

非傍轴高斯光束传输方程解的探讨

张霞萍

(南京晓庄学院物理系, 江苏 南京 210017)

摘要 由洛伦兹规范下光场满足的矢势和标势方程出发, 探讨了初始光场具有任意对称性的一般非傍轴光束在空间的传输情况。利用角频谱并结合傅里叶变换处理得到了非傍轴光束的传输方程。利用扰动方法并结合新近似取法得到了非傍轴横向光场的扰动形式解, 该解对于近场弱非傍轴情况下的效果比强非傍轴条件下要好。给出了光束非傍轴传输高阶(八阶)修正解。对于零阶情况, 非傍轴光束退化为傍轴光束, 传输方程也相应退化为傍轴传输的模型方程。高斯解为扰动参量的零阶修正解。

关键词 非傍轴高斯光束; 微扰处理; 修正解; 角频谱

中图分类号 O435; TN012

文献标识码 A

doi: 10.3788/AOS200828s2.0125

Analytical Solutions for Gaussian Beam Propagation Beyond the Paraxial Approximation

Zhang Xiaping

(Department of Physics, Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing, Jiangsu 210017, China)

Abstract Starting from the vector potential and the scalar potential in the Lorentz gauge, the nonparaxial beam propagation is studied in free space. Applying Fourier transform and angular spectrum, the equation has been derived for transverse electric fields of an arbitrary polarized electromagnetic wave with the new approximation and multiscale perturbative method, the analytical solution for Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation is accessed. For weakly nonparaxial beams that are characterized by small values of the perturbative parameter, our corrective solutions yield an accurate description of the field in the near-field region. We firstly give the eighth correction solution, our correction, solutions yield an accurate description of the field in the near-field region. In addition, the lowest-order correction to the paraxial approximation can be found to be the Gaussian.

Key words nonparaxial laser beams; perturbative method; correction solution; angular spectrum

1 引言

众所周知, 在束宽远大于波长的情况下传输光束可利用傍轴方程精确描述。关于傍轴光束传输的理论及其应用涉及到很多方面, 仅关于光孤子方面的研究很多都是建立在傍轴光束传输基础之上的^[1, 2]。但对于固体激光器或者半导体注入式激光器, 它们产生的激光光束具有较宽的入射角, 在传输过程中已不能满足傍轴光束的条件。在光电散射方面, 对散射光束聚焦的重要性显而易见^[3, 4], 这种聚焦光束束宽已远远小于光束的波长, 傍轴方程已不能描述这些光束的传输, 傍轴理论已不再适用。光束的非傍轴传输已吸引了很多人的关注。早

在 1975 年, M. Lax 等就开始了这方面的研究^[5], 紧接着很多科学家利用多种方法对非傍轴光束进行研究^[6~10]。这些方法对于构建非傍轴光束传输光束解析解都是行之有效的。最近, S. Sepke 等利用角频谱的方法推导出精确的解析解, 包括平坦高斯光束和环形高斯光束^[11~13]。

本文探讨了初始光场具有任意对称性的一般非傍轴光束在空间的传输情况。给出了高阶(八阶)修正解和不同扰动参量的场强分布图。

2 非傍轴传输光束满足的方程

利用麦克斯韦方程, 对于单一频率光场 \mathbf{B} 和磁

感应强度 \mathbf{B} 随着 $e^{i\omega t}$ 的变化, 在洛伦兹规范下电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 可表达成矢势的函数

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = \nabla \Phi - ik\mathbf{A} = -\frac{i}{k} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - ik\mathbf{E} \quad (2)$$

式中 k 为波矢, \mathbf{A} 为自由空间内矢势, 满足 $(\nabla^2 + k^2)\mathbf{A} = 0$, Φ 为标势, 满足 $\Phi = \frac{i}{k} \nabla \cdot \mathbf{A}$.

可将 $\mathbf{A} = A(x, y, z)\mathbf{e}_1$ 代入(2)式有

$$\mathbf{E} = \left(-\frac{i}{k} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - ikA\right)\mathbf{e}_1 - \frac{i}{k} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \mathbf{e}_2 - \frac{i}{k} \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x} \mathbf{e}_3, \quad (3)$$

式中 $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3)$ 为单位矢。对(3)式做归一化坐标变换, 令 $\xi = x/\omega_0$ (ω_0 为高斯光在束腰处的束宽), $\eta = y/\omega_0$, $\zeta = z/l$, 其中 $l = k\omega_0^2$ 为色散长度, 则(3)式变换为

$$\mathbf{E} = -ik \left[\left(f^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + A \right) \mathbf{e}_1 + f^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} \mathbf{e}_2 + f^3 \frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \zeta} \mathbf{e}_3 \right],$$

式中 $f = \omega_0/l$ 。

光场在很多情况下有 $\omega_0 \ll l$, 故 f 为一小量并为常数。则横向光场 \mathbf{E} 仅包含 f 的偶次方项, 纵向光场 \mathbf{E} 仅包含 f 的奇次方项。对于非傍轴光束光场可以看成横向光场, 为简便起见, 以下讨论的光场分量仅限于横向分量。

设初始光场为高斯型

$$E(x, y, 0) = \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{2\omega_0^2}\right], \quad (4)$$

对于横向光场, 电磁波传输满足^[14]

$$(\nabla^2 + k^2)\vec{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (5)$$

式中 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ 为 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 的傅里叶变换。

将(4)式代入(5)式并写成角频谱形式为^[11~13]

$$E(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p, q) \times \exp[ik(px + qy + mz)] dp dq, \quad (6)$$

即将光电场表达成平面波的叠加, 式中 p, q, m 为参量, $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_i (i = x, y, z)$ 为单位矢。

对于单色平面波, 有 $m = \sqrt{1 - p^2 - q^2}$, 且 $p^2 + q^2 \leq 1$ ^[15]。

对(6)式进行傅里叶变换, 有

$$F(p, q) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, y, 0) \times \exp[-ik(px + qy)] dx dy, \quad (7)$$

将(4)式代入(7)式, 有

$$F(p, q) = \frac{1}{2\pi f^2} \exp\left[-\frac{p^2 + q^2}{2f^2}\right], \quad (8)$$

将(8)代入(6)式, 可写出柱坐标系下的光场方程为^[16, 17]

$$E(\vec{r}) = \int_0^\infty \frac{1}{f^2} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{2f^2} + ikmz\right) \times J_0(k\rho\kappa) \kappa d\kappa, \quad (9)$$

式中 $\kappa = \sqrt{p^2 + q^2}$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $J_0(k\rho\kappa)$ 为零阶贝塞耳函数。

对于单色平面波, 即 $p^2 + q^2 \leq 1$, $\kappa \leq 1$, (9)式可变换为

$$E(\vec{r}) = \int_0^1 \frac{1}{f^2} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{2f^2} + ikz \sqrt{1 - \kappa^2}\right) \times J_0(k\rho\kappa) \kappa d\kappa. \quad (10)$$

3 非傍轴传输光束的傍轴解及其扰动解

(10)式很难得到其解析解, 如果对其积分因子做合理的近似, 可写出其近似解, 该解能很好地展现非傍轴光束传输的物理特性。

先将被积因子 $\exp(ikz \sqrt{1 - \kappa^2})$ 做泰勒展开并做近似为

$$\exp(ikz \sqrt{1 - \kappa^2}) \approx \exp[ikz(1 - \kappa^2/2)] \times (1 - ikz\kappa^4/8), \quad (11)$$

若取近似值为 $\exp[ikz(1 - \kappa^2/2)]$ 即可得傍轴高斯解。

将(11)式代入(10)式, 将光场写成以参量 f 为扰动解的形式

$$E(\mathbf{r}) = E^{(0)}(\mathbf{r}) + f^2 E^{(2)}(\mathbf{r}) + f^4 E^{(4)}(\mathbf{r}) + f^6 E^{(6)}(\mathbf{r}) + f^8 E^{(8)}(\mathbf{r}), \quad (12)$$

对于小参量 f (一般有 $f \leq 0.3$), 相应各项修正解的系数为

$$E^{(0)}(\mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\omega_0^2(1 + iz/l)} + ikz\right), \quad (13)$$

$$E^{(2)}(\mathbf{r}) = -\frac{izl}{\omega_0^2} E^{(0)}(\mathbf{r}), \quad (14)$$

$$E^{(4)}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{izl}{\omega_0^2} - \frac{z^2 l}{\omega_0^2}\right) E^{(0)}(\mathbf{r}), \quad (15)$$

$$E^{(6)}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{3z^2 l^2}{\omega_0^4} + \frac{iz^3 l^3}{\omega_0^6} + \frac{izl^3 \rho^2}{\omega_0^6}\right) E^{(0)}(\mathbf{r}), \quad (16)$$

$$E^{(8)}(\mathbf{r}) = \left(\frac{6iz^3 l^3}{\omega_0^6} + \frac{z^4 l^4}{\omega_0^8} + \frac{4z^2 l^4 \rho^2}{\omega_0^8} - \frac{izl^5 \rho^4}{8\omega_0^{10}}\right) E^{(0)}(\mathbf{r}), \quad (17)$$

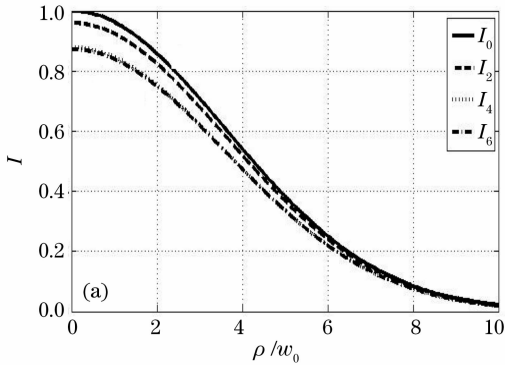
其中零阶项 $E^{(0)}(\mathbf{r})$ 为傍轴光场，满足

$$\nabla_{\perp}^2 E^{(0)}(\mathbf{r}) - 2ik \frac{\partial E^{(0)}(\mathbf{r})}{\partial z} = 0, \quad (18)$$

∇_{\perp}^2 为横向拉普拉斯算符。(12) 式中不包含 f 的奇次项，是因讨论的光场为横向场。

4 扰动参量对非傍轴光场的影响

由上一节内容可知，光场扰动解中扰动参量 f



的值影响光场解的精确度。 $f = \lambda / (2\pi\omega_0)$, λ 为光波长, ω_0 为高斯光束腰处束宽。目前依靠光学聚焦透镜可以实现 ω_0 比 λ 高一个量级。当 f 为 0.2 和 0.3, $kz = 5$ 时参量 f 对解析解的影响如图 1 所示, 图中 $I = E \cdot E^*$ ($*$ 为复共轭符号)。

由于包含 f 修正项的解不再满足(18)式, 因此高斯光在非傍轴传输过程中不再保持高斯型。 f 越小, 非傍轴解越接近于高斯解, 即傍轴解。

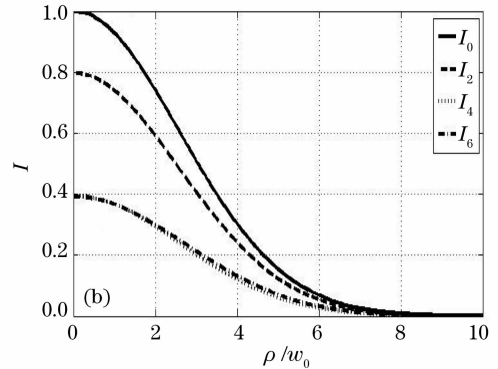


图 1 光场强度 I 随 ρ/w_0 的变化

Fig. 1 Variation of intensity distribution I versus ρ/w_0 (a) $f=0.2$; (b) $f=0.3$

由图 1 可知, 对于确定的小参量 f , 光场修正到四阶即可。对于不同的 f 值, f 越小非傍轴解越接近于高斯解, 即接近于傍轴解, 当 $f = 0$ 时非傍轴解退化为傍轴解。

5 结 论

探讨了一般非傍轴光束在空间的传输情况, 初始光场具有任意对称性。利用角频谱的方法, 由洛伦兹规范下光场满足的矢势和标势方程出发得到了非傍轴光束传输的方程。在构建方程解的过程中, 利用扰动方法得到了非傍轴横向光场的扰动形式解, 该解对于近场弱非傍轴情况下效果比强非傍轴条件下要好。给出了不同扰动参量的场强分布图, 直观地展现了非傍轴情况下空间光束的传输情况。给出了高阶(八阶)修正解, 对于扰动项修正到四阶就能较精确地反应光场分布情况。对于零阶修正解, 非傍轴光束退化为傍轴光束。

参 考 文 献

- 1 Zhang Xiaping, Guo Qi. Analytical solution in the Hermite-Gaussian form of the beam propagating in the strong nonlocal media[J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(7): 3178~3182
- 张霞萍, 郭旗. 强非局域非线性介质中光束传输的厄米高斯解[J]. *物理学报*, 2005, **54**(7): 3178~3182
- 2 L. Cicchitelli, H. Hora, R. Postle. Longitudinal field components for laser beams in vacuum[J]. *Phys. Rev. A*, 1990,

- 41(7): 3727~3732
- 3 B. Quesnel, P. Mora. Theory and simulation of the interaction of ultraintense laser pulses with electrons in vacuum[J]. *Phys. Rev. E*, 1998, **58**(3): 3719~3732
- 4 S. Banerjee, S. Sepke, R. Shah *et al.*. Optical deflection and temporal characterization of ultrafast laser-produced electron beams[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, **95**(3): 035004
- 5 M. Lax, W. H. Louisell, W. B. Mcknight. From Maxwell to paraxial wave optics[J]. *Phys. Rev. A*, 1975, **11**(4): 1365~1370
- 6 G. P. Agrawal, D. N. Pattanayak. Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**(4): 575~578
- 7 L. W. Davis. Theory of electromagnetic beams[J]. *Phys. Rev. A*, 1979, **19**(3): 1177~1179
- 8 T. Takenaka, M. Yokota, O. Fukumitsu. Propagation of light beams beyond the paraxial approximation[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1985, **2**(6): 826~829
- 9 A. Wünsche. Transition from the paraxial approximation to exact solutions of the wave equation and application to Gaussian beams[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1992, **9**(5): 765~774
- 10 S. R. Seshadri. Nonparaxial corrections for the fundamental Gaussian beam[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2002, **19**(10): 2134~2141
- 11 S. Sepke, D. Umstadter. Exact analytical solution for the vector electromagnetic field of Gaussian, flattened Gaussian, and annular Gaussian laser modes[J]. *Opt. Lett.*, 2006, **31**(10): 1447~1449
- 12 S. Sepke, D. Umstadter. Analytical solutions for the electromagnetic fields of tightly focused laser beams of arbitrary pulse length[J]. *Opt. Lett.*, 2006, **31**(17): 2589~2591
- 13 S. Sepke S, D. umstadter. Analytical solutions for the electromagnetic fields of flattened and annular Gaussian laser modes. I. Small F-number laser focusing[J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2006, **23**(10): 2157~2165
- 14 Zhang Keqiang, Li Dejie. Electromagnetic Theory for

- Microwaves and Optoelectronics [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2001, 53~60
张克潜, 李德杰. 微波与光电子学中的电磁理论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2001, 53~60
- 15 W. H. Carter. Electromagnetic field of a Gaussian beam with an elliptical cross section[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1972, **62**(10): 1195~1201
- 16 G. N. Watson. A Treatise on the Theory of Bessel Functions [M]. Cambridge: Publishing Company of Cambridge University, 1966
- 17 Deng Dongmei, Guo Qi. Application of the multiscale singular perturbation method to nonparaxial beam propagations in free space[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2007, **24**(10): 3317~3325