

低密度奇偶校验码在光通信中的性能

廖 薇 刘锦高

(华东师范大学信息学院电子系, 上海 200241)

摘要 低密度奇偶校验码(LDPC)不仅有逼近香农限的良好性能,而且译码复杂度较低,结构灵活,是近年信道编码领域的研究热点,在光通信系统中有广泛的应用前景。针对非规则 Tanner 图上构造的低密度奇偶校验长码具有良好的性能,以及其在光通信系统中的应用,构造了几种 LDPC 码,并采用置信传播(BP)译码,在加性高斯白噪声(AWGN)信道、二相移相键空(BPSK)调制下进行了计算机仿真。根据规则 LDPC 码和非规则 LDPC 码的误码率(BER)和 FER 曲线,对规则码和非规则 LDPC 码在编译码方面以及性能方面作了分析和比较,进而对构造在光通信系统中具有实用价值的 LDPC 码提出了看法。通过理论分析与仿真结果表明 LDPC 码型具有良好的性能,可以节省硬件开销,比较适用于光通信系统中,可作为超强前向纠错码型的候选码。

关键词 低密度奇偶校验码;光通信系统;BP 译码;和积译码算法

中图分类号 TN929 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS200828s2.0180

Performance Analysis and Research of LDPC code in Optical Communication System

Liao Wei Liu Jingao

(School of Information Science and Technology, East China Normal University, Shanghai 200241, China)

Abstract Low-density parity check code(LDPC)is a good approximation of the Shannon limit. It has decoding with low complexity and flexible structure. It was the hot-spot of channel coding field in recent years so that it has the widespread application prospect in the optical communication system. In the view of LDPC long code based on irregular Tanner graph which has good performance and its application in the optical communication system, this paper constructed several LDPC codes,and used BP algorithm to carry out computer simulation in the AWGN channel and under the BPSK modulation. According to the BER and the FER curve of regular and irregular LDPC code, not only coding and decoding but also performance are analyzed and compared. At last, the paper makes some suggestion as to the LDPC code with the practical value in the optical communication system. Through the theoretical analysis and simulation results show that the LDPC code has a good performance, and can save hardware costs so that it is suitable in optical communication system and can be used as a super-forward error correction candidate code.

Key words LDPC code;optical communication system;BP algorithm;sum-product algorithm

1 引 言

Gallager 在 1962 年提出的低密度奇偶校验码^[1](Low density parity check,LDPC)是一类可以用非常稀疏的奇偶校验矩阵或二分图定义的线性分组纠错码,以其卓越的译码性能备受关注,在光通信

和无线通信领域具有异常广阔的应用前景。

2 LDPC 码与译码算法

LDPC 码可以用奇偶校验矩阵 \mathbf{H} 来表示,和所有的线性分组码一样,域 F 上的 N 、 K 维的编码 C

基金项目:上海市 2007 年科技攻关重点项目(075115002)资助课题。

作者简介:廖 薇(1982—),女,博士研究生,主要从事信号处理,通信与信息系统方面的研究。

E-mail:liaowei54@126.com

导师简介:刘锦高(1948—),男,教授、博士生导师,主要从事数字信号处理、高频地波雷达海洋遥感、光纤通信、移动通信、位置相关的移动通信服务系统、现代数字终端技术等方面的研究。

可用 $(N - K) * N$ 的校验矩阵 \mathbf{H} 来描述: $C = \{x \in \text{Fn} \mid x\mathbf{H}^T = 0\}$ [2]。因 \mathbf{H} 稀疏, 能实现低复杂度的编译码。同时也可以二分图来表示, 一个二分图是一个包括两个顶点集合的图, 分别是信息节点集合和校验节点集合。若某个校验约束方程中出现了某个码字比特, 则在相应的的信息节点和校验节点之间出现了连边, 也对应着相应的 \mathbf{H} 阵中的元素 1 [3,4]。

LDPC 码可分为规则 LDPC 码和非规则 LDPC 码。如果校验矩阵的各行中非零元素的个数也是相同的, 各列中非零元素的个数也是相同的, 这样的 LDPC 码称为规则码 [5]。此时, Tanner 图中所有变量节点具有相同的度 d_v , 所有校验节点具有相同的度 d_c , 可简记为 (n, d_v, d_c) 。此时, 其度数分布为

$$\lambda(x) = x^{d_v-1}, \quad \rho(x) = x^{d_c-1}, \quad (1)$$

总边数为

$$E = nd_v = md_c, \quad (2)$$

码率为

$$r = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - \frac{d_v}{d_c}. \quad (3)$$

LDPC 码的迭代译码算法就是迭代寻找一个符合所有校验方程约束的码字的过程。正是因为 LDPC 码校验矩阵的稀疏性, 才使得校验方程都很简单, 从而减小了迭代译码时的计算量, 使得迭代译码能够以较快的速度完成。LDPC 码的译码方法为 BP(置信传播)算法, 也叫和积算法(SPA), 和 Turbo 码的译码方法一样, 也是一种迭代算法 [6]。

在置信传播算法中, 各个节点之间传递的信息是概率或置信信息, 比如由变量节点 v 传递给校验节点 c 的信息是 v 取某些特定值的概率信息, 该信息的具体取值依赖于 v 的观测值和其它所有与 v 相连的校验节点(除 c 以外)在上一轮迭代中传递给 v 的置信信息, 同样由 c 传递给 v 的信息也是 v 取某些特定值的概率信息, 该信息的具体取值依赖于其它所有与 c 相连的变量节点(除 v 以外)在上一轮迭代中传递给 c 的置信信息。具体过程如下 [7]:

1) 初始化

发送的二进制信息比特为 $x_k, k = 1, 2, \dots, n$, 接收到的信号为 $y_k, k = 1, 2, \dots, n$ 。

设 $p_j^0 = P(x_j = 0), p_j^1 = P(x_j = 1) = 1 - p_j^0$ 是迭代前信道给出的先验信息, 对每一次迭代, 它都是不变的外信息。 Q_{ij}^0, Q_{ij}^1 初始化为 p_j^0, p_j^1 。 α_{ij} 是 Q_{ij}^0, Q_{ij}^1 的归一化因子。 e_j^0, e_j^1 是信息节点在每一次迭代中计算的外信息, 称为信息比特 x_j 的伪后验概

率。 α_{ij} 是 e_j^0, e_j^1 的归一化因子。 α_{ij}, α_j 都初始化成 α_0 。

2) 迭代计算

第一步 更新 R_{ij}^a 。由校验式 i 传递给信息比特 x_j 的 R_{ij}^a , 是信息节点 v_j 状态为 a 以及校验式 c_i 中其它信息节点状态分布已知的条件下, 校验式 c_i 满足的概率。由概率公式

$$P(c_i \mid x_j = a) = \sum_{x, x_j = a} P(c_i \mid x) P(x \mid x_j = a), \quad (4)$$

对 x_j 状态为 a 和校验式 c_i 满足条件下所有 x 的可能情况求和, 得到 x_j 状态为 a, c_i 满足的条件概率。

由于各信息节点的部分相互独立性, 得

$$P(x \mid x_i = a) = \prod_{j \in N(i) \setminus i} Q_{ij}^a, \quad (5)$$

式中, $j \in N(i) \setminus i$ 是指矩阵 \vec{H} 的第 i ($1 \leq i \leq m$) 行中, 非零比特所对应的列号(不含 j)。 R_{ij}^a 可用下面公式计算

$$R_{ij}^a = \sum_{x, x_j = a} P(c_i \mid x) \prod_{j \in N(i) \setminus i} O_{ij}^a, \quad (6)$$

式中的 $P(c_i \mid x) = \begin{cases} 1 & c_i \text{ 满足于 } x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ 。

具体计算 R_{ij}^a 要用到随机过程中的前向/后向算法 [8], Mackay 给出了一种特别容易实现的简化。令 $\delta Q_{ij} = Q_{ij}^0 - Q_{ij}^1$, 则

$$\delta R_{ij} = R_{ij}^0 - R_{ij}^1 = \prod_{j \in N(i) \setminus i} \delta Q_{ij}^a, \quad (7)$$

通过解方程组

$$\begin{cases} R_{ij}^1 + R_{ij}^0 = 1 \\ R_{ij}^1 - R_{ij}^0 = \prod_{j \in N(i) \setminus i} \delta Q_{ij}^a \end{cases} \quad (8)$$

可以得到

$$R_{ij}^0 = \frac{1}{2} [1 + \prod_{j \in N(i) \setminus i} \delta Q_{ij}^a], \quad (9)$$

$$R_{ij}^1 = \frac{1}{2} [1 - \prod_{j \in N(i) \setminus i} \delta Q_{ij}^a], \quad (10)$$

第二步 更新 Q_{ij}^a 。由信息比特 x_j 传递给校验式 c_i 的 Q_{ij}^a 是在除 c_i 外 x_j 参与的其它校验节点的信息已知, x_j 在状态 a 的概率。根据贝叶斯准则

$$P(x_j = a \mid \{c_i\}, i \in M(j) \setminus \{i\}) = \frac{P(x_j = a) P(\{c_i\}, i \in M(j) \setminus \{i\} \mid x_j = a)}{P(\{c_i\}, i \in M(j) \setminus \{i\})}, \quad (11)$$

上式中 $P(x_j = a)$ 是先验概率, $i' \in M(j) \setminus \{i\}$ 是指矩阵 \vec{H} 的第 j ($1 \leq j \leq n$) 列中, 非零比特所对应的行号(不含 i 行)。通常认为 c_i 之间是相互独立的, 联合概率 $P(\{c_i\}, i' \in M(j) \setminus \{i\} \mid x_j = a)$ 就成了乘积形式, 即

$$Q_{ij}^a = \alpha_{ij} p_j^a \prod_{i' \in M(i)_t} R_{ij'}^a, \quad (12)$$

p_j 就是先验概率 $P(x_j = a)$, 至于分母的计算, 用归一化处理来简化

$$\alpha_{ij} (Q_{ij}^1 + Q_{ij}^0) = 1, \quad (13)$$

则有

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{Q_{ij}^1 + Q_{ij}^0},$$

根据第一步中计算得出的 R_{ij}^0, R_{ij}^1 和外信息 p_j^0, p_j^1 , 来计算 Q_{ij}^0, Q_{ij}^1 :

$$Q_{ij}^1 = \alpha_{ij} p_j^1 \prod_{i' \in M(i)_t} R_{ij'}^1, \quad (14)$$

$$Q_{ij}^0 = \alpha_{ij} p_j^0 \prod_{i' \in M(i)_t} R_{ij'}^0. \quad (15)$$

第三步 译码。接下来要计算信息比特 x_j 的伪后验概率 e_j^0, e_j^1 , 公式的推导类似于第二步。在此直接给出结果

$$\begin{cases} e_j^0 = \alpha_j \prod_{i \in M(j)} R_{ij}^0, \\ e_j^1 = \alpha_j \prod_{i \in M(j)} R_{ij}^1 \end{cases}. \quad (16)$$

3) 判决

首先说明一下, 伪后验概率 $e_j^0 (e_j^1)$ 是用来判定信息比特 x_j 在这次迭代结束时, 判定为 0/1 的可能概率。它们间接决定了是否要继续迭代过程。在 $e_j^0 (e_j^1) \geq 0.5$ 时, 判定 x_j 为 0/1, 得到译码值 x_j 。在所有比特被译出之后, 得到译码矢量 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 。

如果 $\mathbf{H}\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$, 则停止译码, 输出 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 作为有效的输出值, 否则继续迭代过程, 如果达到预设定的迭代次数, 还未找到满足的码字, 则宣告译码失败。

影响 LDPC 码译码性能的因素有 2 个: (1) 校验矩阵的稀疏度; (2) 校验矩阵对应 Tanner 图中回路的长度和数量, 回路的长度越短, 短回路的数量越多, 那么 LDPC 码的性能越差^[9]。

3 性能仿真与分析

研究了前人大量研究成果之后, 采用两种性能优异的码字进行仿真来验证 LDPC 码在光通信中的性能。以下是仿真结果。

本文采用 David J. V. Mackay (inference.phy.cam.ac.uk/mackay) 介绍的 evenboth 方法构造规则码, 不规则码的设计采用 S. Y. Chung 提出的度分布函数, 分别构造了 4 种码长 10000、码率 1/2 的 LDPC 码, 码的度数如下:

规则码

码 1: (10 000, 3, 6), $\lambda(x) = x^2, \rho(x) = x^5$,

码 2: (10 000, 4, 8), $\lambda(x) = x^3, \rho(x) = x^6$,

非规则码

Irregular 1

$\lambda(x) = 0.38450x + 0.04233x^2 + 0.57306x^3$,

$\rho(x) = 0.24121x^4 + 0.75879x^5$,

Irregular 2

$\lambda(x) = 0.2511x + 0.30933x^2 + 0.00104x^3 + 0.43851x^9$,

$\rho(x) = 0.63669x^6 + 0.36320x^7$,

其中非规则码的度数分布是 AWGN 信道优化的度数分布。

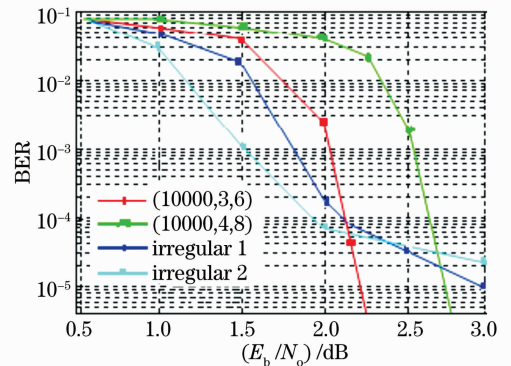


图 1 规则码和非规则码的 FER 曲线

Fig. 1 FER curve of regular and irregular LDPC code

采用 BP 译码, 在 AWGN 信道、BPSK 调制下进行计算机仿真。仿真中 LDPC 码译码的最大迭代次数都设为 50。图 1 和图 2 是采用各种 LDPC 码时的比特错误率 (BER) 和帧错误率 (FER) 与信噪比 (SNR) 的关系曲线。规则 LDPC 码和不规则 LDPC 码都有较好的性能。由图中可知, 在信噪比 SNR 比较低时, 信道噪声强度大, 性能较差^[10]。随

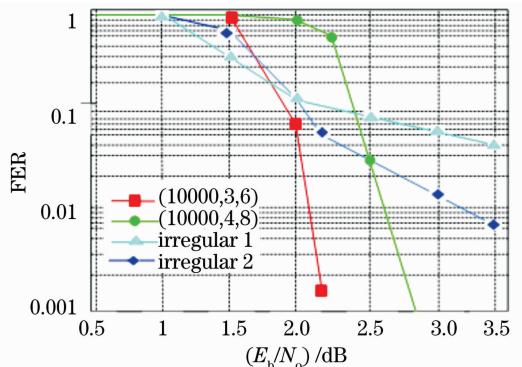


图 2 规则码和非规则码的 FER 曲线

Fig. 2 FER curve of regular and irregular LDPC code

随着 SNR 的增加, BER 和 FER 的性能曲线都变陡峭,性能得到改善。之前,非规则码的纠错性能优于规则码,当 SNR 达到一定值后,两种码的性能改善逐渐减缓,规则码的纠错性能开始好于非规则码。

和规则码相比,非规则码更接近香农限。根据迭代译码算法,译码信息比特是在比特结点和校验节点传递,并利用此信息进行译码。从比特节点的观点来看,它希望获得更多的信息以帮助译码,因此比特节点应有高的度,与其相连的校验节点也应该尽量多并尽量分散^[10]。反之,对于校验节点来说,因为校验节点的度越高,其提供的信息就越分散,并且如果信息发生错误,也就越容易发送给更多的错误信息给比特节点,所以它的度最好为低些。规则 LDPC 码的度是定值,前人很多工作已经证明度较低的规则 LDPC 码具有更好的性能。但是,规则 LDPC 码的校验矩阵中,每行或者每列的“1”密度为定值,且仅能通过调整“1”的位置来使性能得到改善,这样就影响了规则 LDPC 码。如果选择非规则 LDPC 码,在平衡这两项矛盾的时候则有更大的选择范围。从而非规则码比规则码更加灵活。

总之,规则 LDPC 码和非规则 LDPC 码相比各有优势。设计良好的非规则码的纠错能力是优于规则码的。然而从硬件实现的角度来说,规则码比非规则码简单,而且码长较短的非规则码码字距离容易过小。所以,规则码也广泛应用于许多场合。

4 结 论

本文针对低密度奇偶校验码(Low-density parity check code, LDPC)在光通信系统中的应用,

构造了几种规则 LDPC 码和非规则 LDPC 码。通过理论研究与仿真性能的分析可知,在不同条件下规则 LDPC 码和非规则 LDPC 码相比各有优势。在寻找好码时,应结合规则码和非规则码的特点以及可实现性,以达到预期的性能要求。

参 考 文 献

- 1 B. Ammar, B. Honary, Y. Kou *et al.*. Construction of low density parity check code: a combinatoric design approach[C]. *Proc. the IEEE International Symposium on Information Theory*. 2002
- 2 M. Ardakam, Terence H. Chan, Frank R. Kschischang. Properties of the EXIT chart for one-dimensional LDPC decoding schemes[C]. *Proc. CWIT*. May 2003
- 3 L. R. Bahl, F. J. Coeke, Jelinek, J. Raviv. Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate [C]. *IEEE Transactions on Information Theory*, March 1974, 20: 284~287
- 4 Mackay, S. Wilson, Davey. Comparison of constructions of irregular Gallager codes[J]. *IEEE Trans. on Commun.*, 1999, **47**: 1449~1454
- 5 C. Berrou, A. Glavieux, P. Thitimajshima. Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes [C]. *International Conference on Communication*, May. 23~26, 1993
- 6 T. Bhatt, K. Narayanan, N. Kehtarnavaz. Fixed-point DSP implementation of low-density parity check codes [C]. *9th DSP (DSP2000) Workshop*, Oct. 2000
- 7 J. W. Bond, S. Hui, H. Schmidt. Constructing low-density parity-check codes [C]. *EUROCOMM 2000. Information Systems for Enhanced Public Safety and Security. IEEE/AFCEA*. May 2000
- 8 E. Boutillon, J. Castura, F. R. Kschischang. Decoder-First Code Design [C]. *Proc. the 2nd International Symposium on Turbo Codes and Related Topics*. Brest, France, 2000. 459~462
- 9 M. C. Davey, D. J. C. MacKay. Low density parity-check codes over GF(q) [J]. *IEEE Comm. Lett.*, 1998, **2**: 165~167
- 10 D. Haley, A. Grant, J. Buettner. Iterative encoding of low-density parity-check codes [C]. *In Australian Communication Theory Workshop*, Canberra, Australia, Feb. 2002, 15~17