

磁场中双折射光纤的琼斯矩阵等效模型

白 晔 石志东 柳 树 李铭佳 陈 华

(上海大学特种光纤与光接入网省部共建重点实验室, 上海 201800)

摘要 采用延迟器与旋光器的串联模型, 研究磁场中双折射光纤的偏振传输特性, 将它们的琼斯矩阵按照两种不同的顺序级联相乘, 导出了两种等效模型中等效相位延迟量、等效快轴方向和等效旋光角的解析表达式。研究发现, 当光纤同时具有线双折射和圆双折射时, 单位长度的等效相位延迟量并不等于其固有的线双折射, 等效旋光角也不等于其法拉第旋转角, 它们同时都与光纤的固有圆双折射和磁场引起的圆双折射相关联。且在不同级联顺序的两种等效模型中, 等效相位延迟器的快轴方向都不与光纤的双折射主轴重合, 而是分别向两个相反的方向偏移一定的角度, 偏移角为等效旋光角的一半。

关键词 光纤光学; 双折射光纤; 法拉第效应; 相位延迟器; 旋光器; 琼斯矩阵

中图分类号 TN253 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS200828s2.0327

Jones Matrix Model of Birefringent Fibre in Magnetic Field

Bai Ye Shi Zhidong Liu Shu Li Mingjia Chen Hua

(Key Laboratory of Special Optical Fiber and Optical Access Network, Shanghai University, Shanghai 201800, China)

Abstract Through the model of cascading retarder and rotator, the polarization transmission characteristics of birefringent fiber in magnetic field have been studied. By multiplying their Jones Matrixes in different cascading order, we have deduced the analytic expressions for the phase shift and fast axis orientation of the equivalent retarder as well as the angular rotation of the equivalent rotator. When linear birefringence and circular birefringence occur in the same fiber, it is found that the equivalent phase retardation in unit length is not equal to its inherent birefringence, nor the equivalent angular rotation is equal to its Faraday rotation. They are relevant meanwhile both to the inherent linear birefringence of fiber and to the circular birefringence caused by the magnetic field. What's more, in the equivalent models with different cascading order, the fast axis of the equivalent retarder does not coincide with the linear birefringent axis of fiber, but has an offset angle respectively with opposite spin-wise, and the offset is just equal to the half of the equivalent angular rotation.

Key words fiber optics; birefringent optical fiber; Faraday effect; phase retarder; rotator; Jones matrix

1 引 言

光纤截面上几何结构或应力分布的非对称性, 会在光纤中引入一定的线双折射^[1,2]。当沿光纤轴向施加纵向磁场时, 法拉第效应会在光纤中产生圆双折射, 入射的线偏振光的偏振方向会发生旋转。在全光纤大电流传感器中^[3~6], 大电流感生的强磁场会在传感光纤中引起圆双折射, 虽然光纤电流传感器中通常使用的是低双折射光纤, 但由于要将传感光纤环绕在电流排四周, 光纤的弯曲不可避免地引入一定的线双折射; 在磁光调制法测量高双折射光纤拍长的实验系统中^[7,8], 要在待测光纤的局部施

加很强的磁场, 这也会在其固有的线双折射上引入一定的圆双折射。在这两种情况下, 光纤中同时存在固有圆双折射和由法拉第效应带来的圆双折射, 这两种双折射的叠加一般会形成椭圆双折射^[9]。另一方面, 相关的实验和理论表明^[10], 任何一段单模光纤, 其宏观偏振传输特性均可等效为一个相位延迟器和一个旋光器的级联。值得指出的是, 如果等效模型琼斯矩阵的参数选取不当, 将会计算得出自相矛盾的结论。本文将分析比较等效模型琼斯矩阵各参数之间的相互关系, 并对磁光调制法拍长测试方案的计算模型进行讨论。

基金项目: 国家自然科学基金(60777031)和上海市重点学科建设项目(S30108)资助课题。

作者简介: 白 晔(1983—), 男, 硕士研究生, 主要从事光电检测方面的研究。E-mail: zdshi@qq.com

导师简介: 石志东(1964—), 男, 博士, 研究员, 主要从事特种光纤方面的研究。E-mail: zdshi@shu.edu.cn(通信联系人)

2 级联等效模型的琼斯矩阵及其参数关系

一段长为 L , 双折射拍长为 L_B 的光纤相当于一个位相延迟器, 其相位延迟量为 $R_0 = 2\pi L/L_B$ 。当沿光纤轴向施加纵向磁场 H 时, 法拉第效应会在光纤中产生圆双折射, 入射的线偏振光的偏振方向会发生旋转, 法拉第旋转角为 $\Omega_0 = VHL$, V 为光纤材料的费尔德常数。对于一段水平放置且无扭曲、线双折射和圆双折射皆沿纵向均匀分布的光纤, 可以采用椭圆双折射模型, 直接求解光纤介质的本征方程。通过复杂的代数运算, 得出其琼斯矩阵^[9]

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & -B_0 \\ B_0 & A_0^* \end{pmatrix}, \quad (1)$$

式中

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \cos \Omega_1 & -\sin \Omega_1 \\ \sin \Omega_1 & \cos \Omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{j\frac{R_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-j\frac{R_1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1^* \\ B_1 & A_1^* \end{pmatrix}, \quad (2)$$

式中 $A_1 = \cos(R_1/2)\cos \Omega_1 + i\sin(R_1/2)\cos(-\Omega_1 + 2\theta_1)$, $B_1 = \cos(R_1/2)\sin \Omega_1 + i\sin(R_1/2)\sin(-\Omega_1 + 2\theta_1)$, $*$ 为复共轭符号。

同样, 若取等效旋光器的等效旋光角为 Ω_2 , 等效相位延迟器的快轴方向为 θ_2 , 等效相位延迟量为 R_2 , 也可求出等效模型情况二的琼斯传输矩阵为

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{j\frac{R_2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-j\frac{R_2}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega_2 & -\sin \Omega_2 \\ \sin \Omega_2 & \cos \Omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & -B_2^* \\ B_2 & A_2^* \end{pmatrix}, \quad (3)$$

式中 $A_2 = \cos(R_2/2)\cos \Omega_2 + i\sin(R_2/2)\cos(\Omega_2 + 2\theta_2)$, $B_2 = \cos(R_2/2)\sin \Omega_2 + i\sin(R_2/2)\sin(\Omega_2 + 2\theta_2)$ 。

令 $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_0$, 即有 $A_0 = A_1 = A_2$, $B_0 = B_1 = B_2$, 通过代数运算可得: $R_1 = R_2 = R \neq R_0$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega \neq \Omega_0$, $\theta_1 = -\theta_2 = 0.5\Omega \neq \theta_0$ 。其中

$$\tan \Omega = \frac{2\Omega_0}{\sqrt{R_0^2 + 4\Omega_0^2}} \tan \frac{\sqrt{R_0^2 + 4\Omega_0^2}}{2},$$

$$\sin \frac{R}{2} = \frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 + 4\Omega_0^2}} \sin \frac{\sqrt{R_0^2 + 4\Omega_0^2}}{2}, \quad (4)$$

这说明一段同时具有线双折射和圆双折射的光纤既可等效为一个先通过相位延迟器再通过旋光器的系统, 也可等效为一个先通过旋光器再通过相位延迟器的系统。在两种不同级联顺序的等效模型中, 其等效旋光角彼此相等, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, 但并不等于其法拉第旋转角 Ω_0 , 其等效相位延迟量彼此相等, $R_1 = R_2 = R$, 但不等于光纤固有线双折射与光纤长度的乘积 R_0 , Ω 和 R 均与 Ω_0 和 R_0 相互关联。虽然在等效模型中其等效相位延迟量相等, 但其等效相位延迟器的快轴方向 θ_1 和 θ_2 既不与光纤的双折射主轴平行, 也不互相重合, 相对于光纤的双折射主轴, 它

$$A_0 = \cos(U_0/2) + i\cos W \sin(\varphi_0/2),$$

$$B_0 = \sin W \sin(U_0/2),$$

$$U_0 = [R_0^2 + (2\Omega_0)^2]^{1/2},$$

$$\cos W = (r_0/U_0),$$

$$\sin W = (2\omega_0/U_0).$$

任意一段光纤在宏观上总能等效成一个相位延迟器和一个旋光器的级联, 根据级联的先后顺序, 可以有两种等效形式, 一种是入射光先通过相位延迟器再通过旋光器, 另一种是入射光先通过旋光器再通过相位延迟器。

在等效模型情况中, 若取其等效相位延迟器的快轴方向为 θ_1 , 等效相位延迟量为 R_1 , 等效旋光器的等效旋光角为 Ω_1 , 将各元件的琼斯矩阵及其方位旋转变换矩阵依次相乘, 可得出琼斯传输矩阵为

们分别沿相反的旋向旋转相等的角度, 该角度恰好是等效旋光角的一半。也就是说, 将相位延迟器放在旋光器的前面或者后面, 其快轴方向角将会相差一个等效旋光角度。

对于较短的光纤, 当 $0 < R_0/2 < \Omega_0 < \sqrt{(R_0/2)^2 + \Omega_0^2} < 0.5\pi$ 时, $\tan \Omega \approx \tan \Omega_0$, $\sin(R/2) \approx 0$, 这对应于强磁场中的低双折射光纤, $\Omega \approx \Omega_0$, $R \approx 0$; 当 $0 < \Omega_0 < R_0/2 < \sqrt{(R_0/2)^2 + \Omega_0^2} < 0.5\pi$ 时, $\tan \Omega \approx 0$, $\sin(R/2) \approx \sin(R_0/2)$, 这对应于弱磁场中的高双折射光纤, $\Omega \approx 0$, $R \approx R_0$; 当磁场引起的圆双折射与短光纤的固有线双折射量级相当, 即 $0 < \Omega_0 \approx R_0/2 < \sqrt{(R_0/2)^2 + \Omega_0^2} < 0.5\pi$ 时, $\tan \Omega \approx (\sqrt{2}/2)\tan(\sqrt{2}\Omega_0)$, $\sin(R/2) = (\sqrt{2}/2)\sin(\sqrt{2}R_0/2)$ 。对于较长的光纤, 由于三角函数的周期性, (4) 式所代表的 Ω 和 R 对 Ω_0 和 R_0 的依赖关系是错综复杂的, 很难得出一般性的结论, 必须根据具体的特性参数进行具体的分析。

图 1(a), (b) 分别为等效相位延迟量 R 与等效旋光角 Ω 随光纤固有相位延迟量 R_0 的变化曲线; 图 2(a), (b) 分别为等效相位延迟量 R 与等效旋光角 Ω 随法拉第旋转角 Ω_0 的变化曲线。为便于比较, 图 1, 2 中虚线分别表示 $\arctan[\tan(\Omega_0)]$ 和 $2\arcsin[\sin(R_0/2)]$ 的大小。

比较图 1(a1), (a2) 可见, 在给定法拉第旋光角 Ω_0 的情况下, 等效旋光角 Ω 随光纤固有相位延迟量 R_0 的增大而呈现周期性的跳变, 较大的法拉第旋光角, 对应的跳变周期较长, 变化曲线较平缓。由图 1 (b1), (b2) 可见, 当法拉第旋光角较大时, 等效相位延迟量随光纤固有相位延迟量的变化偏差较大, 而

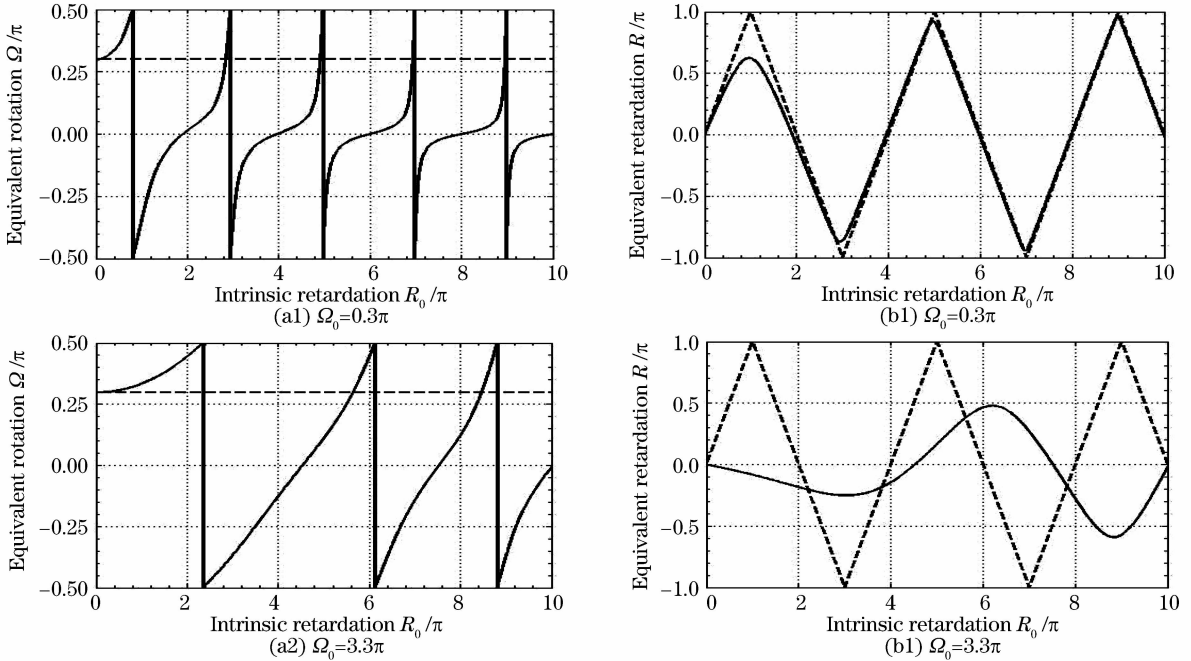


图 1 等效旋光角 Ω (a) 与等效相位延迟量 R (b) 随 R_0 的变化曲线

Fig. 1 Variation curve of equivalent angular rotation Ω (a) and equivalent phase retardation R (b) with the intrinsic birefringence R_0 .

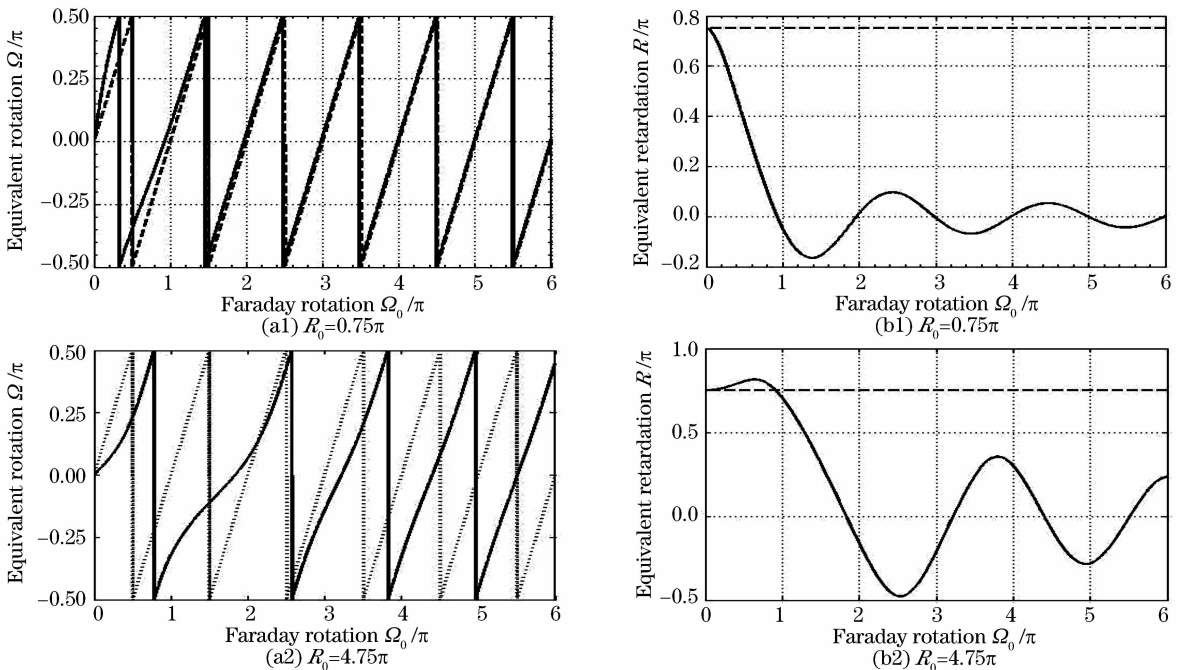


图 2 等效旋光角 Ω (a) 与等效相位延迟量 R (b) 随 Ω_0 的变化曲线

Fig. 2 Variation curve of equivalent angular rotation Ω (a) and equivalent phase retardation R (b) with Faraday rotation Ω_0 .

在法拉第旋光角较小时,随着光纤固有相位延迟量的增加,等效相位延迟量逐渐与其重合。比较图 2(a1),(a2)可见,在给定光纤固有相位延迟量 R_0 的情况下,等效旋光角随法拉第旋光角的增大也呈现周期性的跳变,对于低双折射光纤(对应于较小的 R_0 给定值),等效旋光角的变化基本与法拉第旋光角的变化保持同步,但对于高双折射光纤(对应于较大的 R_0 给定值),等效旋光角的变化滞后于法拉第旋光角的变化;由图 2(b1),(b2)可见,随着法拉第旋光角的增加,等效相位延迟量逐渐变小,说明法拉第旋光效应确实减弱了光纤的线双折射,光纤的固有双折射越小,这种减弱效应越明显。

3 讨 论

上述等效模型是针对一段均匀光纤建立的,对于双折射非均匀分布的光纤,可以建立相应的微分模型,然后进行积分得出总的偏振传输矩阵。将光纤分割成 N 段局域均匀的微元,令 $r(z)$ 为 z 处单位长度光纤的等效相位延迟量, $\theta(z)$ 为光纤的快轴方向角, $\omega(z)$ 为单位长度的等效旋光角。设光纤微元的长度为 $\Delta z=L/N$,则其等效模型参数为 $\Delta R(z)=r(z)\Delta z,\Delta\Omega(z)=\omega(z)\Delta z$ 。将上述参数代入(2)或(3)式,并作一些小量代换,可得这段光纤微元的琼斯传输矩阵为 $\mathbf{M}(z)=\mathbf{E}+\mathbf{m}(z)\Delta z$,其中 \mathbf{E} 为单位矩阵, $\mathbf{m}(z)=\begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}$, $a=i(r/2)\cos 2\theta$, $b=i(r/2)\sin 2\theta+\omega$,那么整段光纤的琼斯传输矩阵就为 $\mathbf{M}(L)=\lim_{N\rightarrow\infty}\prod_{n=1}^N[\mathbf{E}+\mathbf{m}(n\Delta z)]$ 。对此矩阵连乘进行化简^[10],可得

$$\mathbf{M}(L)=\begin{pmatrix} F & -G^* \\ G & F^* \end{pmatrix}, \quad (5)$$

式中

$$F=\cos T+i(C/T)\sin T,$$

$$G=(K+iS)(\sin T/T),$$

$$C(L)=0.5\int_0^L r(z)\cos[2\theta(z)]dz,$$

$$K(L)=\int_0^L \omega(z)dz,$$

$$S(L)=0.5\int_0^L r(z)\sin[2\theta(z)]dz,$$

$$T(L)=(C^2+S^2+K^2)^{0.5}.$$

对比(2)与(5)式,整段光纤的等效相位延迟量 R 可以表示为 $\cos^2(R/2)=\cos^2 T+(K^2/T^2)\sin^2 T$,它并不等于该段光纤的双折射分布函数沿光纤的积分,而是一个与双折射沿光纤的分布、旋光角沿光纤的分布和光纤的快轴方向角沿光纤的分布都有关的

函数。同理可以得出整段光纤的等效旋光角满足 $\tan \Omega=(K/T)\tan T$,也是一个与三项分布都有关的函数。而等效相位延迟器的快轴方向角也不仅仅和光纤的摆放角度和扭曲有关,还与光纤的双折射分布和旋光效应的分布有关。

对于置于非均匀磁场 $H(z)$ 中的一段双折射光纤,如何采用级联等效模型求解其偏振传输矩阵,这个看似简单的问题,若考虑不当,将会得出与实验结果不符的结果。问题的关键在于正确地选取光纤微元的分布参数。一般认为,在光纤微元中, $r(z)=r_0(z)=2\pi/L_B(z),\theta(z)=\theta_0(z),\omega(z)=\omega_0(z)=VH(z)$,但事实并非如此,即便是在局域微元中也必须采用(4)式,得出其等效参数,然后代入(5)式才能得出正确的结论。

在磁光调制法测量双折射光纤拍长的实验系统中^[7],在光纤某一局部施加的均匀磁场,将光纤分成局域性质不同的三段 $l_0+l_1+l_2=L$,实验表明,当此局域磁场沿着光纤移动时,出射光的偏振态会出现周期性的变化(由此空间周期可以定出拍长值),这说明当局域磁场移动时,整段光纤的偏振传输矩阵发生了周期性的变化。设待测光纤水平放置,无扭转, $\theta_0(z)\equiv 0$;在 l_0 段和 l_2 段光纤中无磁场,取 $r_0(z)\equiv 2\pi/L_B,\omega_0(z)\equiv 0$;在 l_1 段光纤中, $r_0(z)\equiv 2\pi/L_B,\omega_0(z)\equiv VH$,若直接代入(5)式进行分段积分,可见积分值 $C(L)=\pi L/L_B,K(L)=VHl_1,S(L)=0$,都是与 l_0 和 l_2 无关的量,因而整段光纤的偏振传输矩阵也与局域磁场的施加位置无关,这显然与实验结果矛盾。在 l_0 段和 l_2 段光纤中,由于不存在圆双折射,法拉第旋转角为零,固然可以直接取 $r(z)\equiv 2\pi/L_B,\theta(z)\equiv 0,\omega(z)\equiv VH$;但在 l_1 段光纤中,由于局域磁场的存在,法拉第旋转角不为零,其等效旋光角也不为零,由(4)式可知,

$$\omega_1=\arctan\left[\frac{\tan\sqrt{(VH)^2+(\pi/L_B)^2}}{\sqrt{1+(\pi/VHL_B)^2}}\right],$$

$$r_1=2\arcsin\left[\frac{\sin\sqrt{(\pi/L_B)^2+(VH)^2}}{\sqrt{1+(VHL_B/\pi)^2}}\right],$$

其等效延迟器的快轴方向角也不为零, $\theta(z)=0.5\omega_1$,代入(5)式进行分段积分得到的 $C(L),K(L)$ 和 $S(L)$ 同时与 l_0 和 l_2 相关联,即整段光纤的偏振传输矩阵与局域磁场的施加位置有关,这与实验结论是相符的。

4 结 论

给出的等效相位延迟量和等效旋光角的解析表达式表明,它们同时都与光纤的固有双折射以及

磁场引起的法拉第旋转角相关联,而且等效相位延迟器的快轴方向与光纤固有双折射的主轴方向并不重合,而是偏离一定的角度,该角度值等于等效旋光角的一半。在分析磁光调制法测量光纤双折射拍长的实验系统时,必须考虑此偏离角,才能得出与实验相符的结论。在等效计算模型中,相位延迟器与旋光器可以有两种不同的级联顺序,虽然它们的等效相位延迟量和等效旋光角相等,但等效相位延迟器的快轴方向是不同的,它们分别沿相反的旋向偏离光纤固有双折射的主轴,因此两种级联顺序中相位延迟器的快轴方向相差一个等效旋光角。

参 考 文 献

- 1 J. Noda, K Okamoto, Y. Sasaki. Polarization-maintaining fibers and their applications [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1986, **4**(8): 1071~1089
- 2 M. Monerie, L. Jeunhomme. Polarization mode coupling in long single-mode fibers [J]. *Opt. and Quantum Electron.*, 1980, **12**: 449~461
- 3 A. M. Smith. Polarization and magneto-optic properties of single-mode optical fiber [J]. *Appl. Opt.*, 1978, **17**:52~56
- 4 A. Papp, H. Harms. Magneto-optical current transformer. 1: Principles [J]. *Appl. Opt.*, 1980, **19**(22):3729~3734
- 5 H. Aulich, W. Beck, N. Douklias *et al.*. Magneto-optical current transformer. 2: Components [J]. *Appl. Opt.*, 1980, **19**(22):3735~3740
- 6 H. Harms, A. Papp. Magneto-optical current transformer. 3: Measurements [J]. *Appl. Opt.*, 1980, **19**(22):3741~3745
- 7 P. G. Zhang, D. Irvine-Halliday. Measurement of the beat length in high-birefringent optical fiber by way of magneto-optic modulation [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1994, **12**:597~581
- 8 D. Irvine-Halliday, M. R. Khan, P.-G. Zhang. Beat-length measurement of high-birefringence polarization-maintaining optical fiber using the dc Faraday magneto-optic effect [J]. *Opt. Eng.*, 2000, **39**(5):1310~1315
- 9 Fan Chongcheng, Peng Jihu. Waveguide Optics [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1988. 222~231
范崇澄,彭吉虎. 导波光学[M]. 北京:北京理工大学出版社, 1988. 222~231
- 10 P. Kapron, D. B. Keck. Birefringence in dielectric optical waveguides [J]. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1972, **QE-8**:222~224