi_{01}$	$\psi_{10}$	$\psi_{11}$	$\psi_{02}$	$\psi_{20}$	$\psi_{03}$	$\psi_{12}$	$\psi_{21}$	$\psi_{30}$
$a = 1.0, b = 1.0$	0.61647	-0.94578	0.94685	-0.89885	1.375	-1.3668	0.79826	-1.212	1.1828	-0.48295
$a = 0.6, b = 1.1$	0.63498	-0.98644	1.0151	-0.90457	1.4013	-1.4325	0.75866	-1.1667	1.1717	-0.39926
$a = 1.1, b = 0.6$	0.65008	-0.98055	0.94585	-0.97181	1.4611	-1.3983	0.91704	-1.368	1.2834	-0.63707
$a = 1.1, b = 2.3$	0.66346	-1.0121	1.0008	-0.96418	1.4656	-1.4367	0.8497	-1.2797	1.2258	-0.50524
$a = 1.2, b = 2.1$	0.61849	-0.9503	0.95415	-0.89133	1.3653	-1.3607	0.76862	-1.1678	1.1408	-0.43142
$a = 1.4, b = 1.2$	0.6147	-0.93931	0.93157	-0.89968	1.3707	-1.3496	0.80578	-1.2184	1.1772	-0.49547
$a = 1.6, b = 2.4$	0.59522	-0.91499	0.9193	-0.86348	1.3236	-1.3207	0.75676	-1.1515	1.1286	-0.4418
$\sigma/\mu/\%$	0.0124	0.0163	0.0188	-0.0246	0.0279	0.0195	0.0599	0.0695	0.0335	0.1755

表 5 对于放大缩小后二值噪声图像“F”用文献[10]提出的缩放描述子

Table 5 References[10]'s scale descriptors for a contracted or expanded noised binary image “F”

	$\psi_{00}$	$\psi_{01}$	$\psi_{10}$	$\psi_{11}$	$\psi_{02}$	$\psi_{20}$	$\psi_{03}$	$\psi_{12}$	$\psi_{21}$	$\psi_{30}$
$a = 1.0, b = 1.0$	60.2531	31.2588	27.6452	24.8515	12.2914	20.9937	21.4261	8.79398	8.85449	18.2569
$a = 0.6, b = 1.1$	62.93	33.3974	28.5142	26.8393	13.1007	21.6514	23.2958	9.3659	9.54379	18.8301
$a = 1.1, b = 0.6$	66.6538	32.8102	30.5047	25.9013	12.604	23.1197	22.3809	8.98597	8.9466	20.0676
$a = 1.1, b = 2.3$	61.1126	31.4293	27.9808	24.7587	12.0669	21.2098	21.3504	8.49244	8.57954	18.4504
$a = 1.2, b = 2.1$	56.3106	29.7661	26.1703	23.6714	11.8691	19.9309	20.3845	8.5014	8.54243	17.3105
$a = 1.4, b = 1.2$	59.903	31.3378	28.0771	25.0262	12.587	21.4469	21.6473	9.07807	9.1224	18.6825
$a = 1.6, b = 2.4$	56.8208	29.8822	26.5498	23.7653	12.0536	20.0913	20.5278	8.61548	8.65989	17.4336
$\sigma/\mu/\%$	2.9726	0.8319	1.0298	0.7209	0.2088	0.7671	0.6845	0.1731	0.2024	0.6693

## 4 结 论

在图像分析中,不变量是矩优于其它正交变换的重要特征,利用递降阶乘建立了 Tchebichef 多项式和幂级数之间的联系,从而在提取缩放系数后,将缩放不变量用原始矩来表示。从计算量、二值图像不变性和抗噪声能力三个方面,用实验分别和文献[10]提出的描述子作了比较。结果表明,由于不需要坐标转换、没有离散误差和直接计算的系数,本文提出的描述子有着较高的精度。而且,可以推广到其它离散矩,如 Krawtchouk 矩的缩放不变量计算。

## 参 考 文 献

- 1 M. K. Hu. Visual pattern recognition by moment invariants[J]. *IRE Inf. Theory*, 1962, **8**(1): 179~187
- 2 Zhang Limin, He Huiyuan, Gao Feng *et al.*. Image reconstruction in fluorescence molecular tomography based on full time-resolved scheme[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(7): 1262~1268  
张丽敏,和慧园,高峰等. 荧光分子层析中的全时间分辨图像重建法[J]. *光学学报*, 2008, **28**(7): 1262~1268
- 3 Yang Wenxia, Cai Chao, Ding Mingyue *et al.*. Characterization of aero-optic effects and restoration of aero-optical degraded images[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(2): 347~352  
杨文霞,蔡超,丁明跃等. 气动光学效应分析与气动模糊图像复原[J]. *光学学报*, 2009, **29**(2): 347~352
- 4 Zhao Lin, Jin Weiqi, Chen Yinan *et al.*. Blind restoration for

- defocus blurred image based on autocorrelation of derivative image [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(9): 1703~1709
- 赵琳, 金伟其, 陈翼男等. 基于微分图像自相关的离焦模糊图像盲复原[J]. *光学学报*, 2008, **28**(9): 1703~1709
- 5 Tao Xiaoping, Feng Huajun, Lei Hua *et al.*. A splicing method of sectioned restoration algorithm for images with space-variant point spread function[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(3): 648~653
- 陶小平, 冯华君, 雷华等. 一种空间变化 PSF 图像分块复原的拼接方法[J]. *光学学报*, 2009, **29**(3): 648~653
- 6 R. Mukundan, S. H. Ong, P. A. Lee. Image analysis by Tchebichef moments[J]. *IEEE Trans. Image Process.*, 2001, **10**(9): 1357~1364
- 7 P. T. Yap, P. Raveendran, S. H. Ong. Image analysis by Krawtchouk moments[J]. *IEEE Trans. Image Process.*, 2003, **12**(11): 1367~1377
- 8 M. R. Teague. Image analysis via the general theory of moments [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1980, **70**(8): 920~930
- 9 Ren Haiping, Ping Ziliang, Bo Wurigen *et al.*. Image description with Jacobi-Fourier moments [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(1): 5~10
- 任海萍, 平子良, 博午日亘等. 用雅可比-傅里叶矩进行图像描述 [J]. *光学学报*, 2004, **24**(1): 5~10
- 10 Zhu Hongqing, Shu Huazhong, Xia Ting. Translation and scale invariants of Tchebichef moments [J]. *Pattern Recogn.*, 2007, **40**(2): 2530~2542
- 11 Mourad E. H. Ismail. Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005: 195~217
- 12 R. Mukundan. Some computational aspects of discrete orthogonal moments [J]. *IEEE Trans. Image Process.*, 2004, **13**(8): 1055~1059
- 13 Zhang Hui, Zhou Jian, Shu Huazhong. Fast computation of Tchebichef moments [J]. *J. Southeast University*, 2006, **36**(5): 857~862
- 张辉, 周健, 舒华忠. Tchebichef 矩的快速算法 [J]. *东南大学学报*, 2006, **36**(5): 857~862
- 14 L. Comtet. Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions [M]. D. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1974: 34~46
- 15 Milan Sonka, Vaclav Hlavac, Roger Boyle. Image Processing: Analysis and Machine Vision [M]. Toronto: Thompson Learning, 2008: 354~356