

基于 Mexican hat 小波变换的三维轮廓术

周 翔 赵 宏

(西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室, 陕西, 西安 710049)

摘要 为了提高小波变换轮廓术中小波的空域局部化能力, 提出了一种基于 Mexican hat 小波变换的条纹图处理方法。基于希尔伯特变换得到条纹对应的解析信号, 用 Mexican hat 小波计算解析信号的连续小波变换, 从小波变换的脊上提取相位信息, 恢复物体高度信息。模拟结果表明, Mexican hat 小波变换法在相位快变或突变的区域有更高的相位提取精度, 测量误差可减小 0.1~0.5 rad。以人脸石膏像为例, 进行了实验测量。实验结果表明, 在高度不连续或变化剧烈的区域, Mexican hat 小波变换法较 Morlet 小波方法误差传播更小, 精度更高。

关键词 傅里叶光学; 相位轮廓术; 小波变换; Mexican hat 小波

中图分类号 O439 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS20092901.0197

Three-Dimensional Profilometry Based on Mexican Hat Wavelet Transform

Zhou Xiang Zhao Hong

(*State Key Laboratory for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University,*
Xi'an, Shaanxi, 710049, China)

Abstract A method handling fringe patterns based on Mexican hat wavelet transform is presented to improve the ability of spatial localization in wavelet transformation profilometry. Mexican hat wavelet is chosen to perform continuous wavelet transform of the fringe pattern after converting original signal into the analytic form by Hilbert transform. The phase distribution is recovered from the coefficients on the ridge of the transform and the height distribution is retrieved. The simulated results show Mexican hat wavelet transform method has good performance in spatial localization and high accuracy both in the neighborhood of the height-discontinuous points and in the areas with sharply varying height, and the errors can be reduced by 0.1 rad~0.5 rad. The experiment for the fringe image of a plaster face shows Mexican wavelet transform method has smaller error propagation and higher precision than Morlet wavelet method in the areas with incontinuous or sharply varying height.

Key words Fourier optics; phase profilometry; wavelet transform; Mexican hat wavelet

1 引 言

在光栅投影轮廓术中, 测量的直接结果经常以变形条纹图的形式出现, 条纹中蕴含的相位信息对应着物体的高度信息。在解调相位的许多方法中, 傅里叶变换轮廓术(FTP)^[1, 2]应用广泛。它只需一幅条纹图就可解调出相位分布。但由于要在条纹全

场作傅里叶变换, 局部相位计算误差会扩散到全局, 因此不适合处理具有相位突变的条纹图^[3]。近年来, 小波变换作为一种非平稳信号的强有力的分析工具^[4], 已成功用于光学条纹的分析和相位的提取^[5~10]。为了克服 FTP 的不足, 提出了基于连续小波变换(CWT)的相位提取方法^[11]。在现有

收稿日期: 2008-06-05; **收到修改稿日期:** 2008-07-07

基金项目: 国家自然科学基金(50575169)和国家 973 计划(2005CB724106)资助课题。

作者简介: 周 翔(1978—), 男, 博士研究生, 主要从事三维视觉测量和图像处理等方面的研究。

E-mail: zhouxiang@mail, xjtu, edu, cn

导师简介: 赵 宏(1964—), 教授, 主要从事智能光电检测、实时在线测试以及机器人视觉技术、生物组织成像等方面的研究。E-mail: zhaohong@mail, xjtu, edu, cn

CWT方法中,一般采用 Morlet 小波作为分析小波,但 Morlet 小波不是严格紧支撑的,为了满足小波允许条件,需要较多的振荡次数(≥ 5 次)。根据奈奎斯特(Nyquist)采样定理,需要较多的采样点来表达 Morlet 小波。而小波变换实际上是对信号进行卷积滤波,点数较多的滤波器必然会平滑掉信号中的部分突变。因此对于具有相位快变或突变的光学条纹, Morlet 小波并不是最理想的小波。Mexican hat 小波是高斯函数的二阶导数,曾被用于信号的奇异性检测^[12],相对于 Morlet 小波它的振荡次数少(1.5次),对突变相位具有更好的空域定位能力。本文以三维测量为例,讨论了 Mexican hat 小波提取相位的理论依据和相位提取原理,并将它与 Morlet 小波相位提取法进行了比较,从计算机模拟和实验方面给出了结果。

2 理 论

2.1 光栅投影轮廓术

典型的交叉光轴光栅投影轮廓术光路图如图 1 所示。投影仪投影一幅正弦光栅到被测物表面, CCD 从另一角度拍摄被物面高度调制的变形条纹图,图上对应每一固定 y 坐标条纹的光强灰度分布为

$$g(x) = u(x) + v(x)\cos[\omega_0 x + \varphi(x)], \quad (1)$$

式中 $u(x)$ 为条纹背景光强; $v(x)$ 为条纹对比度; ω_0 为载频条纹的角频率; $\varphi(x)$ 为由物面高度 $h(x, y)$ 调制的相位分布,它与高度有如下关系:

$$h(x, y) = -\frac{L}{\omega_0 d}[\varphi(x) - \varphi_0(x)], \quad (2)$$

$\varphi_0(x)$ 为参考面相位分布, L 为投影仪到参考面的距离, d 为投影仪到 CCD 相机的距离。可见,分别解调出参考面和物面的相位就可以恢复物体三维形貌。

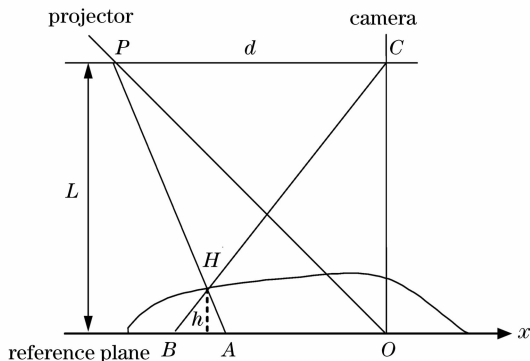


图 1 光路原理图

Fig. 1 Schematics of light path

2.2 基于 Mexican hat 小波变换的空间载频条纹分析

对式(1)表示的载频条纹信号进一步作分析。借助希尔伯特变换(HT)消除 $g(x)$ 的负频率后可以得到相应的解析信号:

$$z(x) = [1 + iH]g(x) = z_1(x) + z_2(x), \quad (3)$$

式中, $z_1(x) = [1 + iH]u(x)$, $z_2(x) = [1 + iH] \times v(x)\cos[\omega_0 x + \varphi(x)]$, H 为 HT 变换算子。假设信号 $v(x)\cos[\omega_0 x + \varphi(x)]$ 在局部是单频率的并满足渐进信号条件^[13]:

$$\left| \omega_0 + \frac{d\varphi}{dx} \right| \gg \left| \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} \right|, \quad (4)$$

则可得到 $z_2(x) \approx v(x)e^{i[\omega_0 x + \varphi(x)]}$.

从(5)式可见,通过提取 $z_2(x)$ 的幅角可恢复出 $g(x)$ 的相位分布。为此对信号 $z(x)$ 进行连续小波变换,

$$W(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} z(x)\psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right)dx, \quad (6)$$

式中, $a > 0$, b 均为实数,角标 * 为复共轭符号。 $\psi[(x-b)/a]$ 表示对母小波 $\psi(x)$ 的伸缩和平移。本文中母小波采用 Mexican hat 小波,它的空域和频域表达式分别为

$$\psi_M(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-x^2)e^{-x^2/2}, \quad (7)$$

$$\hat{\Psi}_M(\omega) = \omega^2 e^{-\omega^2/2}, \quad (8)$$

由(8)式可求出 $\hat{\Psi}_M(\omega)$ 在 $\omega = \pm\sqrt{2}$ rad 处达到最大值。图 2(a), 分别是 Mexican hat 小波在空域和频域的图形。为了比较,将 Morlet 经过尺度变换使其中心频率为 $\sqrt{2}$ rad, 图 2(b) 分别是它在空域和频域的图形。可见,相对于 Morlet 小波 Mexican hat 小波振荡次数较少,空域局部性更好,频域局部性稍差。

采用连续小波变换的频域等价表达:

$$\begin{aligned} W(a, b) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{z}(\omega)\hat{\Psi}^*(a\omega)e^{j\omega b}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} [\hat{z}_1(\omega) + \hat{z}_2(\omega)]\hat{\Psi}^*(a\omega)e^{j\omega b}d\omega. \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $\hat{z}(\omega)$, $\hat{z}_1(\omega)$, $\hat{z}_2(\omega)$ 分别为 $z(x)$, $z_1(x)$, $z_2(x)$ 的傅里叶变换, $\hat{\Psi}(\omega)$ 为 $\Psi(x)$ 的傅里叶变换。因为 $\hat{z}(\omega)$ 不含负频率,所以(9)式的积分限是 $0 \sim +\infty$, 而不是 $-\infty \sim +\infty$ 。借助小波变换的空域局部化特性,相位可近似为 $\varphi(x) \approx \varphi(b) + \varphi'(b)(x-b)$, 并假设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是缓变的,那么解析信号 $z(x)$ 的傅里叶变换可为

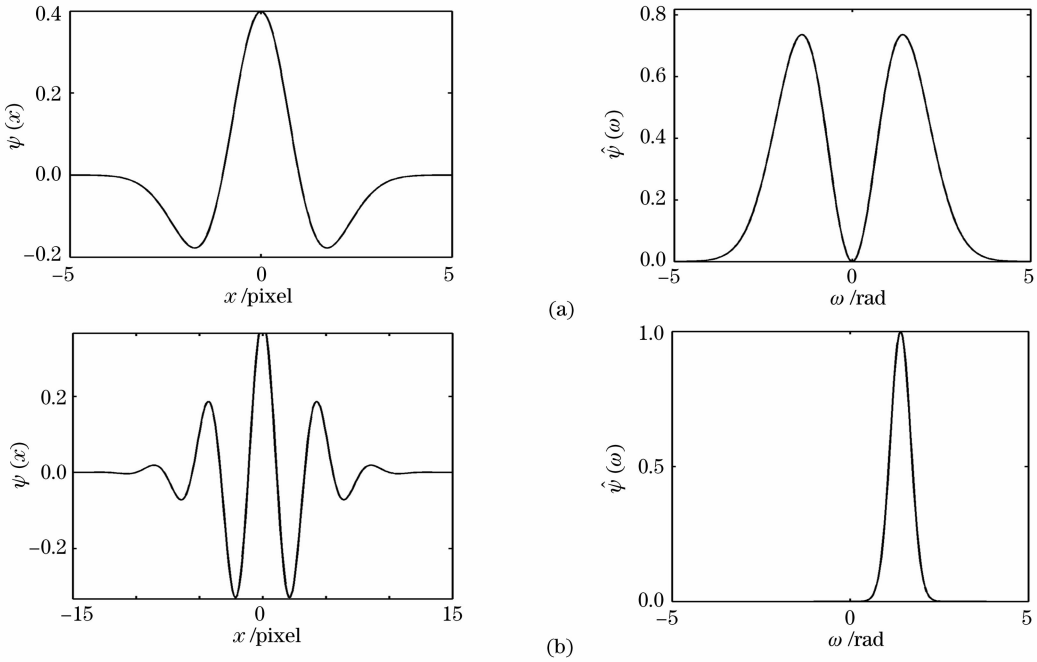


图 2 Mexican hat 小波(a)和 Morlet 小波(b)在空域、频域的图形

Fig. 2 Mexican hat wavelet (a) and Morlet wavelet (b) in spatial domain and frequency domain

$$\hat{\varepsilon}_1(\omega) \approx u(b)\delta(\omega), \tag{10}$$

$$\hat{\varepsilon}_2(\omega) \approx v(b)e^{j[\varphi(b)-\varphi'(b)b]}\delta[\omega - \omega_0 - \varphi'(b)], \tag{11}$$

式中 δ 为冲击函数。将(10)，(11)式代入(9)式后可得

$$W(a,b) \approx \hat{\Psi}^* \{a[\omega_0 + \varphi'(b)]\} v(b)e^{j[\omega_0 b + \varphi(b)]}. \tag{12}$$

将(8)式中定义的 Mexican hat 小波代入(12)式可得

$$W(a,b) \approx \hat{\Psi}_M^* \{a[\omega_0 + \varphi'(b)]\} v(b)e^{j[\omega_0 b + \varphi(b)]} = \{a[\omega_0 + \varphi'(b)]\}^2 e^{-\{a[\omega_0 + \varphi'(b)]\}^2/2} v(b)e^{j[\omega_0 b + \varphi(b)]}. \tag{13}$$

因为 $\hat{\Psi}_M(\omega)$ 在 $\omega = \pm\sqrt{2}$ rad 处达到最大值，故小波变换的模 $|W(a,b)|$ 在曲线 $a = \sqrt{2}/[\omega_0 + \varphi'(b)]$ 上达最大，该曲线被称为小波变换的脊^[14]，对应着信号的瞬时频率 $\omega_0 + \varphi'(b)$ 。在小波脊上，(13)式可进一步化简为

$$W(a,b) \approx 2e^{-1} v(b)e^{j[\omega_0 b + \varphi(b)]}, \tag{14}$$

从而有 $\varphi(b) \approx \text{ang}[W(a,b)] - \omega_0 b, \tag{15}$

通过提取小波变换模 $|W(a,b)|$ 在每一位置 b 的最大值，可找到小波脊的位置。注意到位置 b 对应着信号空域坐标 x ，通过提取小波脊上系数的辐角就可恢复 $g(x)$ 的相位 $\varphi(x)$ 。运用该方法对条纹图上每一个 y 值下的载频信号进行处理，就可得到整个条纹图的相位分布。如果 $\varphi''(x) \neq 0$ ，那么 $|W(a,b)|$ 仅在曲线 $a = \sqrt{2}[\omega_0 + \varphi'(b)]$ 附近达到最大，并且(15)式也不是严格成立，故相位的求解会存在一定误差。尽管如此，当 $\varphi'(x)$ 是连续函数时，该方法的精度足够高^[13]。

3 计算机模拟

图 3 是由计算机生成的一幅 512 pixel × 512 pixel 的模拟载频条纹图，调制相位的表达式如下：

$$\varphi(x) = \begin{cases} (\pi/80) \sqrt{(160^2 - x^2 - y^2)} & x^2 + y^2 \leq 160^2 \\ 0 & x^2 + y^2 > 160^2 \end{cases}. \tag{16}$$

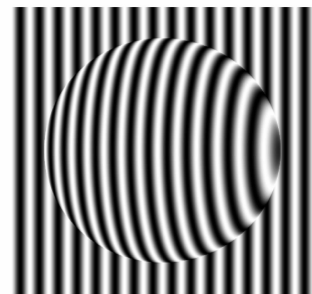


图 3 模拟的变形载频条纹

Fig. 3 Simulation of deformed frequency-carrier fringe pattern

从图 3 可见调制相位在圆形的边缘附近有明显的突变。取条纹的第 256 行信号，用提出 Mexican hat 小波方法对其做连续小波变换，得到的模值分布和相位分布如图 4(a), (b) 所示。从小波脊上恢

复出条纹的相位分布并减去载频，得到调制相位 $\varphi(x)$ 。为方便比较，将 Mexican hat 小波法与 Morlet 小波方法所得的结果绘于图 5 中，可见，在相位突变和快变处 Mexican hat 小波法精度更高。

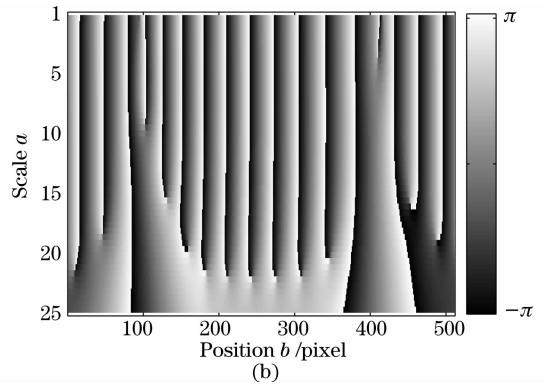
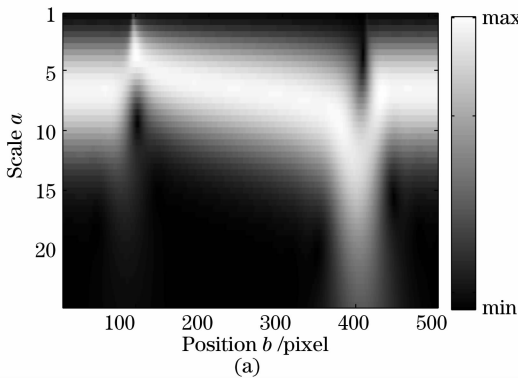


图 4 第 256 行信号的 Mexican hat 小波变换 (a) 模值; (b) 相位

Fig. 4 Mexican hat wavelet transform at the 256th row (a) amplitude, (b) phase

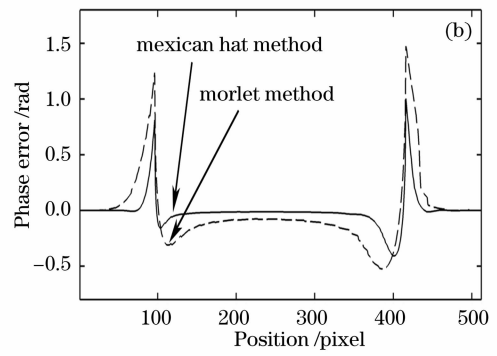
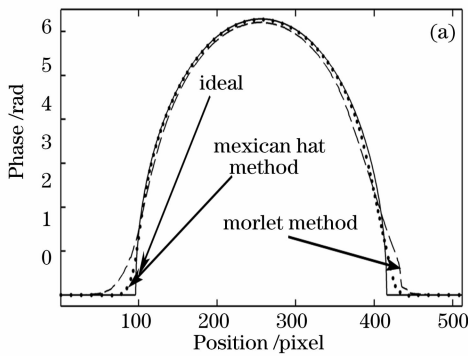


图 5 Mexican hat 小波法(点线), 和 Morlet 小波法恢复的相位分布(a)和相位误差(b)

Fig. 5 Retored phase (a) and phase error (b) by Mexican hat method and Morlet method

4 实 验

以一个人脸石膏像作为测量对象，实验装置如图 6 所示。用分辨率为 1024 pixel × 768 pixel 的数字投影仪投影一幅正弦条纹至物体表面，图 7(a) 显示了由 CCD 从另一角度拍摄的 512 pixel × 512 pixel 变形条纹图。

用 Mexican hat 小波法、Morlet 小波法对条纹图进行了分析，恢复的相位分布分别如图 7(b)、图 7(c) 所示。为了便于比较，在同一系统参量下用四步相移法对物体进行了测量，结果显示于图 7(d) 中。

图 8 显示了第 256 行数据的相位分布。从图 7, 图 8 可见，在高度不连续或变化剧烈的区域，

Mexican hat 小波方法较 Morlet 小波方法误差传播更小，精度更高。

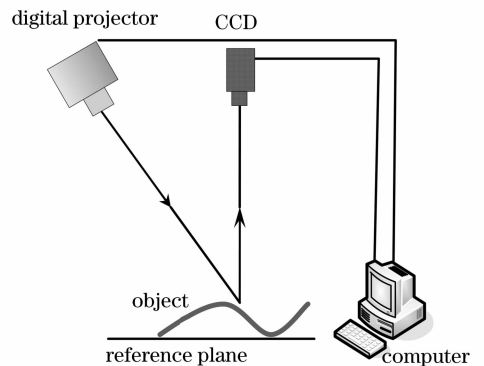


图 6 实验装置

Fig. 6 Experimental setup

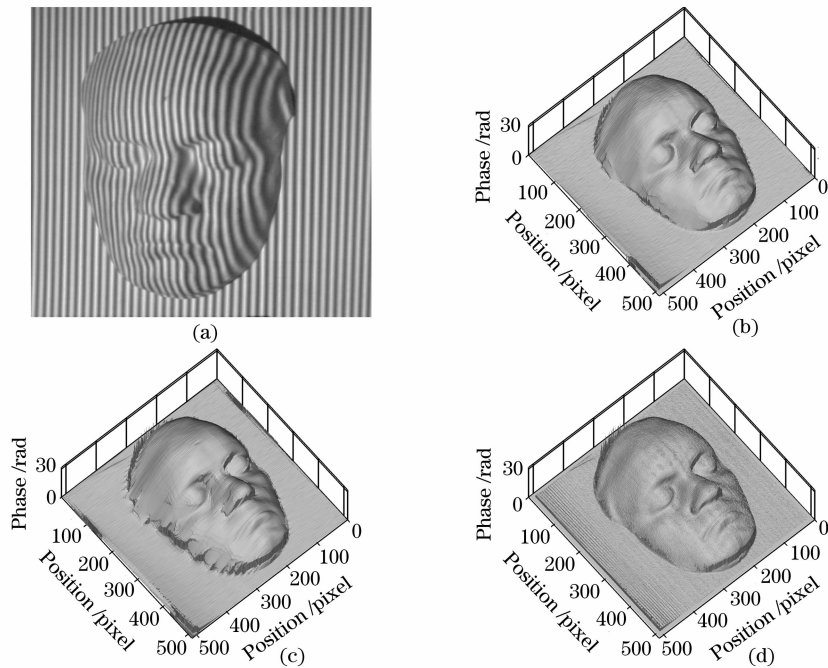


图 7 石膏像变形条纹图(a)以及分别用 Mexican hat 小波(b)、Morlet 小波法(c)、四步相移法(d)恢复的相位分布
Fig. 7 Sinusoidal fringe projected image (a) of a plaster face and restored phase distribution by Mexican hat method (b), Morlet method (c), phase-shifting method (d)

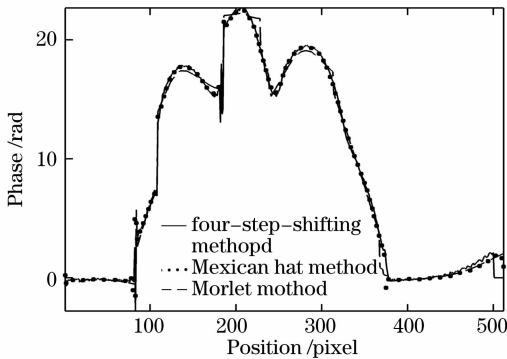


图 8 石膏像变形条纹的第 256 行相位恢复
Fig. 8 Resrored phase at 256th row of fringe projected image of a plaster image

5 结 论

提出一种基于 Mexican hat 小波变换的光栅投影轮廓术。基于希尔伯特变换得到待分析条纹的解析信号形式,用 Mexican hat 小波计算解析信号的连续小波变换,从小波变换的脊上提取相位信息,从而恢复物体高度信息。得益于 Mexican hat 小波较好的空域局部性,该方法可减少突变相位区域的误差传播,相对于使用 Morlet 小波的传统方法,在相位快变或突变的区域有更高的相位提取精度。计算机模拟和实验的结果验证了该方法的有效性。值得指出的是,该方法除了用于光栅投影轮廓术还可

以用于干涉测量、电子散斑等领域的光学条纹分析。

参 考 文 献

- 1 M. Takeda, K. Mutoh, K. Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes [J]. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(24): 3977~3982
- 2 Mao Xian-Fu, Chen Wen-Jing, Su Xian-Yu. Analysis on an improved Fourier transform profilometry [J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34**(1): 99~104
毛先富, 陈文静, 苏显渝. 傅里叶变换轮廓术新理论研究 [J]. *中国激光*, 2007, **34**(1): 99~104
- 3 Xianyu Su, Wenjing Chen. Fourier transform profilometry: a review [J]. *Opt. and Lasers in Engng.*, 2001, **35**(5): 263~284
- 4 I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets* [M]. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992, 17~52
- 5 C. G. Quan, C. J. Tay, L. J. Chen. Fringe-density estimation by continuous wavelet transform [J]. *Appl. Opt.*, 2005, **44**(12): 2359~2365
- 6 C. J. Tay, C. Quan, W. Sun *et al.*. Demodulation of a single interferogram based on continuous wavelet transform and phase derivative [J]. *Opt. Commun.*, 2007, **280**(2): 327~336
- 7 L. R. Watkins, S. M. Tan, T. H. Barnes. Determination of interferometer phase distributions by use of wavelets [J]. *Opt. Lett.*, 1999, **24**(13): 905~907
- 8 J. G. Zhong, J. W. Weng. Phase retrieval of optical fringe patterns from the ridge of a wavelet transform [J]. *Opt. Lett.*, 2005, **30**(19): 2560~2562
- 9 Sun Juan, Chen Wenjing, Su, Xianyu *et al.*. Study the measurement range of wavelet transform profilometry [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(4): 647~653
孙娟, 陈文静, 苏显渝等. 小波变换轮廓术的测量范围研究 [J]. *光学学报*, 2007, **27**(4): 647~653
- 10 Li Sikun, Chen Wenjing, Su Xianyu. Phase unwrapping guided by amplitude of wavelet ridge coefficients in wavelet transform

- profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(4): 715~721
- 李思坤, 陈文静, 苏显渝. 小波变换轮廓术中用小波脊系数幅值引导相位展开的研究[J]. *光学学报*, 2008, **28**(4): 715~721
- 11 Weng Jiawen, Zhong Jingang. Apply wavelet transform to phase analysis of spatial carrier-fringe patterns[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(4): 454~459
- 翁嘉文, 钟金钢. 小波变换在载频条纹相位分析法中的应用研究[J]. *光学学报*, 2005, **25**(4): 454~459
- 12 S. Mallat, W. L. Hwang. Singularity detection and processing with wavelets[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1992, **38**(2): 617~643
- 13 N. Delprat, B. Escudii, P. Guillemain *et al.*. Asymptotic wavelet and gabor analysis; extraction of instantaneous frequencies [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1992, **38**(2): 644~664
- 14 R. A. Carmona, W. L. Hwang, B. Torresani. Characterization of signals by the ridges of their wavelet transforms[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, **45**(10): 2586~2590

《激光与光电子学进展》“光学制造”栏目征稿启事

《激光与光电子学进展》是中国科学院上海光学精密机械研究所主办的激光、光电子领域行业性期刊, 中国科技核心期刊。该刊 1964 年创刊, 至今已出刊 500 余期, 旨在促进国内外学术交流, 沟通科研单位、生产部门与用户的联系。2009 年, 《激光与光电子学进展》将加大光学制造方向的报道力度, 深入研讨光学制造的技术发展及其在工业、科研各方面的应用。主要涉及方向有光学元器件、光学仪器、光学加工、光学设计、光学材料、光学薄膜、光学检测等领域。

欢迎相关的科研、技术、市场人员根据我们栏目内容定位, 撰写或向我们推荐涉及上述领域的优秀技术论文。来稿不收取审稿费和版面费, 一经录用将优先发表并支付丰厚稿酬。

• 本栏目基本要求:

- 1) 稿件内容应为光学制造领域的最新进展、研究动态、科研和新品开发成果等方面;
- 2) 文章要求内容新颖、论点正确、论据充分、数据可靠、文理通顺;
- 3) 技术文章字数一般为 5000 字左右; 综述文章字数最多不超过 10000 字, 且第一作者需为副教授及以上职称。

• 投稿方式: 通过网上投稿系统 (<http://www.opticsjournal.net/lop.htm>) 直接上传稿件(主题标明“光学制造”投稿), 也可以直接将稿件 word 版发至邮箱: dingjie@siom.ac.cn(主题标明“光学制造”投稿), 如有问题欢迎垂询 021-69918198 与栏目编辑丁洁联系。

《激光与光电子学进展》编辑部