

光脉冲传输的 Volterra 级数模型收敛性质的研究

邵群峰 漆晓琼 张晓萍

(兰州大学信息科学与工程学院现代通信技术研究所, 甘肃 兰州 730000)

摘要 利用级数收敛理论, 推导出了基于 Volterra 级数理论的非线性薛定谔方程(NLSE)半解析解的收敛性质的表达式, 得到了保证级数收敛所允许的光脉冲最大输入功率、传输距离和所用 Volterra 级数模型的阶数以及与光纤参数之间的关系。利用数值计算得到了在给定光纤参数的情况下, 使用不同阶数的 Volterra 级数时为保证级数收敛所允许的光脉冲最大输入功率和传输距离的关系曲线, 结果表明, 使用不同阶数的 Volterra 级数来描述光脉冲传输时, 与阶数相对应的为保证级数收敛所允许的光脉冲最大输入功率也不同, 同时脉冲的宽度和光纤的色散都对为保证级数收敛所允许的光脉冲最大输入功率有影响。

关键词 光纤光学; 非线性薛定谔方程; Volterra 级数; 级数收敛

中图分类号 O436 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS200828s2.0323

Study on Convergence of the Volterra Series Transfer Function Model of Optical Pulse's Propagation in Fiber

Shao Qunfeng Qi Xiaoqiong Zhang Xiaoping

(Institute of Modern Communication Technology, School of Information Science and Engineering, Lanzhou University, Lanzhou, Gansu 730000, China)

Abstract The expression to represent the convergence of Volterra series transfer function (VSTF) was obtained based on the series convergence theory. The relationship of the pulse's maximum input power to guarantee the convergence of VSTF, transmission length, and the order of VSTF can be explained by the expression mentioned above. The variation of pulse's maximum input power to guarantee the convergence of VSTF versus transmission length when using different order VSTF to approximate in the given fiber's parameters of the circumstances was derived from the numerical simulation applied to the expression. The results shows that the pulse's maximum input power to guarantee the convergence of VSTF is not only related to the order of VSTF applied but also the pulse's width and fiber's dispersion parameter.

Key words fiber optics; nonlinear Schrödinger equation; Volterra series; convergence of series

1 引 言

光脉冲在光纤中的传输演化过程可以用非线性薛定谔方程(NLSE)来描述, 包括色散和各种非线性效应如自相位调制、交叉相位调制和四波混频等, 都可以用 NLSE 来描述。一般情况下 NLSE 不适于解析求解, 通常使用数值方法对其求解, 如目前最常用的分步傅里叶方法^[1,2]。数值方法是不能显示光脉冲在光纤内传输时光纤色散、非线性以及二者相互作用是如何影响光脉冲的演化的, 所以无法借助数值方法求解 NLSE 来寻找消除非线性效应对

光脉冲影响的方法, 尤其是在需要考虑到信道内非线性效应的高速大容量光纤通信系统中。K. V. Peddannragari 等^[3]提出基于 Volterra 级数传递函数(VSTF)的 NLSE 的半解析闭式近似解, 作为一种在频域内描述光纤信道性质的传递函数^[4]。此后, 人们开始关注于应用 NLSE 的 VSTF 解来研究非线性效应对光脉冲的影响和光纤传输链路的优化及光纤信道容量^[4~9]。本文主要分析了 VSTF 解收敛的性质, 并推导出了在保证 VSTF 解收敛的情况下, 描述 VSTF 的阶数 n , 光纤物理参数以及输入脉

基金项目: 新世纪优秀人才支持计划(NCET-04-0981)资助课题。

作者简介: 邵群峰(1982—), 男, 博士研究生, 主要从事高速大容量光纤通信系统的非线性补偿方面的研究。

E-mail: shaoqf05@lzu.cn

导师简介: 张晓萍(1961—), 女, 教授, 博士生导师, 主要从事光纤通信系统及光电技术等方面的研究。

E-mail: zxp@lzu.edu.cn

冲的功率和半峰全宽相互关系的解析表达式,为合理地利用不同阶数的 Volterra 级数传递函数逼近光脉冲在光纤中传输的精确解和对光通信系统的非线性分析提供了理论依据。

2 非线性薛定谔方程的 VSTF 解及其收敛性质

2.1 非线性薛定谔方程的 VSTF 解

描述光脉冲在光纤中传输演化过程的非线性薛

定谔方程为

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = -i \frac{\alpha}{2} A + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \gamma |A|^2 A, \quad (1)$$

式中 $T = t - z/v_g$, z 为传输距离, v_g 为脉冲的群速度; $A = A(z, T)$ 为脉冲包络的慢变振幅; α , β_2 和 γ 分别为光纤的衰减、二阶色散和非线性系数。设 $\tilde{A}(z, \omega)$ 为 $A(z, T)$ 的傅里叶变换, 将(1)式做傅里叶变换, 得到 NLSE 的频域表示形式

$$\frac{\partial \tilde{A}(z, \omega)}{\partial z} = \left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{i}{2} \beta_2 \omega^2 \right) \tilde{A}(z, \omega) + \frac{i\gamma}{4\pi^2} \iint \tilde{A}(z, \omega_1) \tilde{A}^*(z, \omega_2) \tilde{A}(z, \omega - \omega_1 + \omega_2) d\omega_1 d\omega_2, \quad (2)$$

用 VSTF 所表示的 NLSE 的半解析闭式解为^[3]

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\omega, z) = & H_1(\omega, z) \tilde{A}_{in}(\omega) + \iint H_3(\omega_1, \omega_2, \omega, z) \tilde{A}_{in}(\omega_1) \tilde{A}_{in}^*(\omega_2) \tilde{A}_{in}(\omega - \omega_1 + \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 + \\ & \iiint H_5(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega, z) \tilde{A}_{in}(\omega_1) \tilde{A}_{in}^*(\omega_2) \tilde{A}_{in}(\omega_3) \tilde{A}_{in}^*(\omega_4) \times \\ & \tilde{A}_{in}(\omega - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $\tilde{A}_{in}(\omega)$ 为输入脉冲 $A_{in}(t) = A(z=0, T)$ 的傅里叶变换, $H_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}, \omega - \omega_1 + \omega_2 - \dots + \omega_{n-1}, z)$ 为其 n 阶核函数, 只与光纤的物理参数及距离有关, 在光纤中不存在偶数阶的非线性效应, 所以(3)式中只包含奇数阶的核函数。将(3)式代入(2)式可以求得不同阶数的 H_n 的表达式:

$$H_1(\omega, z) = \exp\left(-\frac{\alpha z}{2} - i \frac{\beta_2 \omega^2 z}{2}\right), \quad (4)$$

$$H_3(\omega, \omega_1, \omega_2, z) = i \frac{\gamma}{4\pi^2} H_1(\omega, z) \frac{1 - \exp[-\alpha z - j\beta_2(\omega_1 - \omega)(\omega_1 - \omega_2)z]}{\alpha + j\beta_2(\omega_1 - \omega)(\omega_1 - \omega_2)}. \quad (5)$$

5 阶核函数的表达式如文献[3]中的(12)式所示。

当用(3)式来描述光脉冲在一段光纤中传输后的结果时, 包含更高阶数的 H_n 可以提高解的精确度, 但是通常情况下, 高于 5 阶的 H_n 的表达式形式将会变得很复杂, 一般将(3)式截止到 3 阶或者 5 阶。

2.2 非线性薛定谔方程的 VSTF 解的收敛性质

(3)式是一种幂函数的形式^[10], 根据三角不等式, 可以得到

$$\begin{aligned} |\tilde{A}(\omega, z)| \leq & |H_1(\omega, z)| |\tilde{A}_{in \max}(\omega)| + \left| \iint H_3(\omega_1, \omega_2, \omega, z) d\omega_1 d\omega_2 \right| |\tilde{A}_{in \max}(\omega)|^3 + \dots + \\ & \left| \int \dots \int H_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega, z) d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \right| |\tilde{A}_{in \max}(\omega)|^n + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

当且仅当(6)式右边的无限项幂级数的和收敛才能保证 Volterra 级数的收敛, 因此不等式(7)必须被满足

$$\frac{\left| \int \dots \int H_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega, z) d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \right| * |\tilde{A}_{in \max}(\omega)|^n}{\left| \int \dots \int H_{n-2}(\omega_1, \dots, \omega_{n-3}, \omega, z) d\omega_1 \dots d\omega_{n-3} \right| * |\tilde{A}_{in \max}(\omega)|^{n-2}} < 1. \quad (7)$$

由此可以得到保证 VSTF 解收敛的一个准则, 即

$$|\tilde{A}_{in \max}(\omega)|^2 < \frac{\left| \int \dots \int H_{n-2}(\omega_1, \dots, \omega_{n-3}, \omega, z) d\omega_1 \dots d\omega_{n-3} \right|}{\left| \int \dots \int H_n(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega, z) d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \right|}. \quad (8)$$

设输入的高斯型光脉冲为

$$A_{in}(T) = \sqrt{P_0} \exp\left(-\frac{T^2}{2T_0^2}\right), \quad (9)$$

P_0 为输入脉冲的峰值功率, T_0 为输入脉冲的半峰全宽, 对(9)式做傅里叶变换, 可得输入脉冲的频域形式

$$\widetilde{A}_{in}(\omega) = \sqrt{2\pi P_0 T_0} \exp[-(\omega T_0)^2/2], \tag{10}$$

因此,有

$$|\widetilde{A}_{in\max}(\omega)|^2 = 2\pi P_0 T_0^2. \tag{11}$$

将(11)式代入(8)式,可得

$$P_0 < \frac{1}{2\pi T_0^2} \left| \frac{\int \cdots \int H_{n-2}(\omega_1, \cdots, \omega_{n-3}, \omega, z) d\omega_1 \cdots d\omega_{n-3}}{\int \cdots \int H_n(\omega_1, \cdots, \omega_{n-1}, \omega, z) d\omega_1 \cdots d\omega_{n-1}} \right|. \tag{12}$$

只有当不等式(12)被满足时,才能保证(3)式收敛,因此要求 P_0 的最大值要小于(12)式右边的最小值,将满足上述要求的 P_0 的最大值记为 P_{0up-n} ,即保证 n 阶 VSTF 解收敛的输入脉冲功率的上限值为

$$P_{0up-n} = \min \left\{ \frac{1}{2\pi T_0^2} \left| \frac{\int \cdots \int H_{n-2}(\omega_1, \cdots, \omega_{n-3}, \omega, z) d\omega_1 \cdots d\omega_{n-3}}{\int \cdots \int H_n(\omega_1, \cdots, \omega_{n-1}, \omega, z) d\omega_1 \cdots d\omega_{n-1}} \right| \right\}. \tag{13}$$

类似地,在输入脉冲峰值功率一定的情况下,为保证 n 阶 VSTF 解收敛的脉冲宽度的上限值为

$$T_{0up-n} = \min \left\{ \frac{1}{2\pi P_0} \left| \frac{\int \cdots \int H_{n-2}(\omega_1, \cdots, \omega_{n-3}, \omega, z) d\omega_1 \cdots d\omega_{n-3}}{\int \cdots \int H_n(\omega_1, \cdots, \omega_{n-1}, \omega, z) d\omega_1 \cdots d\omega_{n-1}} \right|^{1/2} \right\}. \tag{14}$$

式中, $H_n(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n-1}, \omega - \omega_1 + \omega_2 - \cdots + \omega_{n-1}, z)$ 为 n 阶核函数,它与光纤的参数如色散、衰减及非线性系数和传输距离有关,因此,可以将(13)式和(14)式看作是为保证 n 阶 VSTF 解收敛和准确度的情况下,输入光脉冲的参数和光纤物理参数之间的相互制约关系。

$D=16$ ps/(nm·km),色散位移光纤(DSF), $D=2$ ps/(nm·km)和色散补偿光纤(DCF), $D=100$ ps/(nm·km);为了比较色散对 P_{0up-n} 的影响,将三种光纤的衰减和非线性系数设为相同的值,输入脉冲的半宽度 T_0 均为 9 ps(对应于 40 Gbit/s 的传输速率)。

3 数值分析

将 H_1, H_3 和 H_5 的表达式代入(13)式中,分别得到 P_{0up-3} 和 P_{0up-5} 的表达式。图 1 和图 2 分别给出了 3 阶 VSTF 解和 5 阶 VSTF 解的允许输入功率的上限值和传输距离的关系曲线,其中不同的色散值代表最常使用的三种光纤:单模光纤(SMF),

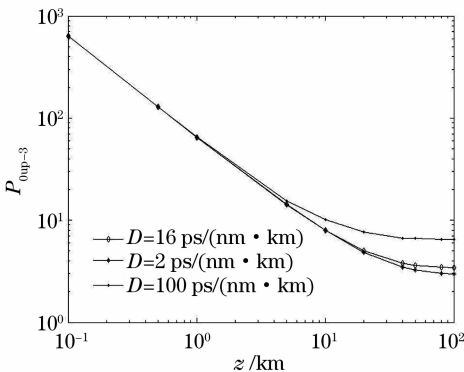


图 1 3 阶 VSTF 解的输入脉冲峰值功率上限和传输光纤长度的关系曲线

Fig. 1 Relationship curve of input pulse's peak power up-bounds for 3rd VSTF solution and the fiber length

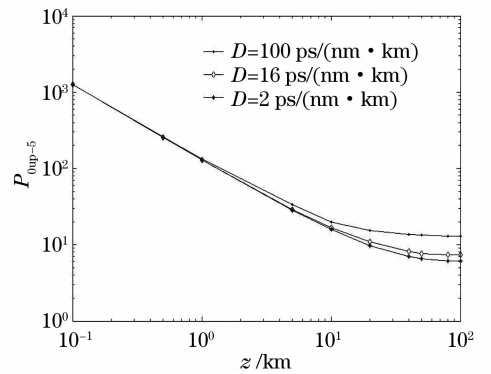


图 2 5 阶 VSTF 解的输入脉冲峰值功率上限和传输光纤长度的关系曲线

Fig. 2 Relationship curve of input pulse's peak power up-bounds for 5th VSTF solution and the fiber length

由图 1 可以看出, P_{0up-3} 的值随着传输距离的增加而减小,并逐渐趋于稳定;当传输距离超过 1 m 后,不同色散参数的光纤所对应的 P_{0up-3} 逐渐出现明显的差异,色散参数的绝对值越大, P_{0up-3} 越大。图 2 所示的曲线变换的趋势与图 1 类似。但可以看出,相同色散参数和传输距离的情况下, $P_{0up-5} > P_{0up-3}$ 。

在传输距离很短的时候,色散起主要作用,

VSTF 的一阶项可以精确地描述色散对光脉冲的作用,三阶和五阶项所表示的非线性作用较小,所以此时允许较大的输入功率。随着传输距离的增加,非线性效应的累积越大,因此为保证 VSTF 解的精确和收敛就需要包含更高阶的项,或者降低输入脉冲的功率以减小非线性效应。对于不同色散参数的光纤而言,色散参数越大,其色散长度 $L_D = T_0 / |\beta_2|$ 越小,传输相同的距离时,色散的作用相对非线性效应的影响就越大,因此可以允许较大的输入功率。从(14)式还可以看出,在输入脉冲的峰值功率一定的情况下, $T_{0\text{up}-n}$ 与传输距离的关系类似于图 1 和图 2,随着传输距离的增加, $T_{0\text{up}-n}$ 越小最后趋于稳定。

4 结 论

利用级数收敛的理论,推导出了保证 n 阶 VSTF 解收敛的输入脉冲功率的上限值 $P_{0\text{up}-n}$ 和半峰全宽的上限值 $T_{0\text{up}-n}$ 的表达式,给出了采用不同阶数的 VSTF 解描述光脉冲在光纤中的传输演化时,阶数、光纤参数和输入脉冲参数之间的相互制约关系,并分别对 3 阶和 5 阶 VSTF 解的情况计算了不同传输长度下的 $P_{0\text{up}-n}$, 与理论分析的结论一致。所得结论为合理利用不同阶数的 VSTF 解逼近光脉冲在光纤中传输的精确解和对光通信系统的非线性分析提供了理论依据。

参 考 文 献

1 Govind P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics & Application of*

- Nonlinear Fiber Optics* [M]. Third Edition, Jia Dongfang, Yu Zhenghong transl., Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2003. 22~35
- Govind P. Agrawal. 非线性光纤光学原理及应用[M]. 贾东方, 余震虹译, 北京: 电子工业出版社, 2003. 22~35
- 2 Li Jun, Huang Dexiu, Zhang Xinliang. Numerical analysis of fiber propagation model [J]. *Optoelectronic Technology & Information*, 2003, (2): 9~12
- 李 均, 黄德修, 张新亮. 光纤传输模型的数值计算研究[J]. *光电子技术与信息*, 2003, (2): 9~12
- 3 K. V. Peddannragari, Maite Brandt-Pearce. Volterra series transfer function of single-mode fibers [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1997, **15**(12): 2232~2241
- 4 Jiang Zhi, Fan Chongcheng. Frequency domain transfer function of optical fiber transmission system with dispersion and self-phase modulation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(11): 1296~1299
- 蒋 志, 范崇澄. 光纤通信系统中色散与自相位调制作用下的频域传递函数[J]. *光学学报*, 2001, **21**(11): 1296~1299
- 5 Bo Xu, Maite Brandt-Pearce. Comparison of FWM- and XPM-induced crosstalk using the Volterra series transfer function method[J]. *J. Lightwave Technol.*, 2003, **21**(1): 40~53
- 6 Qun Zhang. Performance analysis and design of WDM based optical communication systems using a Volterra series method [D]. Charlottesville: University of Virginia, 2001. 84~114
- 7 Jau Tang. A comparison study of the shannon channel capacity of various nonlinear optical fibers [J]. *J. Lightwave Technol.*, 2006, **24**(5): 2070~2075
- 8 Qi Xiaoqiong, Shao Qunfeng, Zhang Xiaoping. Lumped fiber nonlinear noise compensation based on Volterra theory [J]. *Chinese. J. Lasers*, 2007, **34**(11): 1527~1532
- 漆晓琼, 邵群峰, 张晓萍. 基于沃尔泰拉理论的集总光纤非线性噪声补偿[J]. *中国激光*, 2007, **34**(11): 1527~1532
- 9 Xianming Zhu, Kumar S, Raghavan S. Nonlinear Electronic Dispersion Compensation Techniques for Fiber-Optic Communication Systems[C]. *OFC/NFOEC 2008*, San Diego, CA, USA
- 10 Martin Schetzen. *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems* [M]. New York: Jhon Wiley & Sons, Inc., 1980. 77~90