

文章编号: 0253-2239(2009)10-2762-06

# 基于图的加权核 K 均值的图像多尺度分割

李昱川<sup>1</sup> 田 铮<sup>1,2</sup>

(<sup>1</sup> 西北工业大学理学院应用数学系, 陕西 西安 710129  
<sup>2</sup> 中国科学院遥感应用研究所遥感科学国家重点实验室, 北京 100101)

**摘要** 提出改进的最小割(IMC)模型以避免分割出小的孤立点集,研究了改进的最小割模型与加权核 K 均值之间的等价关系,列举了几种常见的用于建立图割模型边权值的相似度函数,并分析了其对分割结果的影响。在此基础上,设计了一个基于图的加权核 K 均值图像多尺度分割方法,该方法既避免了基于图割的图像分割中图谱的求解问题,又避免了加权核 K 均值方法中核矩阵的选取问题,同时实现了对图像多尺度的分割。通过对该方法进行抗噪性能的分析,以及在光学图像上对实验结果进行比较,验证了所提出方法的有效性。

**关键词** 图像处理; 图像分割; 加权核 K 均值; 多尺度分割

中图分类号 TP391 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20092910.2762

## Multiscale Image Segmentation Based on Graph Weighted Kernel K-means

Li Yuchuan<sup>1</sup> Tian Zheng<sup>1,2</sup>

(<sup>1</sup> Department of Applied Mathematics, School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710129, China  
<sup>2</sup> The State Key Laboratory of Remote Sensing Science, Institute of Remote Sensing Applications, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101, China)

**Abstract** An improved minimum cut model is presented considering that the minimum cut criteria favors cutting small sets of isolated nodes, then equivalence relation between the improved minimum cut model and weighted kernel k-means is researched, and the influence of different similarity functions on the results of segmentation are also analysed. And based on these, a multiscale image segmentation method based on graph weighted kernel k-means is proposed, this method avoids calculating graph spectral, which is a key step when using graph cut model to segment images, also, it avoids selecting kernel matrix, which is important to the weighted kernel k-means, finally it realizes multiscale image segmentation. The analysis of anti-noise and experimental results on a number of optical images show the effectiveness of this method.

**Key words** image processing; image segmentation; weighted kernel k-means; multiscale segmentation

## 1 引 言

图像分割是图像处理中的重要内容,也是目标识别的关键性步骤之一<sup>[1,2]</sup>。近年来,基于图的图像分割由于其灵活的数据结构表现出较强的分割能力,且其分割结果与人的主观视觉感知具有较好的一致性,因此已经成为一个热门的研究领域。

利用图进行图像分割的主要方法之一是通过定义一个目标函数,将图的分割问题转化为对该目标函数的优化问题<sup>[3]</sup>,但是对于常见的图割模型其求解是一个非确定性多项式难(NP-hard)问题,虽可将其转化为对图谱的求解,但是对于图像数据而言,不仅图谱的计算是面临的主要难题而且矩阵的特征

收稿日期: 2009-03-20; 收到修改稿日期: 2009-04-14

基金项目: 国家自然科学基金(60375003)、国家航空基金项目(03I53059)和西北工业大学科技创新基金(2007KJ01033)资助课题。

作者简介: 李昱川(1984—),女,硕士研究生,主要从事图像处理方面的研究。E-mail: mayliyuchuan@yahoo.com.cn

导师简介: 田 铮(1948—),女,教授,博士生导师,主要从事非线性时间序列分析、多尺度随机模型与图像处理的理论、方法与应用等方面的研究。

向量对于矩阵的扰动也具有较强的敏感性<sup>[4]</sup>。

用于数据聚类的另一类方法是加权核 K 均值聚类,它能够较好地处理非线性可分数据的聚类问题,但是如何选取适当的核矩阵至今还没有一个统一的标准。

鉴于此,本文从研究图割模型与加权核 K 均值之间的等价性入手,通过分析相似度函数对分割结果的影响,并在像素点之间的边权中引入尺度因子,设计了一个基于图的加权核 K 均值图像多尺度分割方法。光学图像上的实验结果表明了该方法可用于分割较大尺寸的图像,并通过对加噪实验结果的分析以及与传统区域生长、传统 K 均值和人工分割结果进行对比,验证了该方法的有效性。

## 2 改进的最小割模型与加权核 K 均值

### 2.1 改进的最小割模型

Wu 提出的最小割模型<sup>[5]</sup>由于只考虑了类间的相似度,而未考虑类内相似度,故单纯地利用该模型进行分割时会趋向于分割出小的孤立点集。考虑到类内相似度可用类内各点的权重来表征,而各点的权重又可用该点与其他点之间的关联程度来表示,因此本文给出改进的最小割(IMC)模型:

设由像素点构成的集合为  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。现以  $v_1, v_2, \dots, v_n$  为图的顶点构造赋权无向图  $G(V, E)$ ,其中边集  $E = V \times V$ ,将边  $(v_i, v_j)$  上的权重记为  $a_{ij}$ ,此时图  $G$  的相似度矩阵用  $A$  表示  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 。

对于赋权无向图  $G(V, E)$ ,现为每一顶点  $v_i$  均赋予一个权重  $w_i$ ,则 IMC 模型定义为

$$f_{\text{IMC}} = \frac{f_{\text{cut}}(A, B)}{f_{\text{conjunct}}(A)} + \frac{f_{\text{cut}}(A, B)}{f_{\text{conjunct}}(B)} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \min(f_{\text{IMC}}) &= \min_{\substack{A \cup B = V \\ A \cap B = \emptyset}} \left[ \frac{f_{\text{cut}}(A, B)}{f_{\text{conjunct}}(A)} + \frac{f_{\text{cut}}(A, B)}{f_{\text{conjunct}}(B)} \right] = \min \left[ \sum_{c=1}^2 \frac{\mathbf{x}_c^T (\mathbf{D} - \mathbf{A}) \mathbf{x}_c}{\mathbf{x}_c^T \mathbf{W} \mathbf{x}_c} \right] = \min \left( \sum_{c=1}^2 \frac{\mathbf{x}_c^T \mathbf{L} \mathbf{x}_c}{\mathbf{x}_c^T \mathbf{W} \mathbf{x}_c} \right) = \\ \min[\text{tr}(\mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{P})] &= \min[\text{tr}(\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1/2} \mathbf{L} \mathbf{W}^{-1/2} \mathbf{Q})] = 2 - \min \{ \text{tr}[\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1/2} (\mathbf{W} - \mathbf{L}) \mathbf{W}^{-1/2} \mathbf{Q}] \}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\text{tr}(\cdot)$  表示方阵的迹,矩阵  $\mathbf{D}$  是  $n \times n$  维的对角阵,对角线上的第  $i$  个元素为  $d_{ii} = \sum_{j=1, \dots, n} a_{ij}$ ,称为图  $G$  的度矩阵;矩阵  $\mathbf{W}$  是一个  $n \times n$  维的对角阵,其对角线上的第  $i$  个元素  $w_{ii}$  为顶点  $v_i$  的权值,称为权矩阵; $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$  为图  $G$  的 Laplace 矩阵; $\mathbf{P}$  是一个  $n \times 2$  维的正交矩阵,其第一列为向量  $\mathbf{x}_1 / \sqrt{\mathbf{x}_1^T \mathbf{W} \mathbf{x}_1}$ ,第二列为向量  $\mathbf{x}_2 / \sqrt{\mathbf{x}_2^T \mathbf{W} \mathbf{x}_2}$ ;矩阵  $\mathbf{Q} = \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{P}$ ,由于  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} =$

其中  $f_{\text{cut}}(A, B) = \sum_{v_i \in A, v_j \in B} a_{ij}$ ,  $f_{\text{conjunct}}(A)$  等于  $A$  中所含各点的权重之和,它表征了  $A$  的类内相似度。权重  $w_i$  可按如下方式来选取:将图中与顶点  $v_i$  的边权值大于某一阈值的权值加和作为  $v_i$  的权重。这样最小化 IMC 即可作为图割的目标函数。(1)式可仿照文献[6]中的方法将其转化为求解广义特征值问题,但是对于图像数据而言,庞大的数据量会造成矩阵的特征值难以求解,并且如何将得到的实值连续最优解进行合理的离散化也是一个值得深究的问题。

### 2.2 加权核 K 均值

首先给出加权核 K 均值的目标函数<sup>[7]</sup>

$$f_0 = \sum_{c=1}^k \sum_{v_i \in \pi_c} w_i \|\varphi(v_i) - m_c\|^2, \quad (2)$$

其中  $w_i$  为非负的权重,  $\varphi: v_i \rightarrow \varphi(v_i)$ ,  $\pi_c$  代表第  $c$  个

聚类,其质心  $m_c = \frac{\sum_{v_i \in \pi_c} w_i \varphi(v_i)}{\sum_{v_i \in \pi_c} w_i}$ ,  $k$  为类数。如果引

入一个核矩阵  $\mathbf{K}$ ,使得  $\mathbf{K}_{ij} = \varphi(v_i) \varphi(v_j)$ ,则(2)式中表征距离的项就只与权值  $w$  及核矩阵  $\mathbf{K}$  有关,而无需知道映射  $\varphi$  的具体形式。文献[8]给出了核矩阵的具体构造方法,但如何依据图像内容构造适当的核矩阵还是一个尚未解决的问题。

### 2.3 改进的最小割模型与加权核 K 均值的等价性

首先将 IMC 模型的最小化问题转化为求迹的最大化问题:

为每一类引入一个指示向量  $\mathbf{x}_c$ ,如果类  $c$  中含有顶点  $i$ ,则  $\mathbf{x}_c$  的第  $i$  个分量取值为 1,否则为 0。本文采用递归的迭代二划分方法对图像进行分割,故聚类数  $k$  取值为 2。

$\mathbf{I}_{2 \times 2}$ ,所以矩阵  $\mathbf{Q}$  是一个正交矩阵。因此

$$\min(f_{\text{IMC}}) \Leftrightarrow \max \{ \text{tr}[\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{-1/2} (\mathbf{W} - \mathbf{L}) \mathbf{W}^{-1/2} \mathbf{Q}] \}, \quad (4)$$

对于加权核 K 均值的目标函数(2)式也可以等价地转化为求迹的最大化问题,即

$$\sum_{c=1}^k \sum_{v_i \in \pi_c} w_i \|\varphi(v_i) - m_c\|^2 \Leftrightarrow \max[\text{tr}(\mathbf{Q}^T \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{K} \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{Q})], \quad (5)$$

具体的推导过程可以参见文献[7],此处不再赘述。通过比较(4)式与(5)式,即可得到核矩阵  $\mathbf{K}$  的表达式为  $\mathbf{K}=\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{W}-\mathbf{L})\mathbf{W}^{-1}$ 。

利用这种等价关系将两种聚类方法联系起来既避免了利用图割模型进行图像分割时图谱的求解问题,又避免了利用加权核  $K$  均值方法进行数据聚类时核矩阵的确定问题。

## 2.4 相似度函数的分析

在基于图的图像分割方法中,相似度函数的选取直接影响了分割的结果。常用 Gauss 函数:

$$g_0 = \exp\left(-\frac{\|v_i - v_j\|^2}{\sigma^2}\right), \quad (6)$$

作为相似性的度量,这是注意到该负指数函数随距离的增加而迅速递减这一特点,其中尺度因子  $\sigma$  控制了两点  $v_i, v_j$  在相距多远时被界定为相似点。图1给出了相似度函数随尺度因子变化的示意图,可见  $\sigma$  越大函数衰减的速度越慢。但是该函数在处理图像数据时只考虑了亮度值,而图像数据既有颜色或灰度属性也同时具有距离属性,故文献[6]引入了如下的相似度函数:

$$g_1 = \exp\left(-\frac{\|v_i - v_j\|^2}{\sigma_1} - \frac{\|I_i - I_j\|^2}{\sigma_2}\right) \quad (7)$$

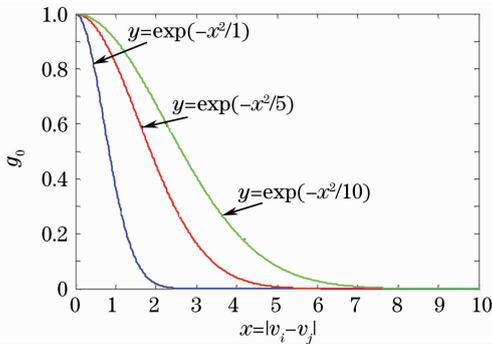


图1 相似度函数随尺度因子变化的示意图

Fig.1 Diagram of similarity function with the varying of scale factor

其中  $x_i$  表示第  $i$  个点的位置,  $I_i$  表示第  $i$  个点的亮度值。但是这里的尺度因子也只是一个全局的控制因子,不能根据数据的局部变化自适应的改变,文献[9]针对这一不足给出了如下的改进形式:

$$g_2 = \exp\left[-\frac{d^2(s_i, s_j)}{\sigma_i \sigma_j}\right], \quad (8)$$

其对每一数据点均赋予一个尺度因子,其中  $\sigma_i = d(s_i, s_k), s_k$  是  $s_i$  的第  $k$  个临近点。

这里的尺度因子起到了调节的作用,其值选取得越大则会合并彼此相似的类,继而得到图像在较粗尺度上的分割,因此可以通过对其进行调制实现

对图像由粗到细的多尺度分割<sup>[10]</sup>。

## 3 基于图的加权核 $K$ 均值图像多尺度分割的计算方法

首先,构造赋权无向图  $G(V, E)$ ; 建立相似度矩阵  $A$  并对其进行规范化处理,求得度矩阵  $\mathbf{D}$  和 Laplace 矩阵  $\mathbf{L}$ ; 建立权对角阵  $\mathbf{W}$ , 得到核矩阵  $\mathbf{K} = \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{W} - \mathbf{L})\mathbf{W}^{-1}$ ; 利用加权核  $K$  均值方法将顶点  $V$  分成两类: 选取两个初始的聚类中心点  $m_1, m_2$ ; 对图的每一个顶点  $v_i$  计算其到聚类中心  $m_c, c = 1, 2$  的距离:

$$d(v_i, m_c) = \mathbf{K}_{ii} - \frac{2 \sum_{a_j \in \pi_c} \omega_j \mathbf{K}_{ij}}{\sum_{a_j \in \pi_c} \omega_j} + \frac{\sum_{a_j, a_1 \in \pi_c} \omega_j \omega_1 \mathbf{K}_{ij}}{\left(\sum_{a_j \in \pi_c} \omega_j\right)^2}, \quad (9)$$

若  $d(v_i, m_1) < d(v_i, m_2)$ , 则  $v_i$  属于第一类, 否则属于第二类, 由此产生两个聚类  $\pi_1, \pi_2$ ; 计算  $f_0 = \sum_{c=1}^2 \sum_{v_i \in \pi_c} \omega_i \| \varphi(v_i) - m_c \|^2$ , 重复上述步骤, 对聚类进行更新, 直到前后两次的  $f_0$  值不发生变化或变化很小时迭代停止。得到两类  $\pi_1, \pi_2$ , 即得到对图像的一次二划分; 继续对分割出来的类进行二分, 直到得到满意的分割结果。

为避免大的计算量, 本文在构造赋权无向图时做出如下改进: 首先将图像分成大小相等的块, 对每一块进行随机采样, 至于采样点能以多大的概率代表总体等问题可参见文献[11]的采样点定理, 通过对采样点进行聚类, 对非采样点按距离最近的原则进行归类实现对图像的分割。

为避免随机选取聚类中心的不确定性, 鉴于权值越大其与周围点的关联程度越大, 则越有可能是某一类的中心点, 因此本文选取权值最大的点做为第一类初始的聚类中心; 由于与第一类初始聚类中心越不相似越有可能属于不同的类, 因此选取与第一类初始聚类中心相似度最小的点作为第二类的聚类中心。

下面对该方法的计算复杂度进行分析: 该方法主要的计算步骤为(9)式的距离计算, 其第一项  $\mathbf{K}_{ii}$  对于顶点  $v_i$  来说为一常数; 第二项对于每一顶点其计算复杂度为  $O(n)$ , 而对于每次迭代来说其计算代价为  $O(n^2)$ ; 第三项对于每个聚类  $c$  来说是一个常量, 每次迭代只需计算一次, 因此总的计算复杂度为  $O(n^2)$ , 又由于本文运用采样点定理减少了计算量, 故顶点数  $n$  的取值并不大。

利用本文方法对图像进行递归二划分可得到一个形同二叉树形式的分割结果,如图 2 所示。

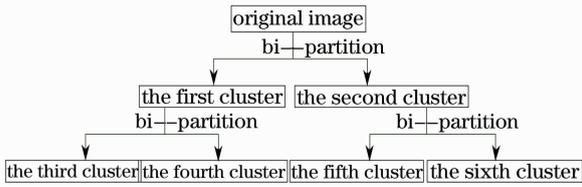


图 2 二叉树形式的分割示意图

Fig. 2 Segmentation diagram of binary tree format

### 4 实验结果与分析

本文所有实验结果均由 MATLAB 7.0 实现,运行环境为 P4-1.6G,512M 内存。

#### 4.1 加噪合成图像的分割结果与分析

为验证本文方法的抗干扰能力,现进行如下实

验:对合成图像加入高斯白噪声,分别利用本文方法和传统 K 均值方法进行分割,结果如图 3 所示。表 1 给出了 2 种方法的误分率比较。可见本文方法的误分率要明显低于传统 K 均值方法的误分率,究其原因后者没有考虑像素间的位置信息,而本文方法由于采用(7)式的相似性度量,将结构信息也融入分割过程,故结果更稳健。

表 1 两种分割方法误分率的比较

Table 1 Error ratio comparison of two segmentation methods

data analysis	Methods	
	proposed method	traditional K-means
the number of error points	73	461
error ratio	0.11%	0.7%

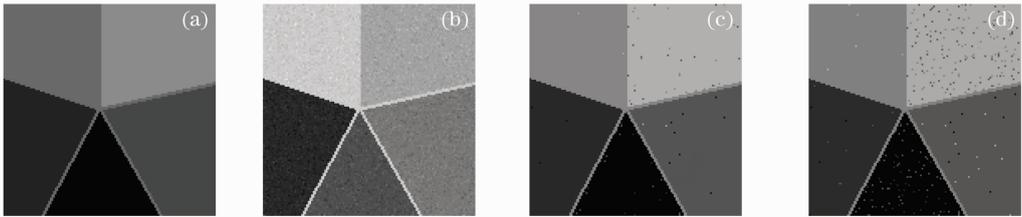


图 3 加噪合成图像的分割结果。(a)原图(256 pixel×256 pixel);(b)加噪图;(c)本文方法的分割结果;(d)传统 K 均值方法的分割结果

Fig. 3 Segmentation results of artificial image with noises. (a)original image(256 pixel×256 pixel); (b) noise image; (c) segmentation result using proposed method; (d) result using traditional K-means

#### 4.2 光学图像的分割结果与分析

图 4 给出了将本文方法应用于光学图像并与其他传统分割方法以及人工分割结果进行对比的实验。其中(a1),(a2)是 481 pixel×321 pixel 的原始图像;(b1),(b2)是利用本文方法的分割结果,运行

时间分别为 4 s 和 2 s;(c1),(c2)是利用传统区域生长方法分割的结果,可见该方法分出的边缘比较粗糙且有明显的误分点;(d1),(d2)是利用传统 K 均值方法分割的结果,可见该方法对于图像的细节部位没有分割得很好;(e1),(e2)是 Berkeley 分割图

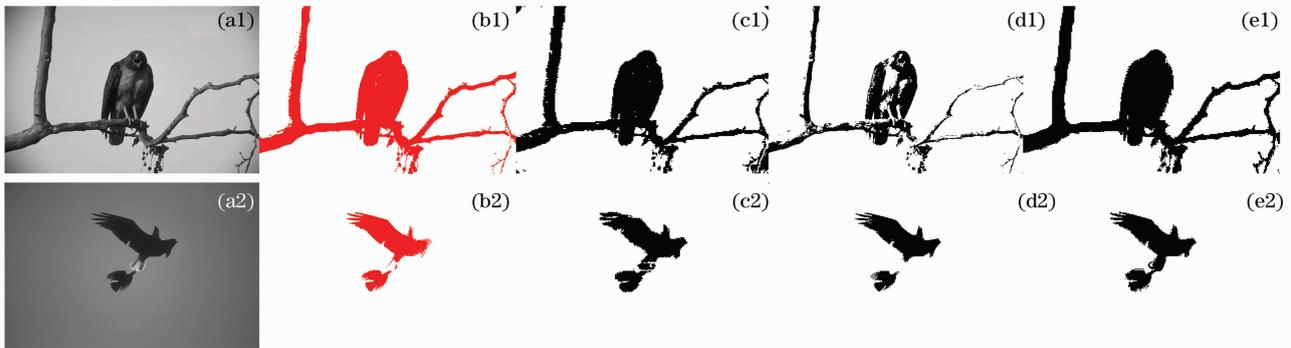


图 4 本文方法与传统分割方法及人工分割结果的对比。(a1),(a2)原始图像;(b1),(b2)本文方法的分割结果;(c1),(c2)传统区域生长方法的分割结果;(d1),(d2)传统 K 均值方法的分割结果;(e1),(e2)人工分割结果

Fig. 4 Comparison results of proposed method,traditional segmentation methods and artificial method. (a1),(a2) original images; (b1),(b2) the results using proposed method; (c1),(c2) the results using traditional region growing; (d1),(d2) the results using traditional K-means; (e1),(e2) the results using artificial method

像库中人工分割的结果<sup>[12]</sup>。表 2 和表 3 分别给出了两幅图像利用不同的分割方法相对于人工分割结果的误分率比较,从数据上充分说明了本文方法的误分率较低,与人的主观视觉感知具有较好的一致性。

表 2 误分率比较  
Table 2 Error ratio comparison

data analysis	methods		
	proposed method	traditional region growing	traditional K-means
the number of error points	1943	2246	15234
error ratio	1.26%	1.45%	9.87%

表 3 误分率比较

Table 3 Error ratio comparison

data analysis	methods		
	proposed method	traditional region growing	traditional K-means
the number of error points	572	837	4360
error ratio	0.37%	0.54%	2.82%

图 5 给出了利用本文方法对光学图像进行递归二划分的分割结果,运行时间为 7 s。通过将尺度因子  $\sigma$  进行从大到小的调制,实现了本文所提出方法的多尺度分割的特征,这一优势有利于实现在分割的过程中进行图像配准,以及满足根据不同目的提取有利目标的需求。

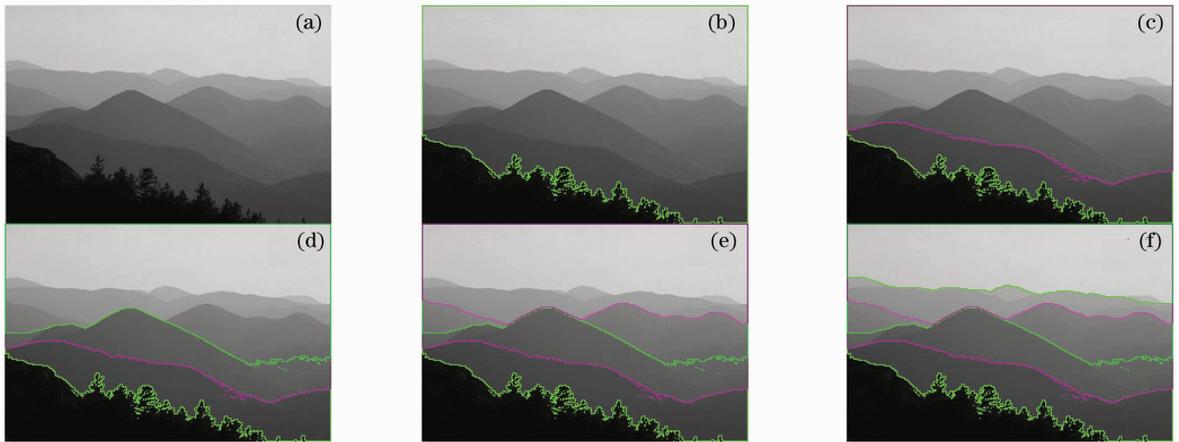


图 5 光学图像的多尺度分割结果。(a)原图(481 pixel×321 pixel);(b)~(f)对(a)进行递归二划分的结果图

Fig. 5 Multiscale segmentation results of optical image. (a) original image(481 pixel×321 pixel); (b)~(f) the results of recursive bi-partiton

## 5 结 论

本文设计了一个基于图的加权核 K 均值图像多尺度分割方法,通过对图像进行分块采样以及选取聚类中心,在尺度因子的调节下实现了对光学图像的多尺度分割。在基于图的图像分割方法中,相似度函数的构造是一个值得深入研究的问题,尽管本文已对其进行了初步探讨,但是如何设计相似度函数进行更准确的分割进而实现对合成孔径雷达(SAR)图像的处理将是作者今后致力研究的问题。

## 参 考 文 献

- Zhang Yajing, Li Minzan, Qiao Jun *et al.*. Segmentation algorithm for apple recognition using image features and artificial neural network [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(11): 2104~2108
- 张亚静, 李民赞, 乔 军 等. 一种基于图像特征和神经网络的苹果图像分割算法[J]. *光学学报*, 2008, **28**(11): 2104~2108
- Ming Ying, Jiang Jingjue. Background modeling and moving-

- objects detection based on cauchy distribution for video sequence [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(3): 587~592
- 明 英, 蒋晶珏. 基于柯西分布的视频图像序列背景建模和运动目标检测[J]. *光学学报*, 2008, **28**(3): 587~592
- Li Xiaobin. Graph Spectrum and Cut Based Multiscale Image Segmentation [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2007, 7~11
- 李小斌. 图像多尺度分割的图谱与图割方法研究[D]. 西安:西北工业大学, 2007, 7~11
- Zheng Tian, Xiaobin Li. Spectral clustering based on matrix perturbation theory[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2007, **50**(1): 63~81
- Z. Wu, R. Leahy. An optimal graph theoretic approach to data clustering: theory and its application to image segmentation[J]. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1993, **15**(11): 1101~1113
- J. Shi, J. Malik. Normalized cuts and image segmentation[J]. *IEEE Transactions on Patern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, **22**(8): 888~905
- Inderjit S. Dhillon, Yuqiang Guan, Brian Kulis. Weighted graph cuts without eigenvectors a multilevel approach [J]. *IEEE Transactions on Patern Analysis and Machine Intelligence*, 2007, **29**(11): 1944~1957

- 8 Nello Cristianini, John Shawe-Taylor. An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-based Learning Methods[M]. Cambridge University Press, 2000
- 9 L. Zelnik-Manor, P. Perona. Self-Tuning Spectral Clustering [A]. Proceedings of the Advances in Neural Information Processing Systems, 2004, **17**: 1601~1608
- 10 Tian Ying, Yuan Weiqi. Ear recognition based on fusion of scale invariant feature transform and geometric feature[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(8): 1485~1491  
田莹, 苑玮琦. 尺度不变特征与几何特征融合的人耳识别方法[J]. *光学学报*, 2008, **28**(8): 1485~1491
- 11 Li Xiaobin, Tian Zheng. Multiscale stochastic hierarchical image segmentation by spectral clustering[J]. *Science in China Series F: Information Sciences*, 2007, **50**(2): 198~211
- 12 D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal *et al.*. A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics[C]. In: Werner B, eds. *Proceedings of the international Conference on Computer Vision*. Los Alamitos, California: IEEE Society Press, 2001, 416~423