文章编号: 0253-2239(2009)10-2738-06

# 三次相位板波前编码系统彩色图像恢复 的迭代算法

刘钦晓 赵廷玉 张文字 余飞鸿

(浙江大学光电系现代光学仪器国家重点实验室,浙江杭州 310027)

摘要 采用三次相位板进行景深延拓的波前编码系统得到非对称的点扩展函数。为了获得最终清晰的彩色图像, 研究了一种基于广义极小残差法(GMRES)的迭代算法,结合 Tikhonov 规整化方法,并利用多通道处理过程对中 间图像进行去卷积恢复。为了消除恢复图像边界的振铃效应,推导了新的光学成像过程数学模型,该模型采用反 镜像边界条件并利用直积近似对卷积核进行处理。模拟数据的分析表明,采用多通道处理过程对彩色图片进行恢 复时,新的算法在给出精确的反卷积结果的同时能有效地抑制噪声的放大;实验结果显示,较之经典的维纳滤波恢 复结果,新算法能够更好的消除边界的振铃和图像边缘的振动波纹。

关键词 图像处理;彩色图像恢复;广义极小残差法;波前编码;规整化;边界条件 中图分类号 O241.6; O435.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20092910.2738

# Iteration Algorithm for Color Image Restoration of Wavefront Coding System with Cubic Phase Mask

Liu Qinxiao Zhao Tingyu Zhang Wenzi Yu Feihong

(State Key Laboratory of Modern Optical Instrumentation, Department of Optical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310027, China)

**Abstract** The cubic phase mask is used to extend the depth of field in a wavefront coding system, the point spread function is asymmetric. We research a new iteration algorithm to get the final sharp color image, which based on the GMRES (generalized minimal residual methods) combined with the regularization method and multichannel processing procedure. In order to eliminate the ringing effect, Antireflective boundary conditions and Kronecker product approximation is used for the new image formation. Analysis and the simulation show that the new algorithm can give excellent deconvolution results and suppress the noise magnification effectively. From the experimental result, this new algorithm can give better results than classic Wiener filtering with little ringing effect on the image border and little vibration on the edge.

**Key words** image processing; color Image restoration; generalized minimal residual methods (GMRES); wavefront coding; regularization; boundary conditions

# 1 引 言

波前编码是一种利用三次相位板进行景深延拓的新成像技术<sup>[1~4]</sup>。光学系统在 CCD 上记录离焦 不敏感的中间图像,利用数字图像处理技术对中间 图像进行恢复处理,得到较大景深范围内清晰的输 出图像。

图像恢复是在已知输出图像和成像系统点扩展 函数的情况下,求解原始图像的过程。这是一个典

收稿日期: 2008-11-03; 收到修改稿日期: 2009-01-13

基金项目:国家自然科学基金(60777002)资助课题

作者简介:刘钦晓(1981一),男,博士研究生,主要从事图像处理,光学仪器等方面的研究。

E-mail: liuqinxiao@zju.edu.cn

导师简介:余飞鸿(1964—),男,教授,博士生导师,主要从事光学设计、图像处理、液晶投影等方面的研究。

E-mail: Feihong@zju.edu.cn(通信联系人)

型的反问题,由于系数矩阵的病态性,方程解的数据 不是连续的依赖于观测数据,反卷积过程会伴随着 噪声放大。Tikhonov 规整化<sup>[5,6]</sup>利用优化的规整 化参数增加一个规整项,使求解过程中的噪声放大 得到有效的抑制,最终得到可靠稳定的解。

点扩展函数已知时,图像恢复常用的算法是维 纳滤波,该算法是一种频域快速恢复算法,但由于采 用周期边界条件,导致边界的连续性截断,恢复图像 存在很明显的振铃效应;另一种算法是截断奇异值 分解法<sup>[7]</sup>该算法是一种空域直接恢复算法,通过去 掉较大的奇异值来抑制噪声的放大,但这档会造成 图像的信息丢失。点扩散数函数不能得到时,要用 到盲反卷积恢复<sup>[8]</sup>,该技术对天文,水下等领域的成 像有重要意义。

本文基于广义极小残差法(GMRES),并结合 规整化,提出一种点扩展函数已知的空域迭代恢复 算法。这种算法利用多通道处理过程进行彩色图像 恢复,对于大尺度非对称病态方程可以给出稳定的 平滑解。

2 成像过程数学模型

#### 2.1 边界处理

对于离散化的数学成像模型,需要对点扩展函数进行处理以符合实际的卷积情况。通常这种处理将使得 H 形成一个块结构。利用反镜像边界条件构造出的 H 为 block Toeplitz-plus-Hankel-plus-Rank-2 with Toeplitz-plus-Hankel-plus-Rank-2 block (BTHR2THR2B)结构<sup>[9,10]</sup>。这个结构保持了边界  $C^{1}$  连续性,能够有效消除由于边界的连续性截断而引起的振铃效应和图像边缘的振动波纹。

#### 2.2 卷积核的直积近似

假定  $A \in C^{n \times n}$ ,  $B \in C^{p \times q}$  为两个矩阵,并且 (A)<sub>ij</sub> =  $a_{ij}$ , 那么直积  $D = A \otimes B \in C^{np \times nq}$  可以定义为

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & a_{m2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mm}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$
 (1)

直积具有下面的性质:  $A_1XA_2^T = B \Leftrightarrow (A_2 \otimes A_1)$ vecX = vecB.利用该性质,很容易得到

$$\boldsymbol{A}_{1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_{2}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\boldsymbol{\bowtie}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \qquad (2)$$

其中 $A_1 \otimes A_2 = A \in \mathbb{R}^{mm \times mm}$ ,  $x, b \in \mathbb{R}^{mm}$ , vecX 是通过 将矩阵X的各行堆放成一个向量x而形成的 (vecX = x). 光学成像是物和光学成像系统点扩展函数卷积 的过程,离散化方程通常可以表示为

$$g = Hx + n, \qquad (3)$$

其中 g, x 和 n 分别代表系统输出图、原始图像和附加噪声。H 表示系统的点扩展函数。

利用(2)式,离散化的成像模型可以表示成矩 阵相乘形式,如

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{X} \boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{N}, \qquad (4)$$

其中 G 为系统输出图像矩阵,X 为原始图像矩阵,N 为附加噪声矩阵, $H_1$  和  $H_2$  代表点扩展函数矩阵  $(H_1 \otimes H_2^{T} = H)^{[11, 12]}$ 。

## 3 图像恢复算法

对于非对称线性方程,广义极小残差法能够给 出稳定的平滑解。为了将其应用于的新的成像模糊 模型,本节给出了经过修正的新算法。

#### 3.1 阿诺尔迪修正算法

广义极小残差法<sup>[13,14]</sup>是一种基于克雷洛夫子 空间的算法,阿诺尔迪算法是一种常用的构造正交 基( $V_1$ , $V_2$ ,…, $V_k$ )的方法。对于新成像模糊模型, 修正后的阿诺尔迪算法表述为

步骤 1: 选取矩阵  $V_1$  并且使得  $||V_1||_F = 1$ 步骤 2: 当  $i = 1, \pm i < k$  时执行外部循环

$$\overline{\mathbf{V}} = \mathbf{H}_1 \mathbf{V}_i \mathbf{H}_2^{\mathrm{T}}$$

当i = 1,且i < j时执行内部循环

$$h_{i,j} = \operatorname{trace} V_i^{\mathrm{T}} V,$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V} - h_{i,j} \mathbf{V}_i$$

*i* 增加 1

内部循环结束

$$h_{j+1,j} = \| \, \overline{oldsymbol{V}} \, \|_{\mathrm{F}}$$

$$\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{v}/h_{j+1,j}$$

j 增加 1

外部循环结束

traceX 代表矩阵X 对角元素求和。

这个算法构造了正交基矩阵  $\tilde{V}_k = (V_1, V_2, \cdots, V_k)$  和上三角海森伯矩阵

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_{k} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & \cdots & h_{1k} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & \cdots & h_{2k} \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{k,k-1} & h_{kk} \end{bmatrix}.$$
(5)

#### 3.2 广义极小残差法

为了解方程  $G = H_1 X H_2^T$ , 广义极小残差法采 用如下步骤:

29 卷

步骤 1:选取初始值  $X_0$  和容差  $\varepsilon$ ,计算  $R_0 = G - H_1 X_0 H_2^T$ ,  $V_1 = R_0 / || R_0 ||_F$ ,设定  $N_{iter} = 0$ 。 步骤 2:利用算法 1 构造正交基矩阵 ( $V_1$ ,  $V_2$ , ...,  $V_k$ )和矩阵  $\tilde{H}_k$ . 步骤 3: 解最小二乘问题  $\min_{y \in R^k} || || R_0 ||_F e_1^{(k+1)} - \tilde{H}_k y ||_2$ 求得  $y_k$ 。 步骤 4: 计算  $X_k = X_0 + \tilde{V}_k y_k$ 。 步骤 5: 计算  $R_k = G - H_1 X_k H_2^T$ 。 步骤 6: if  $|| R_k ||_F < \varepsilon$ , stop; else  $X_0 = X_k$ ,  $R_0 = R_k$ ,  $N_{iter}$  的值增加 1;转步骤 2。 其中  $e_1^{(k+1)}$ 是一个  $R^{k+1}$ 矢量[ $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ ]。

#### 3.3 病态问题的规整化方法

由于反问题求解的病态性,规整化方法通常被 用来抑制求解过程所带来的噪声的放大,从而使解 变得稳定。采用 Tikhonov 规整化方法对广义极小 残差法进行修正,使他适用于图像恢复。

这里把算法 2 中步骤 3 求解最小二乘问题转化 为下面的规整化方程

 $\min_{\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{K}^{k}} (\parallel \boldsymbol{R}_{0} \parallel_{\mathrm{F}}\boldsymbol{e}_{1}^{(k+1)} - \boldsymbol{\widetilde{H}_{k}}\boldsymbol{y} \parallel_{2}^{2} + \lambda^{2} \parallel \boldsymbol{y} \parallel_{2}^{2}), \quad (6)$ 

其中规整化参数 λ 通过广义交叉验证法(GCV)得 到,λ 是使下面函数取得最小的优化值<sup>[15]</sup>:

$$\boldsymbol{G} = \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_{\frac{2}{2}}}{\left[\operatorname{trace}(\boldsymbol{I}_{m} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\right]^{2}},$$
(7)

其中  $A = \widetilde{H}_{k}\widetilde{H}_{k}^{T} + \lambda^{2}I_{k}, b = \|R_{0}\|_{F}e_{1}^{(k+1)}$ 3.4 广义极小残差法图像恢复修正算法

结合了 Tikhonov 规整化后,适用于图像恢复的广义极小残差法表述为

步骤 1:选取初始值  $X_0$  和容差  $\varepsilon$ ,计算  $R_0 = G - H_1 X_0 H_2^T$ ,  $V_1 = R_0 / || R_0 ||_F$ ,设定  $N_{iter} = 0$ ; 步骤 2:利用算法 1 计算正交基矩阵 ( $V_1$ ,  $V_2$ , ...,  $V_k$ ) 和矩阵  $\hat{H}_k$ ; 步骤 3: 使用广义交叉验证法求得规整化参数 λ; 步骤 4: 解规整化问题  $\min_{y \in R^k} (\|\| R_0 \|\|_F e_1^{(k+1)} - \hat{H}_k y \|_2^2 + \lambda^2 \|\| y \|_2^2)$ 得到 y; 步骤 5: 计算  $X_k = X_0 + \tilde{V}_k y$ ; 步骤 6: 计算  $R_k = G - H_1 X_k H_2^T$ ; 步骤 7: if  $\| R_k \|_F < \varepsilon$ , stop; else  $X_0 = X_k$ ,  $R_0 = R_k$ ,  $N_{inter}$  的值增加 1;转步骤 2。

## 4 数值分析

#### 4.1 仿真结果

图 1 是一个由双胶合透镜和优化的三次相位板 组成的简单的波前编码系统。系统有效焦距为 100 mm, F 数为 3, 三次相位板参数相位函数表示 为  $Z = \alpha (X^3 + Y^3) (\alpha = 1.2 \times 10^{-5})$ ,其中参数  $\alpha$  是 利用基于 Fisher 信息量的优化算法得到<sup>[16]</sup>。



#### 图 1 双胶合透镜波前编码光学系统

Fig. 1 Simple doublet wavefront coding system

图 2 是波前编码双胶合光学系统的调制传递函数图,在图中(a)~(c)分别给出了物距为 5,10 和 15 m时,在 0,0.7 和 1 视场下弧矢和子午方向的情况。可以发现,由于使用了三次相位板,系统的调制传递函数在景深 5~15 m 的范围内具有大致相同的形状,也就是说,系统对这个景深范围的频率响应基本一致。



图 2 物距为 5,10,15 m 时波前编码双胶合透镜光学系统的光学传递函数 Fig. 2 MTFS of the simple doublet wavefront coding system: distance is 5, 10, 15 m

图 3 中给出了不同物距和视场下经过取对数处 理后的系统点扩展函数,从图中可以看到物距分别 为 5,10,15 m 时,在三个不同视场下的点扩展函数 具有相同的形状。



- 图 3 双胶合透镜波前编码系统不同物距和视场下的 对数点扩展函数
- Fig. 3 Logarithm PSFs in different object distances and fields of the doublet wavefront coding system

图 4 是对点扩展函数本身进行去卷积恢复而得 到的,理论上认为恢复结果应该是一个理想的点,图 4(a)是维纳滤波给出的结果,它是一个明显的十字 形,中间的点也比较大;(b)图是新算法给出的恢复 结果,对比两个图可以发现利用广义极小残差迭法 算法进行图像恢复的结果要优于维纳滤波。



图 4 去卷积恢复得到的原始点:(a)维纳滤波结果; (b)新算法结果

Fig. 4 Original point reconstructed by the deconvolution restoration algorithms: (a) the result of Wiener filering; (b) the result of the novel algorithm

图 5 给出了恢复过程中每次迭代后的剩余量范 数。从图中可以发现在前 5 次迭代中,算法的剩余量 范数迅速下降,并且随着迭代次数的增加一直收敛。

对于实际的彩色成像,我们分成三个通道分别

进行成像卷积模糊和去卷积恢复。实际系统的点扩 展函数在图 6 中给出。利用图 6 我们做了下面的数 据仿真模拟及实验处理。



图 5 剩余量范数特性曲线图 Fig. 5 Property of the residual norms



图 6 实际双胶合透镜波前编码系统的点扩展函数 Fig. 6 PSF fo the real doublet wavefront coding system

图 7 给出了利用图 6 所做的数据仿真处理的操 作步骤,首先将原始图像分成红、绿、蓝三个通道并 分别对它们做卷积模糊处理得到三个中间图像,然 后再利用上面给出的新算法分别对中间图像进行恢 复,最后合成清晰的输出图像。





图 8 是利用新算法进行仿真处理的模糊和最后恢复的结果。在图中分别给出了卷积核尺寸为 10 pixel×10 pixel,17 pixel×17 pixel和 35 pixel× 35 pixel的情况。彩色原始图片 Lena 的大小为 492 pixel×492 pixel。

观察恢复结果可以发现,新的算法有很好的去 卷积效果,能够给出优良的恢复结果。在有效抑制 振铃效应的同时,可以得到清晰平滑的去卷积解。 在卷积核尺寸较小的情况下(10 pixel×10 pixel, 17 pixel×17 pixel),恢复图像的边界振铃很少,图像边缘的振荡很小。在大尺寸卷积核的情况下



(a) Blurred image; 10 pixel×10 pixel



(d) Restorated imag 17 pixel×17 pixel



(b) Restorated image;  $10 \text{ pixel} \times 10 \text{ pixel}$ 



(e) Blurred image; 35 pixel×35 pixel

(35 pixel×35 pixel)也能给出明显的去卷积效果,同时人工的振铃效应也不明显。



(c) Blurred image; 17 pixel×17 pixel



(f) Restorated image; 35 pixel×35 pixel

图 8 采用广义极小残差算法仿真恢复结果图 Fig. 8 Simulation results restorated by the GMRES algorithm

#### 4.2 实验结果

实际双胶合波前编码系统所成的中间像在图 9(a)中给出。图中三个小孩分别站在 5,10 和 15 m 的位置,由于系统的光学传递函数值很低,整个图像 很模糊,系统采用 IMPERX 公司的 CCD 收集图像,它的有效像素为 1000×1000,像素大小为7.4  $\mu$ m× 7.4  $\mu$ m。利用图 6 给出的点扩展函数进行恢复。 图 9(b)给出了维纳滤波的恢复结果,可以看到,恢



- 图 9 实际波前编码系统图像恢复结果.(a)实际系统所成的模糊中间像;(b)维纳滤波恢复结果;(c)经过边界处理的维纳滤波恢复结果;(d)新算法恢复结果
- Fig. 9 Restorated results of the real wavefront coding system. (a) the intermediate blurred image of the real optical system; (b) the restorated result by Wiener filtering; (c) the restorated result by Wiener filtering with edge processing; (d) the restorated result by the GMRES algorithm

**治**米

复图像的边界有很明显的振铃效应,图像边缘振动 波纹很大。图9(c)中采用了边界处理,首先把预恢 复中间图像和它自身的模糊图像进行加权求和,使 得预恢复图像的中间部分等于自身,边缘部分等于 它的模糊图像,然后再进行维纳滤波。经过预处理 的恢复结果很好地去除了边界的振铃效应,但图像 中仍存在很大的波纹。图9(d)中给出了新算法的 恢复结果,由于采用了反镜像边界条件,边界保持了 C<sup>1</sup> 的连续性,振铃效应能够得到很好的抑制。相比 于维纳滤波恢复,新的算法能够给出更好的去卷积 恢复结果。

# 5 结 论

本文提出了一种基于广义极小残差法,结合 Tikhonov规整化的新迭代恢复算法,利用多通道处 理过程将其应用于彩色图像恢复。为消除由于边界 连续性截断而带来的振铃效应,算法中采用了反镜 像边界条件对点扩展函数进行了处理,利用直积近 似推导出新的矩阵形式的成像卷积模糊数学模型。 数值分析表明该算法对于非对称点扩展函数的去卷 积有很好的效果,能够给出平滑解。实验结果显示, 对于波前编码系统,新的恢复算法可以给出优于维 纳滤波的结果,恢复图像不会产生振铃效应,图像边 缘没有明显的波纹。

## 参考文献

field through wavefront coding[J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(11): 1859~1866

- 2 Zhao Tingyu, Ye Zi, Zhang Wenzi *et al.*. Wide viewing angle skewed effect of the point spread function in a wavefront coding system[J]. Opt. Lett., 2007, 32(10): 1220~1222
- 3 Zhang Wenzi, Ye Zi, Zhao Tingyu *et al.*. Point spread function characteristics analysis of the wavefront coding system[J]. *Opt. Express*, 2007, **15**(4): 1543~1552
- 4 Pan Chao, Chen Jiabi, Zhang Rongfu et al.. Extension ratio of the depth of field for wavefront coding imaging system[J]. Acta Optica Sinica, 2008, 28(5): 870~875

潘 超,陈家璧,张荣福等.波前编码成像系统景深延拓扩展率的研究[J]. 光学学报,2008,28(5):870~875

- D. Calvetti, S. Morigi, L. Reichel *et al.*. Tikhonov regularization and the L-curve for large discrete ill-posed problems [J]. J. Comput. Appl. Math. 2000, **123**: 423~446
- 6 G. H. Golub, P. C. Hansen, D. P. O'Leary. Tikhonov regularization and total least squares [J]. SIAM. J. Matrix Anal. Appl., 1999, 21(1): 185~194
- 7 S. Morigi, L. Reichel, F. Sgallari. A truncated projected SVD method for linear discrete ill-posed problems[J]. Numer. Algor. 2006, 43(3): 197~213
- 8 Yu Dayong, Yuan Xiangyan, Gao Wanrong et al.. A method for image restoration with iterative blind deconvolution in frequency domain[J]. Chinese J. Lasers, 2002, A29(12): 1101~1104 于大勇,袁祥岩,高万荣等. 频域迭代盲解卷积图像恢复方法及 其算法实现[J]. 中国激光, 2002, A29(12): 1101~1104

- 9 S. Serra-Capizzano. A note on antireflective boundary conditions and fast deblurring models[J]. SIAM J. Sci. Comput., 2003, 25(4): 1307~1325
- 10 M. Christiansen, M. Hanke. Deblurring methods using antireflective boundary conditons[J]. SIAM J. Sci. Comput., 2007, 30(2): 855~872
- 11 L. Perrone. Kronecker product approximations for image restoration with anti-reflective boundary conditions[J]. Numer. Linear Algebra Appl., 2006, 13(1): 1~22
- 12 M. E. Kilmer, J. G. Nagy. Kronecker product approximatios for dense block Toeplitz-plus-Hankel matrices [J]. Numer. Linear Algebra Appl., 2007, 14(8): 581~602
- 13 K. Jbilou, A. Messaoudi, H. Sadok. Global FOM and GMRES algorithms for matrix equations [J]. Appl. Numer. Math., 1999, 31(1): 49~63
- 14 H. S. Najafi, H. Zareamoghaddam. A new computational GMRES method[J]. Appl. Math. Comput., 2008, 199(2): 527~534
- 15 P. C. Hansen. Regularization Tools A Matlab package of analysis and solution of discrdte ill-pose problems Veision 4.1 for Matlab 7. 3 [EB/OL]. http://www2. imm. dtu. dk/~ pch/ Regutools/index. html
- 16 Zhao Tingyu, Zhang Wenzi, Ye Zi *et al.*. Design of wavefront coding system based on evaluation function of fisher information [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, 27(6): 1096~1101 赵廷玉,张文字,叶 子等. 应用费希尔信息量评价函数的波前编码系统设计[J]. 光学学报, 2007, 27(6): 1096~1101