

文章编号: 0253-2239(2009)01-0224-05

基于最小二乘迭代的多光束相移算法

徐建程¹ 陈建平² 许 乔¹ 柴立群¹

(¹ 成都精密光学工程研究中心, 四川 成都 610041; ² 闽江学院, 福建 福州 350108)

摘要 高阶谐波和随机相移误差是影响干涉测量精度的主要因素。为了同时解决这两问题,提出了基于最小二乘迭代的多光束干涉条纹分析方法。该方法利用傅里叶级数将多光束干涉条纹展开为基波和各阶谐波之和。它只需要 5 帧随机相移的多光束干涉条纹,即可通过最小二乘迭代准确地求得相移值和相位分布。模拟计算结果表明,当测试面反射系数小于 0.6、随机相移误差的均方根小于 1 时,只需 10 次迭代运算即可将误差控制在 0.005 (PV)和 0.003(RMS)rad 之下,精度比传统的五步算法精度高。实验结果进一步验证了该算法的有效性,并表明该算法比双光束相移算法优越。

关键词 测量与计量;干涉测量;最小二乘迭代;多光束干涉条纹;随机相移

中图分类号 O436.1 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS20092901.0224

Multiple-Beam Phase Shifting Algorithm Based on Least-Squares Iteration

Xu Jiancheng¹ Chen Jianping² Xu Qiao¹ Chai Liqun¹

(¹ *Fine Optical Engineering Research Center, Chengdu, Sichuan, 610041, China*)
(² *Minjiang University, Fuzhou, Fujian 350108, China*)

Abstract High-order harmonics and phase-shift miscalibration are the two main systematic error sources that affect the accuracy of interferometry. To deal with these problems simultaneously, a multiple-beam phase shifting algorithm based on least-squares iteration is proposed. The proposed algorithm decomposes multiple-beam fringes into fundamental wave and high-order harmonics by using the Fourier series expansion. Only five frames of multiple-beam interference fringes with random phase shifts are required to accurately determine the phase distribution and phase shifts. Simulations show that the proposed algorithm reaches the error less than 0.005 (peak-valley value, PV) and 0.003 rad (root-mean-square, RMS) with 10 iterations when the reflection coefficient and the RMS of random phase shifts are less than 0.6 and 1 respectively. It also shows that the proposed algorithm exhibits higher precision than the traditional five-bucket algorithm. Experiment demonstrates that the proposed algorithm is valid and superior to two-beam phase shifting algorithm.

Key words measurement and metrology; interferometry; least-squares iteration; multiple-beam interference fringe; random phase shift

1 引 言

相移干涉术在高精度测量领域得到了广泛应用,而相移算法则是其中决定测量精度的关键技术之一。借助双光束干涉条纹的余弦分布特性产生了一系列的标准相移算法^[1,2],如四步算法、五步算法和最小二乘迭代法等。然而在实际应用中,如 F-P 干涉仪、Fizeau 干涉仪等,由于其中一束光经过光学表面的多次反射而形成多光束干涉条纹,其光强不

再严格随相位余弦变化^[3~6]。此时若再采用双光束相移算法,则必然会引入较大的算法误差。通过数值分析表明^[5],低精度应用场合(大于 $\lambda/100$),若两个光学面的反射率较低时,如低于 4%,则光强非余弦依赖所引起的算法误差是可以忽略的;但在高精度应用场合,尤其是测试面反射率较高时,算法误差的影响将是十分严重。

为了分析多光束干涉条纹,Surrel^[1],Hariharan^[3],

收稿日期: 2008-05-09; **收到修改稿日期:** 2008-08-05

基金项目: 中国工程物理研究院人才基金(zx0104)资助课题。

作者简介: 徐建程(1981-),男,博士研究生,主要从事精密光学检测和光学设计等方面的研究。

E-mail: xujiancheng8143@126.com

导师简介: 许 乔(1972-),男,博士,研究员,主要从事先进光学制造和检测等方面的研究。

E-mail: xuqiao@vip.sina.com

Bonsch and Bohme^[4]和罗志勇等^[5,7]分别提出了多光束条纹分析算法,然而他们的算法都要求每步相移值恒定且准确。由于环境的振动和相移器的非线性响应,多光束干涉条纹的相移值为一随机量。现有的自校准算法,如最小二乘迭代算法^[2],只能解决双光束干涉条纹。虽然 Langoju 等^[8]提出了同时解决谐波和非线性相移误差的算法,它需要 $2k+4$ 帧条纹才能抑制 k 阶谐波误差,而且不能解决环境振动引起的随机相移误差。曾提出了基于最小二乘迭代的多表面干涉条纹分析方法^[9],但是需要 $2k+1$ 帧条纹才能抑制 k 阶谐波误差,不能有效地分析多光束干涉条纹。

本文提出了一种基于最小二乘迭代的多光束干涉条纹分析方法。该方法只需要 5 帧具有随机相移量的多光束干涉条纹,即可准确地求得相位分布。推导了该算法的原理,用数值模拟和实验加以验证。

2 多光束干涉条纹

在 Fizeau 干涉仪中,测试面和参考面多次反射后形成多光束干涉条纹,其强度可用 Airy 公式^[6]表示(省略坐标 x, y):

$$I_n = I_n(\varphi + \theta_n) = A \left[1 - \frac{B}{1 - C \cos(\varphi + \theta_n)} \right], \quad (1)$$

式中 φ 表示被测相位, θ_n 表示第 n 次的相移值; A 表示入射光强度分布, B 和 C 是由参考面和测试面的反射系数 r_1, r_2 决定的参数

$$B = (1 - r_1^2)(1 - r_2^2)/(1 + r_1^2 r_2^2), \quad (2)$$

$$C = 2r_1 r_2 / (1 + r_1^2 r_2^2), \quad (3)$$

由(1)式可知该强度是非余弦分布,但它是关于 $\varphi + \theta_n$ 周期分布的偶函数。根据傅里叶级数可将(1)式改写为^[6]

$$I_n = A \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos[j(\varphi + \theta_n)] \right\}, \quad (4)$$

$$a_0 = \frac{2(r_1^2 + r_2^2 - 2r_1^2 r_2^2)}{1 - r_1^2 r_2^2}, \quad (5)$$

$$a_j = -\frac{2(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)}{1 - r_1^2 r_2^2} (r_1 r_2)^j, \quad j = 1, 2, 3 \dots (6)$$

若满足 $a_2/a_1 = r_1 r_2 \ll 1$, 则多光束干涉条纹可简化为双光束干涉条纹

$$I'_n = A[a_0/2 + a_1 \cos(\varphi + \theta_n)], \quad (7)$$

但引入的误差为

$$\Delta I_n = I_n - I'_n = A \left\{ \frac{2r_1^2 r_2^2 (1 - r_1^2)(1 - r_2^2)}{(1 - r_1^2 r_2^2)} \times \left[\frac{\cos[2(\varphi + \theta_n)] - r_1 r_2 \cos(\varphi + \theta_n)}{2r_1 r_2 \cos(\varphi + \theta_n) - (1 + r_1^2 r_2^2)} \right] \right\}, \quad (8)$$

对 Fizeau 干涉仪而言,通常参考面反射系数 $r_1 = 0.2$,

测试面反射系数 r_2 与测试元件材料及膜层有关,没镀膜的普通玻璃和单晶硅面 r_2 分别约为 0.2 和 0.6。

3 迭代算法原理

3.1 由相移值求相位分布

将(4)式改写为

$$I_n = b_0 + \sum_{j=1}^2 b_j \cos[j(\varphi + \theta_n)] + \sum_{j=3}^p b_j \cos[j(\varphi + \theta_n)] + \eta_n, \quad (9)$$

式中 $b_0 = Aa_0/2, b_j = Aa_j; p$ 表示需要考虑谐波阶数(即要满足 $b_{p+1} \ll 1$ 以忽略高于 p 的谐波,具体数值与 r_1, r_2 的积有关); η_n 表示干涉图中的随机噪声。定义一组新的变量:

$$X_0 = b_0, \quad X_{2j-1} = b_j \cos(j\varphi),$$

$$X_{2j} = -b_j \sin(j\varphi); \quad S_0(n) = 1,$$

$$S_{2j-1}(n) = \cos(j\theta_n), \quad S_{2j}(n) = \sin(j\theta_n),$$

其中 $j = 1, 2$ 。另外设

$$g_n = \sum_{j=3}^p b_j \cos[j(\varphi + \theta_n)],$$

则(9)式可改写为

$$I_n - g_n = \sum_{i=0}^4 X_i S_i(n) + \eta_n, \quad (10)$$

若相移值 θ_n 已知(第一次由估计得到,之后由前一次迭代求得)、 g_n 已知(第一步设为零,之后由前一次迭代求得),只要干涉条纹的帧数 $N \geq 5$, 则可根据最小二乘拟合得到

$$AX = Y, \quad (11)$$

式中

$$A_{ik} = \sum_{n=1}^N S_i(n) S_k(n), \quad i, k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (12)$$

$$Y_k = \sum_{n=1}^N (I_n - g_n) S_k(n), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (13)$$

由(11)式可求得 X , 从而可以求得 b_j 和相位 φ :

$$b_j = -\sqrt{X_{2j}^2 + X_{2j-1}^2}, \quad j = 1, 2 \quad (14)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-X_2}{X_1}\right), \quad (15)$$

根据求得的 b_1, b_2 和 φ 以及估计的相移值 θ_n , 可以估算得到高阶谐波光强之和

$$g_n = \sum_{j=3}^p b_j \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^{j-1} \cos[j(\varphi + \theta_n)]. \quad (16)$$

3.2 由相位分布求相移值

将干涉图分成 H 个足够小区域,在每个小区域内可将 b_j 看作不随空间变化的常量。在每个区域内,重新定义一组新的变量:

$$\begin{aligned} X'_0 &= 1, & X'_{2j-1} &= \cos(j\varphi), \\ X'_{2j} &= \sin(j\varphi); & S'_0 &= b_0, \\ S'_{2j-1}(n) &= b_j \cos(j\theta_n), & S'_{2j}(n) &= -b_j \sin(j\theta_n), \end{aligned}$$

其中 $j = 1, 2$ 。则(10)式可改写为

$$I_n - g_n = \sum_{i=0}^4 X'_i S'_i(n) + \eta_n, \quad (17)$$

根据3.2节求得的结果, φ 和 g_n 已知, 只要每个小区域内的像素个数 $M \geq 5$, 则可根据最小二乘拟合得到

$$BS'(n) = Z, \quad (18)$$

式中

$$B_{ik} = \sum_{m=1}^M X'_i(m) X'_k(m), \quad (19)$$

$$i, k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$Z_k = \sum_{m=1}^M [I_n(m) - g_n(m)] X'_k(m), \quad (20)$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4$$

由(18)式可求得 $S'(n)$, 从而求得第 n 帧干涉图的相移值

$$\theta_n = \arctan \left[\frac{-S'_2(n)}{S'_1(n)} \right], \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

分别求得 H 个区域对应的各个相移值, 然后求其平均作为新的相移值 θ_n , 根据求得的 θ_n , 按照(16)式更新 g_n , 最后将 θ_n 和更新后的 g_n 作为已知量代入3.1节进行迭代计算。

3.3 迭代收敛判据

先用估计的相移值 θ_n 作为初始值, 通过3.1节计算求得相移 φ 和高阶谐波分量之和 g_n , 然后代入3.2节求得更准确的 θ_n 和 g_n 。如此反复迭代, 随着迭代次数的增加, 求得的相移值更加接近真实值, 从而提高了相位的精度。直到满足如下判据迭代才终止:

$$\max |(\theta_n^q - \theta_{n-1}^q) - (\theta_{n-1}^{q-1} - \theta_{n-2}^{q-1})| < \epsilon, \quad (22)$$

式中 q 表示迭代次数, ϵ 表示预先设定的迭代精度。

4 模拟计算

假设相位 $\Phi = \pi(x^2 + y^2) + 2\pi x + 3\pi y$, $A = 255 \exp[-0.25(x^2 + y^2)]$, 其中 $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, 参考面反射系数 $r_1 = 0.2$ 。下面分别模拟计算反射系数和相移误差对五步算法^[5] 和本文算法的影响, 用计算得到的相位与设定真实相位之差定义为两种算法的误差, 用峰谷值(PV)和均方根(RMS)表征其大小。

4.1 反射系数的影响

先假设没有相移误差, 对五步相移算法^[5] 取相移量为 $\pi/2$, 取相移量为 $2\pi/5$ (因为严格 $\pi/2$ 会导致公式(12)中矩阵 \mathbf{A} 的逆矩阵运算产生误差)。当测试面反射系数 $r_2 = 0.9$ 时的多光束干涉图如图1(a)所示, 其对比度约为0.13。分别用五步相移算法和本

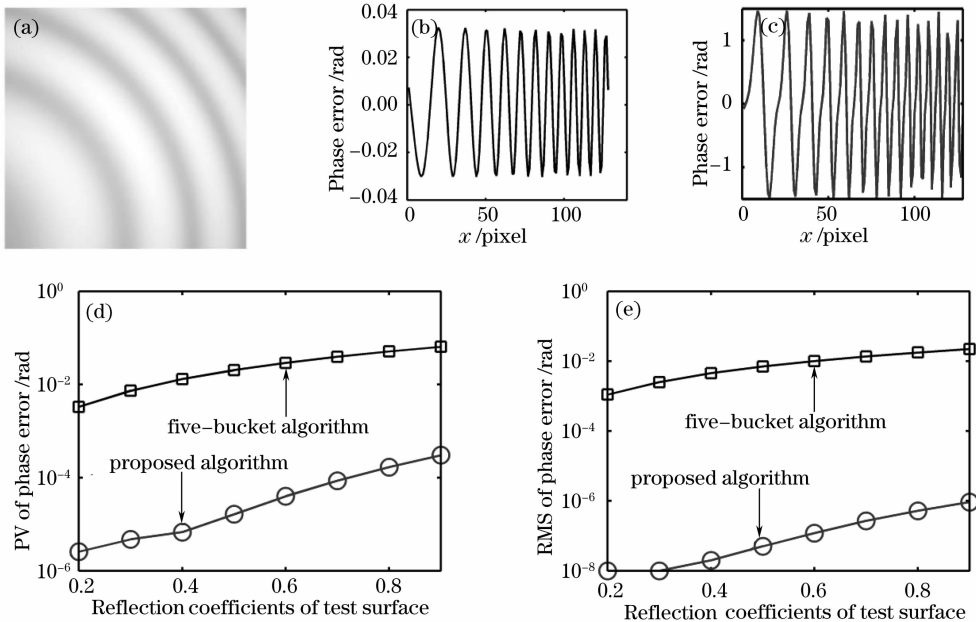


图1 不同反射系数时本文算法与五步算法误差的比较。(a)多光束干涉条纹;(b)五步算法的误差分布;(c)本文算法的误差分布;(d)误差PV值及(e)误差RMS值和 r_2 的关系

Fig.1 Comparison of errors between the proposed algorithm and five-bucket algorithm at different reflection coefficients. (a) Multiple-beam interferogram; phase error distribution of (b) five-bucket algorithm and (c) the proposed algorithm; and the relation between phase errors and r_2 : (d) PV and (e) RMS

文的迭代算法(3次迭代)求得相位分布,其误差分布(干涉图正中间行)分别如图1(b),图1(c)所示。由图1(b),图1(c)可知,本文算法优于五步算法,当 $r_2=0.9$ 时五步算法的误差约为0.06弧度(PV),而本文算法的误差约为 3×10^{-4} 弧度。另外,五步算法误差调制频率为条纹频率的4倍(与文献[5]一致),而本文算法误差调制频率为条纹频率5倍。这是因为五步算法没有消除多光束干涉条纹中二阶谐波的影响;而本文算法通过最小二乘拟合完全消除二阶谐波的影响,所以它的误差主要来源于三阶谐波,若再多迭代几次运算则可进一步抑制三阶谐波的影响。

通过改变测试面反射系数 r_2 ($0.2 \leq r_2 \leq 0.9$),分别用上述两种算法进行计算,其误差峰谷值(PV)和均方根值(RMS)与 r_2 的关系分别如图1(d)和图1(e)所示。由图1(d),图1(e)可得:即使在没有相移误差的情况下,本文算法的精度远远高于五步

相移算法。

4.2 相移误差的影响

由于环境振动的影响,可以将第 n 次相移量表示为 $\theta_n = \alpha_n + \beta_n$ 。其中 α_n 表示相移器引入的相移量, β_n 表示环境振动引入的随机相移量,设 β_n 的均方根值为 σ 。固定测试面反射系数 $r_2 = 0.6$ 。当 σ 从0到1之间变化时,分别用上述两种算法进行计算,其误差峰谷值(PV)和均方根值(RMS)与 σ 的关系分别如图2(a)和图2(b)所示。由图2可得,五步相移算法误差随着 σ 的增加而迅速增大,当 $\sigma=1$ 时(随机误差最大值约为2弧度。这在大口径干涉仪中是可能出现的),五步相移算法误差PV值大于0.6弧度;而当 $\sigma \leq 1$ 时,只需10次迭代运算即可将误差控制在0.005(PV)和0.003弧度(RMS)之下,远小于五步算法。当 σ 进一步增大时,实际相移值 θ_n 与迭代初始值 α_n 的差值增大,因此需要更多次的迭代才能得到准确的结果。

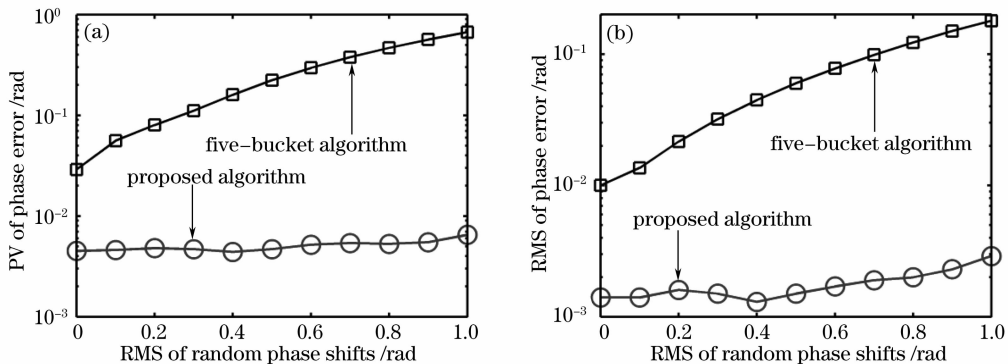


图2 两种算法误差与随机相移量均方根的关系。(a)PV值;(b)RMS值

Fig. 2 Relation between the errors of the two algorithms and the RMS of the random phase shifts

(a) PV and (b) RMS

5 实 验

用 Fizeau 干涉仪在动态环境下测量反射系数约为0.7的光学元件以进一步验证本文算法。控制PZT使相移量为 $\alpha_n = (n-1)\pi/4$,然后采集5帧干涉图,其中一帧如图3(a)所示,其对比度约为0.29。对5帧干涉图进行10次迭代运算,得到测试面面形如图3(b)所示,同时得到实际相移值约为0.7223, 2.2614, 3.0170和4.9720弧度,与 α_n 相比可知,环境振动引起的相移量误差平均值和均方根值分别为0.7797和0.7824弧度。因为该随机相移误差比较大,五步相移算法将产生非常大的误差,所以采用Wang的算法^[2](它实际是基于最小二乘迭代的双光束干涉条纹分析方法),其结果如图3(c)。另外

用标准 Zygo 干涉仪(隔振、PZT 标定和加能量衰减片使测试光和参考光能量匹配)测得结果如图3(d)。若将图3(d)作为测试面真实面形的参考值,则本文算法和 Wang 算法的误差分别如图3(e),图3(f)所示。由图3可知,本文算法的结果与参考值很接近,其误差的PV值和RMS值分别为0.034和0.004弧度,比Wang算法的误差小[如图3(e),图3(f)所示];Wang算法误差中有明显调制波纹,其频率约为干涉条纹频率的4倍。这是因Wang算法只解决随机相移误差,没有消除高阶谐波的影响(主要是2、3阶),而本文算法结果调制不明显,因为它可同时解决高阶谐波和随机相移误差的影响。

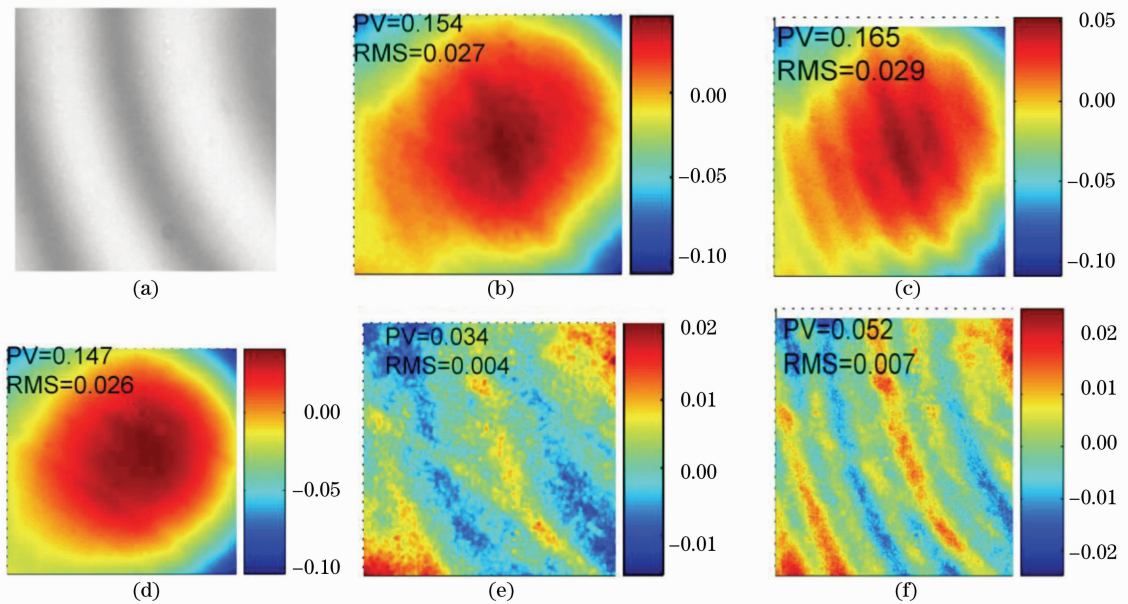


图3 实验结果。(a)多光束干涉条纹图;(b)本文算法的结果;(c)Wang迭代算法的结果;(d)用衰减片后 Zygo 相移算法的结果;(e)本文算法的误差;(f) Wang 迭代算法的误差

Fig.3 Experimental results. (a) multiple-beam interference fringes, (b) phase obtained by the proposed algorithm, (c) phase obtained by Wang's algorithm, (d) phase obtained by Zygo's phase shifting algorithm after optical attenuation, (e) residual phase errors of (b), and (f) residual phase errors of (c)

6 结 论

测量反射系数较高的光学元件时会发生多光束干涉,而环境的振动会产生随机相移误差,为了同时解决这两问题,提出了基于最小二乘迭代的多光束干涉条纹分析方法。通过将多光束干涉条纹展开为基波与各阶谐波之和,根据各阶谐波的关系(即二阶以上谐波的光强可以用基波和二阶谐波表示),在迭代过程中通过补偿二阶以上谐波的光强,可以准确地求得相移值和相位分布。模拟计算结果表明,当测试面反射系数小于 0.6,随机相移误差的均方根小于 1 时,本文算法只需 5 帧随机相移的多光束干涉条纹,通过 10 次迭代运算即可将误差控制在 0.005 (PV)和 0.003(RMS)弧度之下,比传统的五步相移算法精度高。反射系数约为 0.7、环境振动引起的相移量误差平均值和均方根值分别为 0.7797 和 0.7824 弧度时,本文算法通过消除高阶谐波的影响,明显地抑制了谐波引起的调制波纹,并将误差从 Wang 算法的 0.052(PV)和 0.007(RMS)弧度减小到 0.035(PV)和 0.004(RMS)弧度。本算法在动态环境高精度测量中具有应用价值,尤其是测试反射系数较高的元件。

参 考 文 献

- 1 Yves Surrel. Design of algorithms for phase measurements by the use of phase stepping[J]. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(1): 51~60
- 2 Z. Wang, B. Han. Advanced iterative algorithm for phase extraction of randomly phase-shifted interferograms [J]. *Opt. Lett.*, 2004, **29**: 1671~1673
- 3 P. Hariharan. Phase-shifting interferometry: minimization of systematic errors[J]. *Opt. Eng.*, 2000, **39**: 967~969
- 4 B. V. Dorrio, J. Blanco-García, C. Lopez *et al.*. Phase error calculation in a Fizeau interferometer by Fourier expansion of the intensity profile[J]. *Appl. Opt.*, 1996, **35**: 61~64
- 5 Luo Zhiyang, Chen Zhaohui, Gu Yingzi *et al.*. Five-bucket phase-shifting algorithm based on numerical simulation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(11): 1687~1690
罗志勇,陈朝晖,顾英姿等. 基于数值模拟的高准确度五步相移算法研究[J]. *光学学报*, 2006, **26**(11): 1687~1690
- 6 G. Bonsch, H. Bohme. Phase-determination of Fizeau interferences by phase-shifting interferometry [J]. *Optik*, 1989, **82**(4): 161~164
- 7 Zhiyong Luo, Jialin Dai. Study on an improved five-interferogram phase-shifting algorithm[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2008, **6**(5): 342~345
- 8 R. Langoju, A. Patil, P. Rastogi. Phase-shifting interferometry in the presence of nonlinear phase steps, harmonics, and noise [J]. *Opt. Lett.*, 2006, **31**: 1058~1060
- 9 Xu Jiancheng, Shi Qikai, Chai Liqun *et al.*. Multiple-surface interference fringes analysis based on least-squares iteration[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(7): 1307~1312
徐建程,石琦凯,柴立群等. 基于最小二乘迭代的多表面干涉条纹分析[J]. *光学学报*, 2008, **28**(7): 1307~1312