

# 一种基于光栅的滚转角测量新方法

翟玉生 冯其波 张 斌

(北京交通大学发光与光信息技术教育部重点实验室, 北京 100044)

**摘要** 提出了一种利用一维平面透射光栅作为敏感器件的滚转角测量新方法。利用聚焦透镜及光电位置探测器组成接收测量单元, 避免了直线度误差带来的影响; 利用光栅的 $\pm 1$ 级衍射光束构成双光路差动测量, 基本避免了俯仰、偏摆角的串扰, 实现了误差分离, 同时增强了抗干扰能力。通过详细的理论分析, 论证了方案的可行性, 并在此基础上通过实验得到了定标曲线, 其线性相关度为 1, 滚转角测量的角度分辨率可以达到 $0.6''$ 。测量方法简单灵活, 仅需更换不同线数的光栅便可满足不同测量精度的要求。

**关键词** 测量; 滚转角; 光栅; 误差分离; 双光路差动测量

**中图分类号** TN247; TH741.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS200828s2.0112

## A Novel Method for Roll Measurement Based on Grating

Zhai Yusheng Feng Qibo Zhang Bin

(*Key Laboratory of Luminescence and Optical Information, Ministry of Education,*  
*Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China*)

**Abstract** A novel method for roll measurement is presented based on one-dimensional grating. The effects of straightness errors are avoided by using the measuring unit consisting of a focusing lens and photodetector. This method realizes errors separation, avoiding crosstalk of pitch angle and yaw angle, and enhances the ability of anti-interference by adopting double optical paths differential measurement based on the  $\pm 1$  order diffractive beams. Feasibility of the method is analyzed in detail. Calibration curve, whose linear dependency is 1, is obtained by experiment. The results show that resolution of the rolling error is less than  $0.6''$ . The method is simple and flexible enough to meet the different accuracy demands just by choosing the different gratings.

**Key words** measurement; roll angle; grating; errors separation; double optical paths differential measurement

## 1 引 言

任何机械运动除了三维平动还包含三种角运动: 俯仰、偏摆和滚转。如果在角运动方向上存在阿贝臂, 角运动误差就会产生阿贝误差, 从而影响系统的精度。为了消除或补偿角运动误差, 必须先对角运动误差进行测量。在三种角运动误差中, 滚转角的测量是最困难的。目前国内外还处在一种研究和探索阶段, 出现了以重力方向为基准的电子水平仪、以实物位置为基准的组合法测量<sup>[1]</sup>、以准直激光位置为基准的测量<sup>[2~4]</sup>、以准直激光方向为基准的测量<sup>[5~8]</sup>、以准直激光偏振方向为基准的测量<sup>[9~17]</sup>

等。但是各种测量方法都各自存在很多局限, 如无法实现垂直方向测量、无法实现非接触动态测量、仪器调整困难、存在误差串扰、抗干扰能力差或调制及补偿电路复杂、对光源要求高、价格昂贵且仪器体积大等。

因此, 进一步研究滚转角的测量方法, 从而找到便于实际应用, 精度、稳定性及经济性均能兼顾的测量方案是十分必要的。

## 2 滚转角测量基本原理

如图 1 所示, 单色平行光沿光栅法线垂直入射

**基金项目:** 国家自然科学基金(50675017)资助课题。

**作者简介:** 翟玉生(1974—), 男, 博士研究生, 主要从事光电测试技术方面的研究。E-mail: 06118317@bjtu.edu.cn

**导师简介:** 冯其波(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事光学测试技术及无损检测方面的研究。

E-mail: qbfeng@bjtu.edu.cn

到一维平面透射光栅的表面 ( $xoy$  面), 当光栅绕法线转动时, 通过透镜接收到的 1 级衍射亮斑的位置会发生相应的变化。这样, 用光栅作为敏感器件, 当光栅发生滚转角变化  $\gamma$  时, 通过测量对应衍射光斑的位置变化  $\Delta y$ , 利用两者间的函数关系就可以实现对滚转角的测量

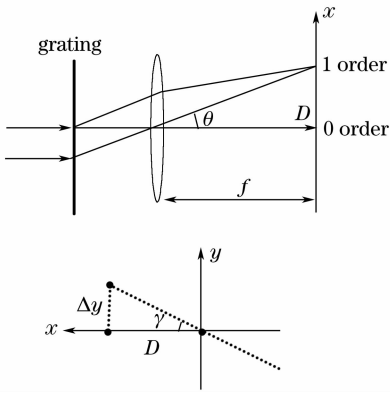


图 1 滚转角测量基本原理图

Fig. 1 Principle diagram of roll measurement

$$\gamma \approx \frac{\Delta y}{D} \approx \frac{\Delta y}{f \tan \theta} \quad (1)$$

### 3 滚转角测量的理论分析

由于实际应用中光栅所在测量平台不仅仅存在滚转角变化, 同时还有俯仰及偏摆, 因此入射平行光束相对于光栅平面并不是正入射, 而是任意小角度斜入射。为实现对滚转角的准确测量, 首先必须深入了解一维平面透射光栅对于入射平行光束的衍射特性<sup>[18, 19]</sup>, 在此基础上对俯仰及偏摆对滚转角测量的影响进行进一步的分析。

#### 3.1 一维光栅衍射特性

以光栅法线为坐标  $z$  轴, 光栅线方向为坐标  $y$  轴, 光栅面为  $xoy$  平面建立坐标系, 如图 2(a) 所示。以  $z$  轴为参考基准,  $k$  为任意方向的入射光,  $\alpha$  为俯仰角,  $\beta$  为偏摆角,  $\theta_0$  为入射光线同光栅法线 ( $z$  轴) 的夹角,  $\varphi_0$  为入射光线在光栅面上投影同  $y$  轴的夹角。

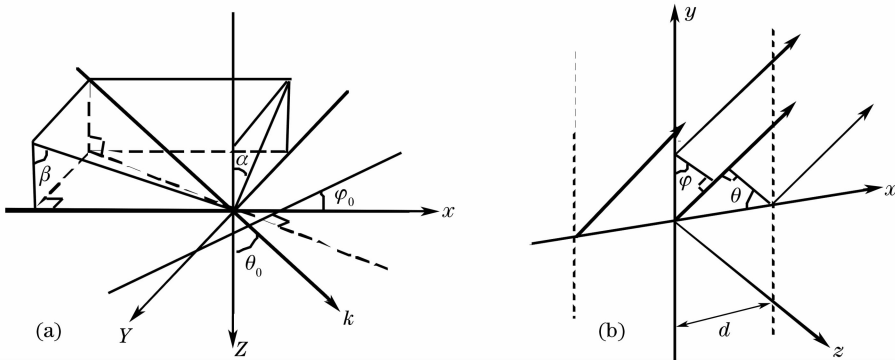


图 2 光矢量方向示意图。(a) 入射光方向; (b) 衍射光方向

Fig. 2 Schematic diagram of the light vector. (a) incidence direction ;(b) diffraction direction

光束透过光栅平面后的衍射方向如图 2(b) 所示。  $\theta$  为衍射角 (衍射光线同  $yoz$  平面的夹角),  $\varphi$  为出射平行光束与  $xoz$  平面的夹角。已知光栅方程

$$d(\sin \theta - \sin \varphi_0 \sin \theta_0) = K\lambda \quad (K = 0, \pm 1, \pm 2 \dots), \quad (2)$$

$$\cos \varphi_0 \sin \theta_0 = \sin \varphi. \quad (3)$$

由图 2(a) 中几何关系有  $\tan \theta_0 \cos \varphi_0 = \tan \alpha$ ,  $\tan \theta_0 \sin \varphi_0 = \tan \beta$ 。则光栅方程可以写成

$$d\left\{\sin \theta - 1/\sqrt{1 + \left(\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}\right)^2} \cdot \sin \left[\arctan \left(\sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta}\right)\right]\right\} = K\lambda, \quad (4)$$

$$\cos \left[\arctan \left(\sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta}\right)\right] \tan \alpha = \sin \varphi. \quad (5)$$

#### 3.2 俯仰及偏摆对滚转角测量的影响

如图 3 所示, 以入射光线为  $z$  轴, 垂直方向为  $y$  轴建立空间直角坐标系, 在此坐标系中, 入射光方向为  $\mathbf{I} = [0 \ 0 \ 1]^T$ 。设初始时测量平台上光栅的法线与  $z$  轴重合, 光栅栅线与  $y$  轴重合, 此时入射平行光束经光栅衍射后的 1 级衍射光束方向为  $\mathbf{I}_1 = [\sin \theta_1 \quad -\sin \varphi \quad \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \theta_1}]^T$ , 由光栅方程(4), (5)式, 有  $\mathbf{I}_1 = [\lambda/d \ 0 \ \cos [\arcsin (\lambda/d)]]^T$ 。

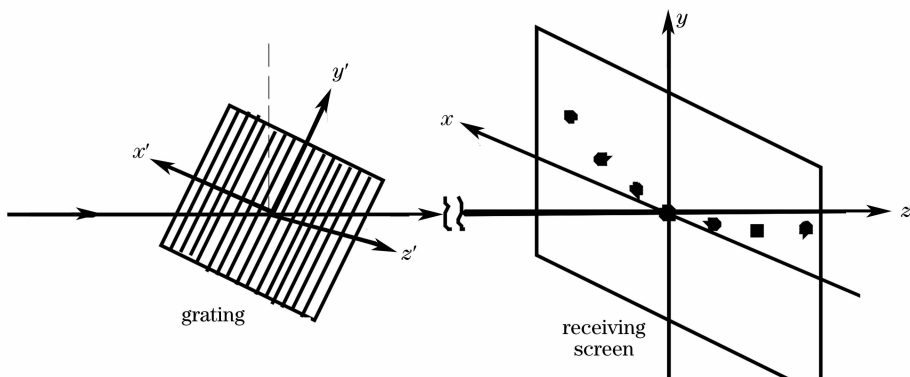


图3 小角度偏摆及俯仰与滚转并存时的光栅衍射情况

Fig.3 Grating diffraction with small pitch, yaw and roll angle

当测量平台发生转动时, 设其绕  $x$ ,  $y$ ,  $z$  轴分别有  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  的旋转角度(绕坐标轴的转角的正负遵从右手定则)。其旋转矩阵分别为

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}, \mathbf{R}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

若以光栅法线为  $z'$  轴, 光栅线方向为  $y'$  轴, 建立新坐标系, 如图3。在新坐标系中入射光方向可表示为  $\mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{R}^{-1}$  是  $\mathbf{R}$  的逆矩阵,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta \mathbf{R}_\gamma$ , 则  $\mathbf{R}^{-1} = (\mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta \mathbf{R}_\gamma)^{-1} = \mathbf{R}_\gamma^{-1} \mathbf{R}_\beta^{-1} \mathbf{R}_\alpha^{-1}$ 。  $\mathbf{R}_\alpha$ ,  $\mathbf{R}_\beta$ ,  $\mathbf{R}_\gamma$  均是正交矩阵, 则  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}_\gamma^T \mathbf{R}_\beta^T \mathbf{R}_\alpha^T$ , 有

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta & \sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \gamma \cos \beta & \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta & \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix},$$

由于  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  均是小量, 则略去高阶小量后有

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } \mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [-\beta \ \alpha \ 1]^T.$$

设  $\mathbf{P}$  向量在新坐标系中对应俯仰及偏摆角为  $\alpha'$ ,  $\beta'$ , 则  $\mathbf{P}$  又可写成  $[\tan \beta' - \tan \alpha' \ 1]^T$ 。对比两式, 有  $\tan \alpha' = -\alpha$ ,  $\tan \beta' = -\beta$ , 则  $\alpha' \approx -\alpha$ ,  $\beta' \approx -\beta$ 。此光束  $\mathbf{P}$  通过光栅后的1级衍射光方向可表示为  $\mathbf{P}_1 = [\sin \theta'_1 \ -\sin \varphi' \ \sqrt{\cos^2 \varphi' - \sin^2 \theta'_1}]^T$ 。由光栅方程(4)式, 有

$$\sin \theta'_1 = \lambda/d + 1/\sqrt{1 + \left(\frac{\tan \alpha'}{\tan \beta'}\right)^2} \cdot \sin [\arctan (\sqrt{\tan^2 \alpha' + \tan^2 \beta'})],$$

由于  $\alpha'$ ,  $\beta'$  均为小量, 故

$$\sin \theta'_1 \approx \lambda/d + \beta' \approx \lambda/d - \beta \quad (6)$$

由光栅方程(5)式,  $\sin \varphi' = \cos \theta'_0 \tan \alpha' \approx -\alpha \cos \theta'_0$ , 其中  $\theta'_0 = \arctan \sqrt{\tan^2 \alpha' + \tan^2 \beta'}$ 。

则一级衍射光束方向可表示为

$$\mathbf{P}_1 \approx [\sin \theta'_1 \ \alpha \cos \theta'_0 \ \cos \theta'_1]^T,$$

此方向在原坐标系中方向为  $\mathbf{T}_1 = \mathbf{R} \mathbf{P}_1$ , 即

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{R} \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta'_1 \\ \alpha \cos \theta'_0 \\ \cos \theta'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta'_1 + \beta \cos \theta'_1 - \gamma \alpha \cos \theta'_0 \\ \gamma \sin \theta'_1 + \alpha \cos \theta'_0 - \alpha \cos \theta'_1 \\ -\beta \sin \theta'_1 + \alpha^2 \cos \theta'_0 + \cos \theta'_1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

显然, 测量平台转动前、后的1级衍射平行光 向的距离  
束  $\mathbf{I}_1$  和  $\mathbf{T}_1$  经焦距为  $f$  的透镜聚焦后的光斑在  $y$  方

$$\Delta y_1 = f \left[ \frac{\gamma \sin \theta'_1 + \alpha (\cos \theta'_0 - \cos \theta'_1)}{-\beta \sin \theta'_1 + \alpha^2 \cos \theta'_0 + \cos \theta'_1} \right]. \quad (8)$$

此时俯仰角对滚转角测量的影响较大，无法实现误差分离。

#### 4 双光路差动测量方法

为了消除俯仰、偏摆对滚转角测量的影响从而实现误差分离，采用正负 1 级双衍射光路进行差动测量，光路结构如图 4 所示。

由前面分析同理可知测量平台转动前后的负 1 级衍射光束方向分别为

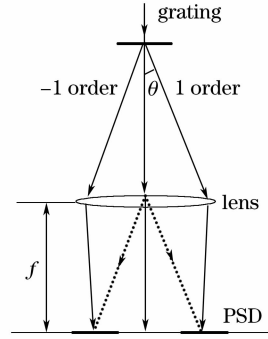


图 4 双光路差动测量光路示意图

Fig. 4 Double optical paths differential measurement

$$\mathbf{I}_{-1} = \begin{bmatrix} -\lambda/d \\ 0 \\ \cos [\arcsin (-\lambda/d)] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{-1} = \begin{bmatrix} \sin \theta'_{-1} + \beta \cos \theta'_{-1} - \gamma \alpha \cos \theta'_0 \\ \gamma \sin \theta'_{-1} + \alpha \cos \theta'_0 - \alpha \cos \theta'_{-1} \\ -\beta \sin \theta'_{-1} + \alpha^2 \cos \theta'_0 + \cos \theta'_{-1} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

式中， $\sin \theta'_{-1} \approx -\lambda/d + \beta' \approx -\lambda/d - \beta$ 。

测量平台转动前、后的负 1 级衍射平行光束  $\mathbf{I}_{-1}$  和  $\mathbf{T}_{-1}$  经焦距为  $f$  的透镜聚焦后的光斑在  $y$  方向的距离

$$\Delta y_{-1} = f \left[ \frac{\gamma \sin \theta'_{-1} + \alpha (\cos \theta'_0 - \cos \theta'_{-1})}{-\beta \sin \theta'_{-1} + \alpha^2 \cos \theta'_0 + \cos \theta'_{-1}} \right], \quad (10)$$

则

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta y_1 - \Delta y_{-1} \approx f \left[ \frac{\gamma (\sin \theta'_1 - \sin \theta'_{-1}) - \alpha (\cos \theta'_1 - \cos \theta'_{-1})}{\cos \left( \arcsin \frac{\lambda}{d} \right)} \right] \\ &\approx f \left[ \frac{2 \frac{\lambda}{d} \gamma - 2 \frac{\lambda}{d} (\alpha \beta)}{\cos \left( \arcsin \frac{\lambda}{d} \right)} \right] \approx 2 f \tan \left( \arcsin \frac{\lambda}{d} \right) (\gamma - \alpha \beta). \end{aligned} \quad (11)$$

对俯仰及偏摆引入的滚转角附加误差进行仿真计算，如图 5。

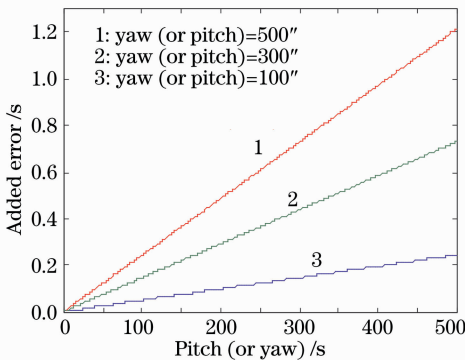


图 5 俯仰及偏摆引入的滚转角附加误差  
Fig. 5 Added error introduced by pitch and yaw

由于在高精度测量或定位中， $\alpha, \beta$  均不超过  $100''$ ，由图 5 可知其引入的滚转角附加误差完全可忽略，从而实现了误差分离。滚转角测量公式可近似为

$$\gamma \approx \Delta y / \left[ 2 f \tan \left( \arcsin \frac{\lambda}{d} \right) \right]. \quad (12)$$

选用激光波长  $\lambda = 635 \text{ nm}$ ，300 线一维平面透射光栅，成像透镜焦距  $f = 250 \text{ mm}$ ，利用电子水平仪得到滚转角测量的定标曲线，如图 6，其线性相关度为 1，滚转角测量的角度分辨率可以达到  $0.6''$ 。

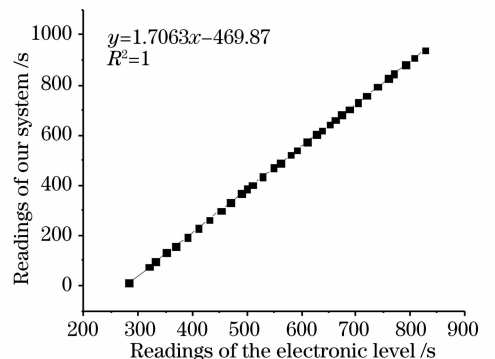


图 6 滚转角测量的定标曲线

Fig. 6 Calibration curve of roll measurement

## 5 结 论

本方法可采用半导体激光器,其功率、体积及价格相比同类测量装置有很大优势;避免了空气扰动及激光器自身造成的光线平漂、测量平台三维平动对测量的影响,空气扰动及激光器自身造成的光线角度漂移的影响得到了抑制,基本避免了测量平台俯仰、偏摆的串扰,实现了误差分离。初步实验结果与理论分析一致,测量灵敏度可达 $0.6''$ 。测量方便灵活,可更换不同线数的光栅以满足不同测量精度的要求。

## 参 考 文 献

- G. Zhang Improving the accuracy of angle measurement in machine calibration[J]. *Annals of the CIRP*, 1986, **35**(1): 369~372
- Shinji Shimizu, Hwa-soo Lee, N. Imai. Simultaneous measurement method of table motion errors in six degrees of freedom [J]. *International Journal of Japan Society for Precision Engineering*, 1994, **28**(8): 273~274
- Ni J, Huang P S, Wu S M. A multi-degrees of freedom measuring system for CMM geometric errors[J]. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 1992, **14**: 362~389
- Fan K. C., Chen M. J., Huang W. M.. A six degree of freedom measurement system for the motion accuracy of linear stages [J]. *International Journal of Machine Tools and Manufacturing*, 1998, **38**(3): 155~164
- Nakayabu T, Mori H, Takika A *et al.*. Development of a practical measurement system for rolling by means of laser interferometry [J]. *J. Japan Prec Engng.*, 1995, **61**(2): 253~257
- Zhang Zhijiang, Yu Yingjie. Modeling of three-dimensional small angle measurement system[J]. *Acta Meterologica Sinica*, 2003, **24**(1): 21~25  
张之江, 于瀛洁. 三维小角度测量系统建模[J]. *计量学报*, 2003, **24**(1): 21~25
- Ma Junshan, Wang Xiangzhao, Fang Zuji. Optical precision measurement technique of rolling error[J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(10): 1403~1406  
马军山, 王向朝, 方祖捷. 滚转角误差的光学精密测量技术研究[J]. *光学学报*, 2000, **20**(10): 1403~1406
- Gao Wei, Zhang Sizhou, Satoshi Kiyono. Measurement and control of rolling of a precision moving table[C]. *Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Processing Systems*, 1997, **28-31**: 70~74
- Sung-Chong Chung. Six degrees of freedom error measuring device for linear motion of slides [C]. *Proceedings of ASPE Annual Meeting*, 1998, **18**: 445~449
- Fang Zhongping. Precision laser roll detector for instrument & machine tool metrology[D]. Tianjin: Tianjin University, 1993  
方仲平. 激光滚转误差测量仪的研究[D]. 天津: 天津大学, 1993
- Xie Guangping. The study on real-time correction to Abbe error of ill-Abbe-principle' s structures [D]. Beijing: Tsinghua University, 1995  
谢广平. 违阿贝结构阿贝误差实时修正方法的研究[D]. 北京: 清华大学, 1995
- Yin Chunyong, Xie Guangping, Cheng Xiangyin *et al.*. Measurement method of rolling angle[J]. *Journal of Tsinghua University (Sci & Tech)*, 1996, **36**(10): 86~91  
殷纯永, 谢广平, 成相印 等. 滚转角测量方法的研究[J]. *清华大学学报*, 1996, **36**(10): 86~91
- Jiang Hong, Yin Chunyong. A novel method to measure the roll angle using a transverse Zeeman laser[J]. *Chinese J. Lasers*, 1999, **A26**(12): 1085~1089  
蒋 弘, 殷纯永. 一种测量滚转角的新方法[J]. *中国激光*, 1999, **A26**(12): 1085~1089
- Jiang Hong, Yin Chunyong. Sensitivity enhanced roll angle measurement[J]. *Optical Engineering*, 2000, **39**(2): 516~519
- Jiang Hong. The study on heterodyne interferometric system based on phase measurement and its applications [D]. Beijing: Tsinghua University, 1999  
蒋 弘. 基于相位测量的外差干涉系统及其应用[D]. 北京: 清华大学, 1999
- Liu Zhongyao, Lin Dejiao, Yin Chunyong. High precision roll angle interferometer [J]. *Optical Technique*, 2002, **28**(4): 332~334  
柳忠尧, 林德教, 殷纯永. 高精度滚转角干涉仪[J]. *光学技术*, 2002, **28**(4): 332~334
- Chen Lei, Zhang Enyao, Guo Hong *et al.*. A novel method of rolling angle measurement[J]. *J. Optoelectronics • Laser*, 2003, **14**(6): 625~628  
陈 蕾, 张恩耀, 郭 宏 等. 一种新的滚转角检测方法[J]. *光电子 • 激光*, 2003, **14**(6): 625~628
- Su Yafeng, Li Puxuan, Xu Zhongfeng *et al.*. An analysis of phenomenon of grating diffraction in conditions of the oblique incidence[J]. *College Physics*, 2001, **20**(7): 18~21, 25  
苏亚凤, 李普选, 徐忠锋 等. 斜入射条件下光栅衍射现象的分析[J]. *大学物理*, 2001, **20**(7): 18~21, 25
- Bayanheshig, Tang Yuguo, Qi Xiangdong. The complete analytical form and analysis on angular dispersion formula of two-dimensional grating[J]. *Acta Physica Sinica*, 2004, **53**(12): 4181~4188  
巴音贺希格, 唐玉国, 齐向东. 二维平面光栅角色散公式的完整解析形式及分析[J]. *物理学报*, 2004, **53**(12): 4181~4188