

分数傅里叶分块算法全息图的编码与动态显示

韩 超 韦 穗 刘凯峰

(安徽大学光电信息获取与控制教育部重点实验室, 安徽 合肥 230039)

摘要 为了降低分数傅里叶全息图制作的复杂性,根据信号的分数傅里叶变换的定义式和非涅耳衍射公式,通过求解它们的点扩展函数(PSF),推导出分数傅里叶变换与非涅耳衍射公式的等价关系,从而把分数傅里叶变换转化为非涅耳衍射。采用人眼分辨率极限尺寸和数字微镜器件(DMD)像素的尺寸分别对物体所在平面和全息图所在平面进行抽样,运用分块算法生成分数傅里叶全息图,使计算复杂度降低为 $O[N^2 \lg(N^2/M^2)]$,提出了一种可行的动态全息显示方法,最后通过 DMD 全息显示系统对该算法生成的全息图进行实验验证。

关键词 全息术;分块算法;分数傅里叶变换;非涅耳衍射;数字微镜器件

中图分类号 O438 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20092912.3299

Coding of Tiling Algorithm Hologram of Fractional Fourier and Dynamic Display

Han Chao Wei Sui Liu Kaifeng

(Key Laboratory of Opto-Electronic Information Acquisition and Manipulation, Ministry of Education, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China)

Abstract In order to reduce complexity of generation of fractional Fourier hologram, according to signal's fractional Fourier transform and Fresnel diffraction formula, the equivalence relation between them is derived by solving their point spread functions (PSF). So fractional Fourier transform can be transformed into Fresnel diffraction. The object and the hologram plane are sampled by limit of resolution of human eye and size of micromirror of digital micromirror device (DMD). Tiling algorithm is used to generate fractional Fourier hologram, its computation complexity is decreased to $O[N^2 \lg(N^2/M^2)]$, and a feasible dynamic holographic display is proposed. Finally, the algorithm is verified by DMD holographic display system.

Key words holography; tiling algorithm; fractional Fourier transform; Fresnel diffraction; digital micromirror device (DMD)

1 引 言

全息显示技术因其特有的诸多优点而成为显示领域的一个热点课题^[1~10]。1993 年分数傅里叶变换被引入光学领域,为光的传播、干涉、衍射以及信息处理提供了一种新的思路与方法^[11~13],Lohmann 为此提出两种光学实现模型^[13],后人在用分数傅里叶变换制作全息图以及用其进行光信息处理时所用的方法皆以此为基础^[14,15]。随着计算机科学与技术

的快速的发展,用计算机制作全息图可避免复杂的
光路设计又可以节约成本,因此计算机生成全息图已成为未来全息显示的一种必然。但是采用 Lohmann 模型制作分数傅里叶全息图相对较为复杂,更为重要的是效果不太理想。通过求点扩展函数(PSF)推导出分数傅里叶变换与非涅耳衍射的等价关系,从而把分数傅里叶变换全息图的制作转化为非涅耳全息图的制作,并结合德州仪器公司生产的空间光调制器(SLM)进行编码。由于光全息术所用的全息干板的分辨率大约为 2000 lp/mm,即每

收稿日期: 2008-10-23; **收到修改稿日期**: 2008-12-29

基金项目: 国家自然科学基金(60872106)资助课题。

作者简介: 韩 超(1974—),男,博士研究生,主要从事计算全息及全息显示方面的研究。

E-mail: hanchao2006@yahoo.cn

导师简介: 韦 穗(1946—),女,教授,博士生导师,主要从事计算机视觉、图像处理及计算全息等方面的研究。

E-mail: swei@ahu.edu.cn

线对的尺寸大约为 $0.5 \mu\text{m}$,而目前空间光调制器的像素大小约为 $10 \mu\text{m}$,可见现在的空间光调制器不能满足全息显示的要求。因此如何运用已有的空间光调制器结合目前的算法及其改进算法来生成全息图以达到理想的显示效果十分必要。本文根据人眼的分辨率极限尺寸和数字微镜器件(DMD)的像素尺寸分别对物面和全息面进行抽样并采用分块^[16]算法来制成相应的全息图,在使用分块算法时将坐标原点分别选在物平面与全息图平面的中心,为了提高全息图的衍射效率,对物体和全息图作了相应的二值化处理,最后通过数字微镜全息显示系统对显示效果进行了实验验证。

2 分数傅里叶变换与非涅耳衍射的等价关系

对于一维信号的分数傅里叶变换,根据 Lohmann 给出的表达式可写为

$$\mathcal{F}_p[u(x)](x_p) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda q} \left[\frac{x^2}{\tan(p\pi/2)} - \frac{2xx_p}{\sin(p\pi/2)} + \frac{x_p^2}{\tan(p\pi/2)} \right]\right\} dx, \quad (1)$$

式中 $u(x)$ 为初始信号, \mathcal{F}_p 表示分数傅里叶变换, $\mathcal{F}_p[u(x)](x_p)$ 表示信号 $u(x)$ 的分数傅里叶变换后的信号, x 表示原始信号的坐标, x_p 表示原始信号傅里叶变换后的坐标, p 为分数阶, p 取值范围为 $-2 < p < 2$, q 为缩放因子, λ 为光的波长。令 $u(x) = \delta(x)$ 可求出分数傅里叶变换中的点扩展函数为

$$h(x) = \mathcal{F}_p[\delta(x)](x_p) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda q} \left[\frac{x^2}{\tan(p\pi/2)} - \frac{2xx_p}{\sin(p\pi/2)} + \frac{x_p^2}{\tan(p\pi/2)} \right]\right\} dx = \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda q} \frac{x_p^2}{\tan(p\pi/2)}\right], \quad (2)$$

把它拓展到二维情形得到二维的 PSF 为

$$h(x_p, y_p) = \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda q} \frac{x_p^2 + y_p^2}{\tan(p\pi/2)}\right], \quad (3)$$

因此二维的分数傅里叶变换可写为

$$\mathcal{F}_p[u(x, y)](x_p, y_p) = u(x, y) * h(x_p, y_p), \quad (4)$$

式中 $*$ 表示卷积运算。

对于旁轴近似下的非涅耳衍射公式可写为

$$U(x, y, z) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0) \times \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda z} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0, \quad (5)$$

式中 $U_0(x_0, y_0)$ 为初始信号, $U(x, y, z)$ 表示初始信号经非涅耳衍射后的信号, x_0, y_0 表示初始信号的坐标, x, y, z 表示初始信号经非涅耳衍射后的坐标, λ 表示信号的波长。令 $U_0(x_0, y_0) = \delta(x_0, y_0)$, 则非涅耳衍射中的 PSF 为

$$h(x, y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right], \quad (6)$$

故非涅耳衍射公式可写为

$$U(x, y, z) = U_0(x_0, y_0) * h(x, y), \quad (7)$$

由(3)式和(6)式可知,分数傅里叶变换的 PSF 和非涅耳衍射的 PSF 仅相差一个常数因子,故由(4)式和(7)式可得分数傅里叶变换与非涅耳衍射也仅相差一个常数因子。这样分数傅里叶变换就可以用非涅耳衍射来计算。

3 抽样和分块算法

由于人眼的分辨率为 0.175 mm ,即小于该距离的两点人眼便不能把它们区分开来,而会把它们视为一个点。在全息显示中为了做到既减少计算量又不影响成像质量,有必要充分利用人眼的分辨率极限对物波进行抽样从而减少抽样数使计算量减少。在全息显示实验过程中使用的是德州仪器公司生产 DMD,该器件是由 800×600 个, $16 \mu\text{m} \times 16 \mu\text{m}$ 的铝制微镜组成,相邻两微镜间的间隔为 $1 \mu\text{m}$ 。因此在采样时可以在物体所在的平面与全息图所在的平面分别采用不同的采样间隔,即物面根据人眼的分辨率极限进行采样,全息图所在的平面根据 DMD 微镜的尺寸大小进行采样。这样采样后就可以用一个像素较少的物体采用分块算法在全息面生成一个像素较大的全息图,从而减少了计算量。因为(5)式又可写作

$$U(x, y, z) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0) \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x_0^2 + y_0^2)\right] \times \exp\left[-\frac{2\pi}{\lambda z} (xx_0 + yy_0)\right] dx_0 dy_0,$$

故

$$U(x, y, z) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right] \cdot \mathcal{F}_F\left\{U_0(x_0, y_0) \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x_0^2 + y_0^2)\right]\right\}, \quad (8)$$

(8)式计算的复杂度为 $O(N^2 \ln N^2)$ 。按照上述的采

样方法, (8)式可表示为

$$U(m, n) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda z} [(m\Delta x)^2 + (n\Delta y)^2]\right\} \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L U_0(k, l) \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda z} [(k\Delta x_0)^2 + (l\Delta y_0)^2]\right\} \exp\left[-\frac{2\pi}{\lambda z} (m\Delta x k \Delta x_0 + n\Delta y l \Delta y_0)\right] = \mathcal{F}_F \left\{ U_0(k, l) \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda z} [(k\Delta x_0)^2 + (l\Delta y_0)^2]\right\} \right\}, \quad (9)$$

式中 $\Delta x_0 = \Delta y_0 = 0.175 \text{ mm}$, $\Delta x = \Delta y = 17 \mu\text{m}$, $K=L$ 。把物平面与全息图的坐标原点分别选在它们所在平面的中心, 将全息图分成 M 个和原物体图像具有相同采样点数的块, 如图 1 所示。原物通过菲涅耳衍射传播到全息面上 M 个与其像素数相同的相应区域。这样通过对原物的 M 次菲涅耳衍射计算即可算出物体传播到整个全息面的光场分布函数。设全息面被分的块数 $M=16$, 全息面上行与列的像素数均为 $N=1024$, 则计算复杂度降低为 $O[N^2 \text{lb}(N^2/M^2)]$, 即计算的复杂度降为原来的 60%。按照上述算法取一个 $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$ 的物体, 采用分块算法将一个 $1024 \text{ pixel} \times 1024 \text{ pixel}$ 的全息面分成 16 个 $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$ 的方块, 经计算生成全息图, 并通过 DMD 全息显示系统进行实验验证。为了提高全息图的衍射效率, 在计算过程中采用了二值化技术, 图 2 是原始物体, 图 3 是生成的全息图, 图 4 是全

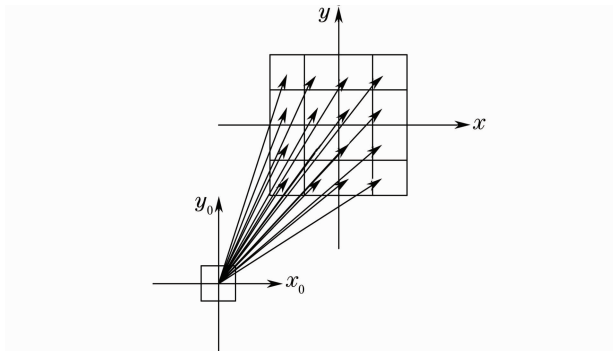


图 1 分块算法示意图

Fig. 1 Schematic diagram of tiling algorithm



图 2 原始图像

Fig. 2 Original image

息图经 DMD 重构后所生成的图像。

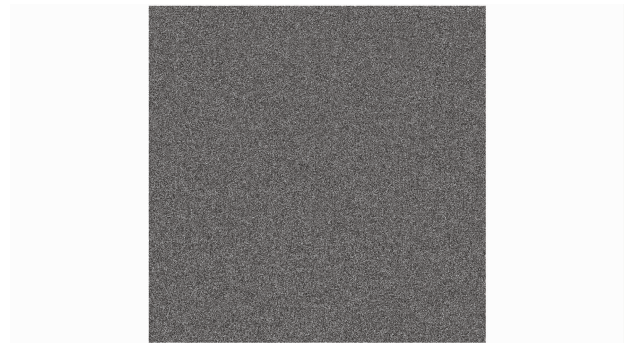


图 3 全息图

Fig. 3 Hologram

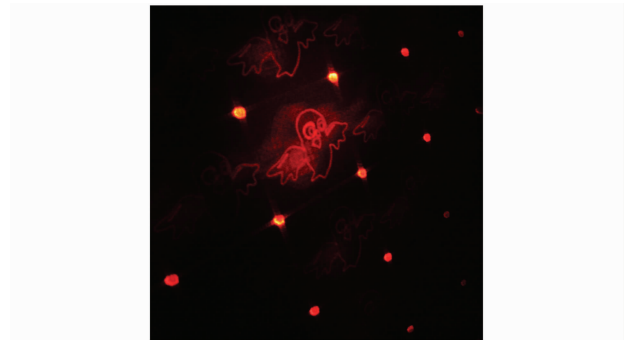


图 4 重现图像

Fig. 4 Reconstruction image

4 动态显示

采用上述方法生成的全息图还不能进行动态显示, 为了使生成的全息图能够进行动态显示, 从物体的四周对其进行拍照, 即把物体放于某圆盘中心转动圆盘, 每隔一定角度对物体拍照一次, 拍完一周为止, 对于比较大的物体如建筑物等, 可以以物体的中心为中心, 采取物体不动移动相机从周围对其拍摄, 因此这种方法既适合于尺度较小的物体也适合尺度较大的物体。相邻两个拍摄位置与圆盘中心的夹角可以根据需要取任意值, 例如 $5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ 等, 角度愈小显示效果愈好, 但是所要拍摄的图片就愈多, 此处取拍摄的角度间隔为 10° , 这样为了显示一个物体, 需要得到该物体的 36 幅原始图片, 如图 5 所示。本

文所用的原始图片来自于互联网的图片库。获得原始图片后采用上述编码方法对从不同角度拍摄的36幅原始图像进行编码分别生成相应的全息图,如图6所示。最后,用 Matlab 语言将这些全息图以一

定的帧率生成视频文件,然后输入计算机进行播放,由于与计算机相连的 DMD 全息显示系统能够和计算机保持同步,故在参考光的照射下即可进行动态显示。

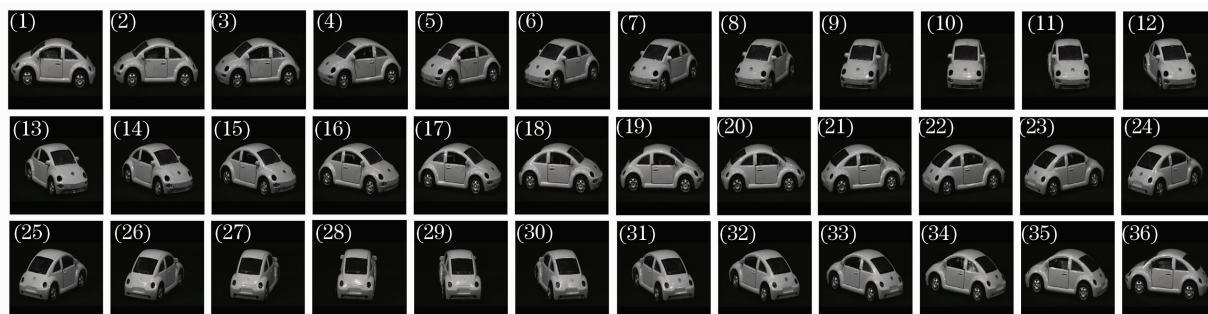


图 5 以 10° 的间隔绕汽车一周所拍的 36 幅图像

Fig. 5 36 images were taken around a car with a 10° interval between any two adjacent images

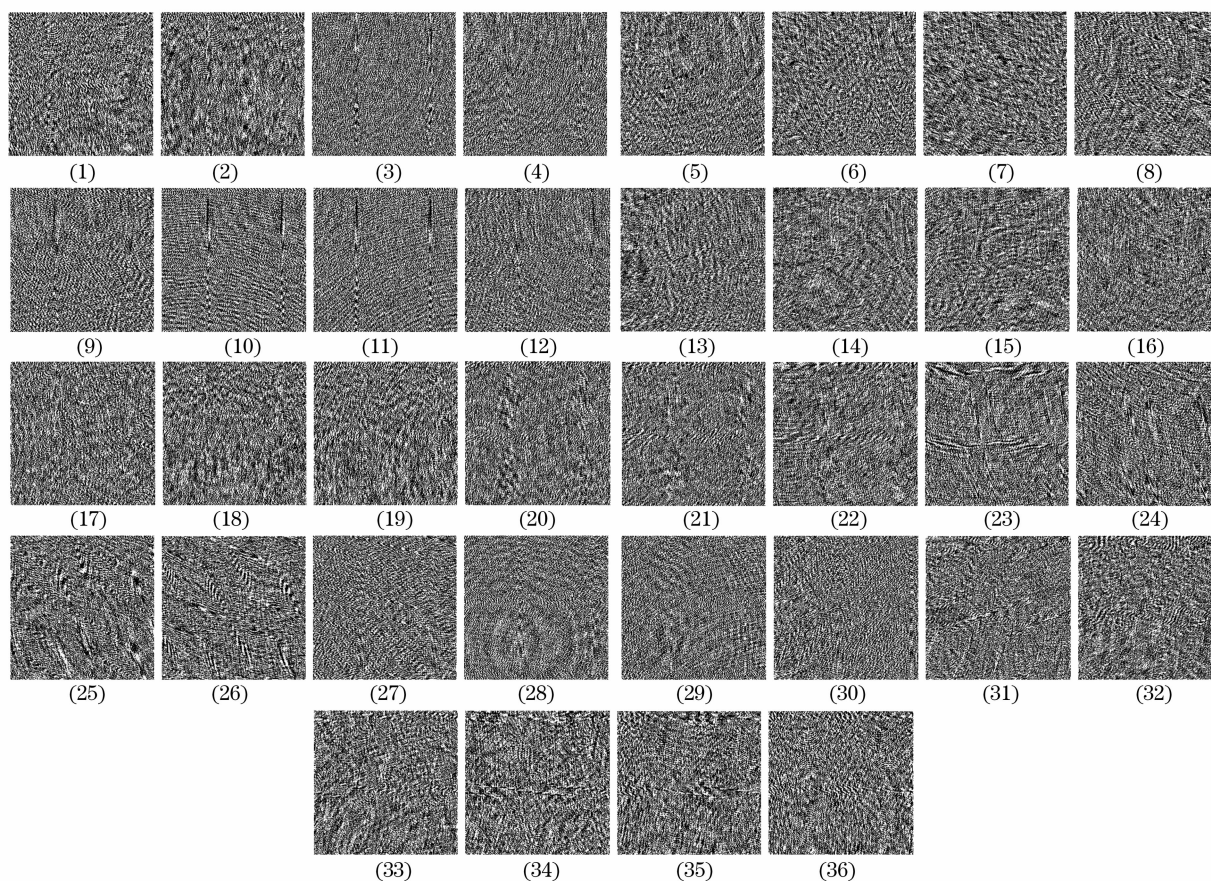


图 6 由图 5 的 36 幅图像所生成的相应的全息图

Fig. 6 Holograms generated from the 36 images of Fig. 5

5 结 论

通过求解点扩展函数来证明信号的分数傅里叶变换与非涅耳衍射的等价性。故信号的分数傅里叶变换就可由其非涅耳衍射来描述,分数傅里叶全

息图可以通过菲涅耳衍射算法来制备。在抽样时对物体和全息图分别采用不同的抽样方法,能够根据实际情形减少抽样的点数。在全息图的制备方面通过分块算法及二值化技术的运用,使全息图计算的

复杂度降低为 $O[(N^2 \text{lb}(N^2/M^2))]$, 并达到了很好的显示效果。

参 考 文 献

- 1 Lei Xu, Xiaoyuan Peng, Zhixiong Guo. Imaging analysis of digital holography [J]. *Opt. Express*, 2005, **13**(7): 2444~2452
- 2 Nobuyuki Masuda, Tomoyoshi Ito, Takashi Tanaka *et al.*. Computer generated holography using a graphics processing unit [J]. *Opt. Express*, 2006, **14**(2): 603~608
- 3 Huadong Zheng, Yingjie Yu, Cuixia Dai. A novel three-dimensional holographic display system based on LC-R2500 spatial light modulator [J]. *Optik*, 2009, **120**(9): 431~436
- 4 Sasidhar Chavali, Philip M. Birch, Rupert Young. Synthesis and reconstruction of computer generated holograms by a double pass technique on a twisted nematic-based liquid crystal spatial light modulator [J]. *Opt. Lasers Eng.*, 2007, **45**(3): 413~418
- 5 Dayong Wang, Jie Zhao, Fucui Zhang *et al.*. High-fidelity numerical realization of multiple-step Fresnel propagation for the reconstruction of digital holograms [J]. *Appl. Opt.*, 2008, **47**(19): D12~D20
- 6 Wang Dapeng, Wei Sui. Characterization of a digital micromirror device for computer generated holographic video [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(1): 50~55
王大鹏, 韦 穗. 数字微镜器件在视频全息中的应用 [J]. *光学学报*, 2008, **28**(1): 50~55
- 7 Han Chao, Wei Sui. Digital micromirror device display of phase-only hologram of binary coding of cosine [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(4): 659~663
韩 超, 韦 穗. 余弦二值编码纯相位全息图的数字微镜器件显示 [J]. *光学学报*, 2008, **28**(4): 659~663
- 8 Luo Peng, Lü Xiaoxu, Zhong Liyun. Recording and reconstruction of near-distance digital holography [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(10): 1735~1739
罗 鹏, 吕晓旭, 钟丽云. 近距离数字全息术记录和再现问题 [J]. *光学学报*, 2007, **27**(10): 1735~1739
- 9 Fan Qi, Zhao Jianlin, Li Shiyang *et al.*. Detail displaying and vision aberration rectifying of reconstructed image in digital holography [J]. *Chinese J. Lasers*, 2005, **32**(10): 1401~1405
范 琦, 赵建林, 李世扬等. 数字全息再现像的细节显示和视觉畸变矫正 [J]. *中国激光*, 2005, **32**(10): 1401~1405
- 10 Natan T. Shaked, Joseph Rosen. Modified Fresnel computer-generated hologram directly recorded by multiple-viewpoint projections [J]. *Appl. Opt.*, 2008, **47**(19): D21~D27
- 11 David Mendlovic, Haldun M. Ozaktas. Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(9): 1875~1881
- 12 Haldun M. Ozaktas, David Mendlovic. Fractional Fourier transforms and their optical implementation: II [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(12): 2522~2531
- 13 Adolf W. Lohmann. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(10): 2181~2186
- 14 Tatiana Alieva, Martin J. Bastiaans, Maria Luisa Calvo. Fractional transforms in optical information processing [J]. *EURASIP J. Appl. Signal Proc.*, 2005, **2005**(10): 1498~1519
- 15 Weimin Jin, Lihong Ma, Caijie Yan. Real color fractional Fourier transform holograms [J]. *Opt. Commun.*, 2006, **259**(2): 513~516
- 16 Richard P. Muffoletto, John M. Tyler, Joel E. Tohline. Shifted Fresnel diffraction for computational holography [J]. *Opt. Express*, 2007, **15**(9): 5631~5640