文章编号：0253-2239(2008)supplement2-0184-04

五阶非线性作用下光纤中类明孤子运动方程的变分研究

刘文军

（南京信息工程大学数理学院，江苏 南京 210044）

摘要 当考虑到五阶非线性对光脉冲传输的影响时，光纤中类明孤子的传输服从含五阶非线性修正项的非线性Schrödinger方程。利用何氏半反推法建立该类明孤子运动方程的变分形式，然后应用何氏变分法导出该方程基态孤子解的双曲正割表达式。同时，受何氏指数函数方法的启发，建立了一种新的高斯表达式。一方面，基于得到的显式表达式相关学者可进一步研究五阶非线性对光脉冲传输的影响。另一方面，该求解过程也进一步显示了用何氏变分法求解数学物理中非线性发展方程的简洁有效性。

关键词 光纤光学；类明孤子；何氏变分法；指数函数法；高斯表达式

中图分类号 TN929.11 **文献标识码** A **doi**：10.3788/AOS200828s2.0184

A Variational Study on the Propagation Equation of Bright Soliton-Like Pulse Under the Influence of the Fifth-Order Nonlinearity in Optical Fiber

Liu Wenjun

(*College of Mathematics and Physics*, *Nanjing University of Information Science and Technology*, *Nanjing*, *Jiangsu* 210044, *China*)

Abstract When considering the influence of the fifth-order nonlinearity on the propagation of optical pulse, the propagation of bright soliton-like pulse in optical fiber satisfies the following nonlinear Schrödinger equation with the fifth-order nonlinear term. By using of He′s semi-inverse method, the variational form to this equation is established firstly. Then, the Sech expression formula to the traveling wave solution of the equation is derived by utilizing He′s variational method. At the same time, motivatied by He′s exp-function method, a new Guass expression formula of the solution is obtained. On the one hand, one can further study the influence of fifth-order nonlinearity on the propagation of pulse in optical fiber based on these expression formulae. On the other hand, the solution process reveals that He′s variational method is an easy, concise and effective method to solve nonlinear evolution equations arising in mathematical physics.

Key words fiber optics; bright soliton-like; He′s variational method; exp-function method; Guass formula

1 引　　言

Hasegawa和Tappert[1,2]于1973年首次提出光孤子的概念，并从理论上证明了任何无损光纤中的光脉冲在传输过程中能形变为孤子后稳定传输。光孤子通信具有高码率、长距离（无需中继）和大容量的优点，可以构成超高速传输系统，因此光孤子及其在通信中的应用研究引起了学术界和工业界的高度重视。近年来，光孤子的研究取得了令人瞩目的进展[3~5]。考虑到各种微扰因素的影响，孤子脉冲的传输服从含修正项的非线性Schrodinger方程(MNLS)。关于孤子随传播距离演化规律的研究以及MNLS的数值解或解析解的算法研究已成为目前国内外信息光学领域的一个十分活跃的研究方向。

谢应茂[6]研究了微扰对类明孤子在光纤中非线性传输特性的影响，并统一了在单模光纤、色散缓变光纤或色散控制光纤中类明孤子脉冲参量演化的动力学方程。马松华和方建平利用改进的里卡蒂(Riccati)方程映射法[7]，得到了联立薛定谔方程（负KdV方程）新的精确解，并由此模拟出了联立Schrodinger方程的不传播光孤子和传播光孤子以及光孤子的中和现象。最近，王永祥等[8]考虑了五阶非线性对光脉冲传输的影响。此时，在光纤中传

基金项目：南京信息工程大学科研基金资助项目.

作者简介：刘文军(1981—)，男，博士，讲师，主要从事微分方程及其应用方面的研究。E-mail：wjliu@nuist.edu.cn

输的类明孤子满足含五阶非线性修正项的下列非线性 Schrödinger 方程[9]

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial Z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}+|\psi|^2\psi=-\gamma|\psi|^4\psi,\tag{1}$$

式中 $\psi(Z,T)$ 表示归一化的类明孤子脉冲传输包络函数，Z 和 T 分别表示归一化的传输距离和时间。王永祥等首先设方程(1)的尝试解为

$$\psi(Z,T)=A(Z)\mathrm{sech}\left[\frac{T-\xi(Z)}{a(Z)}\right]\times$$
$$\exp\{\mathrm{i}\omega(Z)[T-\xi(Z)]+\mathrm{i}b(Z)T^2+\mathrm{i}\varphi(Z)\},$$

然后采用变分法导出了光纤中类明孤子各参数随传输距离演化的方程组并研究了脉宽与距离、啁啾与脉宽之间的关系。

本文将首先应用何氏变分法[10]（He′s variational method)来导出方程(1)的行波解的双曲正割(sech)表达式。同时，受何氏指数函数方法[11]（He′s exp-function method)的启发，本文还将建立一种新的高斯表达式。

2 变分描述

寻求方程(1)下列形式的行波解

$$\psi(Z,T)=f(\xi)\exp[\mathrm{i}(mT-nZ)],$$
$$\xi=T-UZ,\tag{2}$$

式中函数 f 与波速 U 待定，m,n 为常数。将(2)式代入方程(1)，得

$$\frac{1}{2}f''+\mathrm{i}(m-U)f'+\left(n-\frac{1}{2}m^2\right)f+$$
$$|f|^2f+\gamma|f|^4f=0,\tag{3}$$

为了消去虚部，我们令 $m=U$，并记 $n=\frac{1}{2}m^2-\alpha$，则 f 可假定为实函数。这样，方程(3)化为

$$\frac{1}{2}f''-\alpha f+f^3+\gamma f^5=0,\tag{4}$$

利用何氏半反推法（He′s semi-inverse method)，可建立下列变分形式

$$J=\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{4}(f')^2+\frac{1}{2}\alpha f^2-\frac{1}{4}f^4-\frac{1}{6}\gamma f^6\right]\mathrm{d}\xi.\tag{5}$$

3 基态孤子解

3.1 双曲正割(sech)表达式

应用何氏变分法，首先寻找方程(4)的如下形式的孤立波解

$$f=p\,\mathrm{sech}(q\xi),\tag{6}$$

式中 p 与 q 均为待定常数。

将(6)式代入(5)式，得

$$J=\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{4}p^2q^2\mathrm{sech}^2(q\xi)\tanh^2(q\xi)+\frac{1}{2}\alpha p^2\mathrm{sech}^2(q\xi)-\frac{1}{4}p^4\mathrm{sech}^4(q\xi)-\frac{1}{6}\gamma p^6\mathrm{sech}^6(q\xi)\right]d\xi$$
$$=\frac{p^2q}{12}+\frac{\alpha p^2}{2q}-\frac{p^4}{6q}-\frac{4\gamma p^6}{45q},$$

从而

$$\frac{\partial J}{\partial p}=\frac{pq}{6}+\frac{\alpha p}{q}-\frac{2p^3}{3q}-\frac{8\gamma p^5}{15q}=0,$$
$$\frac{\partial J}{\partial q}=\frac{p^2}{12}-\frac{\alpha p^2}{2q^2}+\frac{p^4}{6q^2}+\frac{4\gamma p^6}{45q^2}=0,$$

或

$$5q^2+30\alpha-20p^2-16\gamma p^4=0,\tag{7}$$
$$5q^2-30\alpha+10p^2+\frac{16}{3}\gamma p^4=0。\tag{8}$$

利用 Mathematica 软件解方程组(7)～(8)，可得所求方程(4)的孤立波解

$$f_1=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{-45+3\sqrt{5[45-64\alpha(1+3\gamma)]}}{1+3\gamma}}\times$$
$$\mathrm{sech}\left[\frac{\sqrt{48\alpha(1-9\gamma^2)+3(2-3\gamma)\left(\sqrt{5[45-64\alpha(1+3\gamma)]}-15\right)}}{2\sqrt{2}(1+3\gamma)}\xi\right]$$
$$f_2=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{-45-3\sqrt{5[45-64\alpha(1+3\gamma)]}}{1+3\gamma}}\times$$
$$\mathrm{sech}\left[\frac{\sqrt{48\alpha(1-9\gamma^2)-3(2-3\gamma)\left(\sqrt{5[45-64\alpha(1+3\gamma)]}+15\right)}}{2\sqrt{2}(1+3\gamma)}\xi\right],$$

再由(2)式，可得方程(1)的下列基态孤子解

$$\psi_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{-45+3\sqrt{5[45-64\alpha(1+3\gamma)]}}{1+3\gamma}}\times$$
$$\mathrm{sech}\left[\frac{\sqrt{48\alpha(1-9\gamma^2)+3(2-3\gamma)(\sqrt{5[45-64\alpha(1+3\gamma)]}-15)}}{2\sqrt{2}(1+3\gamma)}(T-mZ)\right]\exp[\mathrm{i}(mT-nZ)], \quad (9)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{-45-3\sqrt{5[45-64\alpha(1+3\gamma)]}}{1+3\gamma}}\times$$
$$\mathrm{sech}\left[\frac{\sqrt{48\alpha(1-9\gamma^2)-3(2-3\gamma)(\sqrt{5[45-64\alpha(1+3\gamma)]}-15)}}{2\sqrt{2}(1+3\gamma)}(T-mZ)\right]\exp[\mathrm{i}(mT-nZ)], \quad (10)$$

式中 $\alpha=\frac{1}{2}m^2-n$。

3.2 高斯(Gauss)表达式

我们知道,指数函数方法是何吉欢在文献[11]引入的求解数学物理中非线性发展方程的一种十分简洁有效的新方法,该方法假定行波解可表示成下列指数函数形式

$$f(\xi)=\frac{\sum_{n=-c}^{d}a_n\exp(n\xi)}{\sum_{m=-p}^{q}b_m\exp(m\eta)},$$

式中 c,d,p 和 q 是待定的正整数,a_n 与 b_n 是待定的常数。本文中,我们将简化上述表达式为如下高斯函数形式

$$f=k\exp(-l\xi^2), \quad (11)$$

式中 k 与 l 是待定的常数。

将式(11)代入式(5),我们有

$$J=\frac{\sqrt{2\pi}}{16}k^2l^{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{2\pi}}{8}\alpha k^2l^{-\frac{1}{2}}-$$
$$\frac{\sqrt{\pi}}{16}k^4l^{-\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{6\pi}}{72}\gamma k^6l^{-\frac{1}{2}},$$

从而

$$\frac{\partial J}{\partial k}=\frac{\sqrt{2\pi}}{8}kl^{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\alpha kl^{-\frac{1}{2}}-$$
$$\frac{\sqrt{\pi}}{4}k^3l^{-\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{6\pi}}{12}\gamma k^5l^{-\frac{1}{2}}=0,$$
$$\frac{\partial J}{\partial l}=\frac{\sqrt{2\pi}}{32}k^2l^{-\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{2\pi}}{16}\alpha k^2l^{-\frac{3}{2}}+$$
$$\frac{\sqrt{\pi}}{32}k^4l^{-\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{6\pi}}{144}\gamma k^6l^{-\frac{3}{2}}=0,$$

或

$$3\sqrt{2}l+6\sqrt{2}\alpha-6k^2-2\sqrt{6}\gamma k^4=0, \quad (12)$$
$$9\sqrt{2}l-18\sqrt{2}\alpha+9k^2+2\sqrt{6}\gamma k^4=0, \quad (13)$$

解方程组(12)~(13),可得所求方程(4)的孤立波解

$$\left\{\begin{aligned}
f_1&=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{-27+3\sqrt{81+256\alpha\gamma}}{\sqrt{6}\gamma}}\times\\
&\exp\left\{-\left[\alpha-\frac{-27+3\sqrt{81+256\alpha\gamma}}{128\sqrt{3}\gamma}\right]\xi^2\right\},\\
f_2&=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{-27-3\sqrt{81+256\alpha\gamma}}{\sqrt{6}\gamma}}\times\\
&\exp\left\{-\left[\alpha+\frac{27+3\sqrt{81+256\alpha\gamma}}{128\sqrt{3}\gamma}\right]\xi^2\right\},
\end{aligned}\right. \quad (14)$$

再由式(2),可得方程(1)的下列基态孤子解

$$\psi_1=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{-27+3\sqrt{81+256\alpha\gamma}}{\sqrt{6}\gamma}}\exp\left\{\mathrm{i}(mT-nZ)-\left[\alpha-\frac{-27+3\sqrt{81+256\alpha\gamma}}{128\sqrt{3}\gamma}\right](T-mZ)^2\right\}, \quad (15)$$

$$\psi_2=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{-27-3\sqrt{81+256\alpha\gamma}}{\sqrt{6}\gamma}}exp\left\{\mathrm{i}(mT-nZ)-\left[\alpha+\frac{27+3\sqrt{81+256\alpha\gamma}}{128\sqrt{3}\gamma}\right](T-mZ)^2\right\}, \quad (16)$$

式中 $\alpha=\frac{1}{2}m^2-n$。

4 结 论

本文考虑了含五阶非线性微扰修正项的光纤中类明孤子的运动方程,通过应用何氏变分法分别导出了方程基态孤子的双曲正割表达式(9)、(10)及新的高斯表达式(15)、(16)。基于所得到的显式表达式,通过考察 m,n 及 γ 的变化,可进一步研究五阶非线性对光脉冲传输的影响。

参 考 文 献

1 A. Hasegawa , F. D. Tappert . Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dialectric fibers-I:

anomalous dispersion[J]. *Appl. Phys. Lett.*, 1973, **23**:142～144

2 A. Hasegawa, F. D. Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dialectric fibers-II: normal dispersion[J]. *Appl. Phys. Lett.*, 1973, **23**:171～173

3 B. A. Molomed. Formation of a soliton in an inhomogeneov nonlinear waveguide[J]. *Phys. Scripts.*, 1993, **47**:797～799

4 W. L. She, K. K. Lee, W. K. Lee. Oberservation of two-dimensional bright photovoltaic spatial solitons[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **83**(16):3182～3185

5 A. Biswas. Optical solition perturbation with Raman scattering and nonlinear damping[J]. *Fiber and Integrated Optics*, 2002, **21**(2): 125～143

6 Xie Yingmao. A variational study on the propagation properties of optical bright-soliton-like pulses in optical fbers[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(4): 452～455
谢应茂. 类明孤子在光纤中传输特性的变分研究[J]. 光学学报, 2004, **24**(4): 452～455

7 Ma Songhua, Fang Jianping. The nonpropagating light soliton and propagating light soliton for the simultaneous Schrodinger equation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(6): 1090～1095
马松华,方建平. 联立薛定谔方程的不传播光孤子和传播光孤子[J]. 光学学报, 2007, **27**(6): 1090～1095

8 Wang Yongxiang, Luo Kaiji, Wu Lang *et al.*. Propagation properties of bright soliton-like pulse under the influence of the fifth-order nonlinearity in optical fiber[J]. *Chin. J. Quant. Electron.*, 2007, **24**(5): 648～651
王永祥,罗开基,吴　朗 等. 五阶非线性作用下光纤中类明孤子的演化特性[J]. 量子电子学报, 2007, **24**(5): 648～651

9 A. Hasegawa *et al*.. Reduction of collision-induced time jitters in dispersion-managed soliton transimission sytems[J]. *Opt. Lett.*, **1996**, 12(1):39～41

10 He Jihuan. Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations[J]. *Internat. J. Modern Phys.*, 2006, **20**: 1141～1199

11 He Jihuan. Exp-function method for nonlinear wave equations[J]. *Chaos, Solitons Fractals*, 2006, **30**:700～708