

光强传播方程相位恢复的实验验证

王 潇 毛 珩 赵达尊

(北京理工大学信息科学技术学院光电工程系, 北京 100081)

摘要 在傍轴近似条件下, 可以利用光强传播方程(ITE)对畸变波前进行相位恢复。对于衍射受限的光学系统, 很难获得相位的边界径向斜率值作为边界条件, 此外, 要获得精确的圆域边界采样值也并非易事。为了克服上述困难, 进一步研究了相位恢复改进方法, 即改变了方程的表示形式、计算区域和边界条件, 并用多重网格法进行求解获得重构相位, 最后再将其修正。为了验证算法的精确性, 搭建了实验系统对算法进行实验验证, 将由 CCD 探测的光强分布进行计算得到的相位分布与相位恢复算法(PR 算法)的结果进行比较, 证明在光强分布非均匀的情况下, 该方法恢复的相位均方根误差能够达到 0.17λ , 可以适用于波前传感精度要求不是很高的相位恢复。

关键词 自适应光学; 相位恢复; 相位修正; 光强传播方程

中图分类号 O439 **文献标识码** A **doi:** 10.3788/AOS200828s2.0087

Experimental verification of Phase Retrieval Based on Intensity Transport Equation

Wang Xiao Mao Heng Zhao Dazun

(*Department of Optical Engineering, School of Information Science and Technology,*
Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract The phase of optical wave can be recovered by the intensity transport equation (ITE) under the paraxial approximation. For the optical system with diffraction limit, it is difficult to get the boundary radical slope of phase and sample in the circular domain boundary when using the intensity transport equation to recover the phase, consequently, we reviewed an algorithm mentioned in the reference [4], namely, the equation, computation domain and boundary condition are changed, then the phase is reconstructed by the multigrid method and corrected at last. Moreover, the experiment system is set to testify the algorithm, and the recovered phase from the intensity data detected by CCD is compared with the result from phase retrieval (PR) algorithm, it is found that the phase reconstruction error can reach 0.17λ in the case of non-uniform intensity distribution, as a result, the method is suitable for the phase recovery with low wavefront sensing accuracy.

Key words adaptive optics; phase retrieval; phase correction; intensity transport equation

1 引 言

相位恢复是指利用光束传播时所探测到的光强信息反演出相位的方法^[1]。为了获得更多的光强信息以使相位恢复到最佳, 通常在沿光轴方向不同位置处对光强进行多次测量。当光束可以被认为傍轴入射到光学系统中时(如天文观测), 光强传播方

程^[2]可以作为相位恢复的基础, 通过求解该方程便可以恢复出光学系统在瞳面上的相位分布。

由于一般的光学系统都具有圆形光瞳, 而在天文观测时瞳面所探测到的光强近似均匀分布, 因此在利用光强传播方程进行相位恢复时, 则需要以原始相位在圆形区域的边界径向斜率值作为边界条

基金项目: 国家 973 计划(20063215)资助课题。

作者简介: 王 潇(1981—)男, 博士研究生, 主要从事自适应光学方面的研究。E-mail: warren1212@bit.edu.cn

导师简介: 赵达尊(1939—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事颜色科学与技术、光信息科学与技术及自适应光学方面的研究。E-mail: zhdz@bit.edu.cn

件^[3]。但是在实际情况中,相位的边界径向斜率值很难得到,此外,网格采样时要获得精确的圆域边界采样值也并非易事。基于以上在相位恢复中的困难,文献[4]提出了一种改进方法,在消除了边界条件限制的同时,可以成功恢复出待测光波的相位。但是文献[4]中只是进行了计算机仿真,为了验证该方法的可行性,还需要进一步实验。

2 光强传播方程

2.1 方程推导

一束单色电磁波的复振幅可以表示成

$$u(\mathbf{r}) = I^{1/2}(\mathbf{r}) \exp[i\varphi(\mathbf{r})], \quad (1)$$

其中, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $I(\mathbf{r})$ 表示在 \mathbf{r} 处的光强, 而 $\varphi(\mathbf{r})$ 则表示在 \mathbf{r} 处的相位。若将 z 方向定义为光轴方向, 在傍轴近似的条件下, 复振幅 $u(\mathbf{r})$ 满足抛物面方程^[5]

$$(2ik\partial_z + \Delta)u(x, y, z) = 0, \quad (2)$$

式中, k 表示波数, $\partial_z = \partial/\partial z$, $\Delta = \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ 表示二维拉普拉斯算符。

分别用 u 乘以(2)式的共轭和用 u 的共轭乘以(2)式, 得到两个新的等式, 再合并两新等式并利用(1)式进行化简可以得到光强传播方程

$$-k\partial_z I = \nabla \cdot (I\nabla\varphi) = I\Delta\varphi + \nabla I \cdot \nabla\varphi, \quad (3)$$

(3)式将傍轴传播时光波相位的曲率分布和斜率分布同光强沿光轴方向的变化率联系起来, 因此, 如果探测到沿光轴方向的光强变化, 便可以将相位恢复出来, 只是所恢复的相位可以加上一个任意常数 C , 即若 φ 为(3)式的解, 则 $\varphi + C$ 同样也满足(3)式, 因此需要利用边界条件来确定该常数, 不过这个常数对于相位重构来说并不十分重要。

大部分光学系统都具有圆形的通光孔径, 此外, 在天文观测时所接收到的来自探测目标光波的强度近似均匀, 因此可以假定光学系统的入瞳和出瞳均为圆形, 且瞳内的光强分布均匀, 瞳外光强为零, 则光强分布可写成 $I(r, \theta, z)$ (其中 z 为光轴), 且当出瞳位于 $z = z_0$ 处时, 有

$$(r, \theta, z_0) = I_0 \cdot W(r), \quad W(r) = \begin{cases} 1 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}, \quad (4)$$

式中 I_0 表示出瞳内的光强, W 为窗口函数, 而 R 表示出瞳圆形区域的半径。将(4)式代入(3)式, 并在 $z = z_0$ 平面处取值, 则可以得到

$$-kI_0^{-1}\partial_z I(r, \theta, z) \Big|_{z=z_0} = W(r)\Delta\varphi - \delta_B(r)\partial_r\varphi, \quad (5)$$

其中, B 为圆形区域的边界, δ 表示狄拉克 delta 函数, 而 $\partial_r\varphi = \partial\varphi/\partial r$ 表示原始相位在出瞳平面内的径向斜率。

2.2 光强变化率的测量

求解(5)式的前提是获得光强在光轴方向的变化率, 它不能被精确测量, 通常是利用相对于瞳面对称的两个面上的光强进行差分而获得其估计值, 即

$$\frac{\partial I(r, \theta, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_0} \approx \frac{I(r, \theta, z_0 + \delta z) - I(r, \theta, z_0 - \delta z)}{2\delta z} \quad (6)$$

其中, δz 是两个探测面与瞳面之间的距离, 为了与实际情况中的网格采样相对应, 这里改用了直角坐标系。

3 相位恢复

3.1 模型简化

由于光束传播时衍射效应的存在, 使得在两个探测面上圆形以外的区域仍有光强分布, 即由(6)式所得到的 $\partial_z I(r, \theta)$ 在光瞳以外的区域内仍有非零值, 因此为了充分利用所探测到的光强变化率, 可以将计算区域扩展到包含圆形区域的某一矩形区域 Ω , 如图1所示。此外, 若把均匀的光强分布也同时进行扩展, 即可以假设在瞳面上的区域 Ω 内具有均匀的光强分布, 而只有 B 内的区域通光, 则在 Ω 内便有 $\nabla I = 0$, 这时可以规定一个新的边界条件, 即令边界 Γ 附近的相位值 φ_Γ 为一常量, 则在 Γ 处有 $\nabla\varphi = 0$, 因此在瞳面上(3)式变为

$$\begin{cases} -kI_0^{-1}\partial_z I(r, \theta) = \Delta\varphi & (r, \theta) \in \Omega \\ \varphi_\Gamma = \varphi_0 & (r, \theta) \in \Gamma \end{cases}, \quad (7)$$

其中, $\partial_z I(r, \theta)$ 为 $\partial_z I(r, \theta, z) \Big|_{z=z_0}$ 的简写, 下面不再进行说明。这样便可以通过求解具有边界条件 φ_0 的

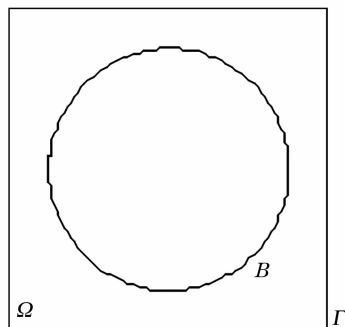


图1 计算区域

Fig. 1 Domain of computation

泊松方程来确定相位分布。顺便指出，由于改变了(5)式的计算区域和边界条件，因此通过(7)式得到的重构相位会与原始相位有所差别，需要修正。

3.2 相位修正

为了找出这一差别所遵从的规律，将相位表示为泽尼克(Zernike)多项式的线性组合，并分别令 Zernike 多项式的每一项作为待测光波相位，经过多重网格法^[6]的计算，将结果重新展开成 Zernike 多项式的系数，便可以找到重构相位与原始相位之间的系数差别。

文献[4]表明，由于(7)式代替了(5)式，使得所重构相位的 Zernike 多项式某些系数之间出现了耦合

关系且量值也发生了变化，但是大部分非相关系数还是基本为零的，根据光瞳口径的不同，所重构的 Zernike 系数会有所差别；此外，文献[4]还证明了原始 Zernike 系数与重构 Zernike 系数的变化遵循线性规律。最后，以每一项 Zernike 系数所重构的系数结果作为系数传递矩阵，便可以对(7)式的结果进行修正，恢复出待测相位真正的 Zernike 系数。

4 实验验证及误差分析

4.1 实验结果

为了对以上所提出的相位恢复方法进行验证，搭建了一套实验系统，整个实验光路如图 2 所示。

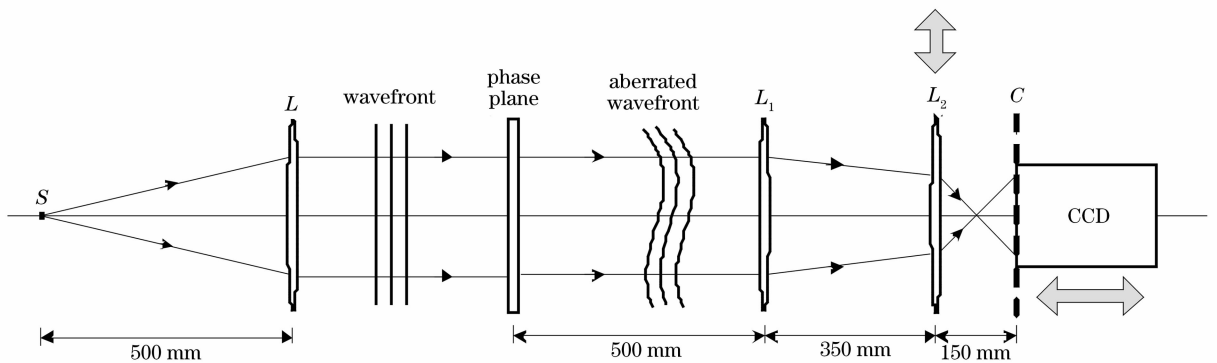


图 2 实验光路示意图

Fig. 2 Layout of experiment

图 2 中透镜 L 和 L_1 的焦距为 500 mm，透镜 L_2 的焦距为 150 mm；在 L 和 L_1 之间插入一相位板作为光波的畸变发生器；CCD 的图像分辨率为 16 bit，固定在一可以沿光轴方向进行平移的一维平移台上；探测面 C 与相位板所在位置关于 L_1 和 L_2 满足物像共轭关系。透镜 L_2 安装在与光轴方向垂直的一维平移台上，可以随时插入或移出整个光路； L_2 插入光路时，光纤点光源 S 固定在透镜 L 的物方焦点处，由其发出的光波经 L 后转变为标准平面光波，通过相位板后光波发生畸变，之后再依次经过 L_1 和 L_2 成像在探测器上。实验中，采用沿光轴方向距离 C 前后 2 mm 处的平面作为探测面（分别以探测面 1 和探测面 2 表示），根据探测面 1 和 2 的光强分布便可以利用光强传播方程进行相位恢复；为了对精度进行验证，将 PR 算法的结果作为参考， L_2 移出光路时， C 为 L_1 的焦面，CCD 在 C 附近移动时便可以获得 L_1 焦面和离焦面的光强分布，作为 PR 方法的传感量。具体结果如图 3 所示。

4.2 误差分析

对于造成误差的原因，主要有以下三点：

- 1) PR 方法采用光波复振幅在入瞳面与焦面和离焦面之间满足的傅里叶(Fourier)变换关系进行迭代求解，因此精度较高；而文献[4]中所提出的方法是通过获得 Zernike 系数的方法来求解畸变波前，在实验的计算中采用了前 15 阶 Zernike 系数表示波前，因此还可能存在一些截断误差，忽略了高频畸变成分。
- 2) 如图 2，在光波通过 L_2 后有先会聚再发散的趋势，因此当 CCD 沿光轴方向移动时所得到的光斑尺寸是不一样的。由于算法的要求，需要将光斑的分布进行重新插值和缩放，将光斑尺寸归一化，这样便引入了误差。
- 3) 算法中光强传播方程形式的变换前提是瞳面光强均匀分布，而实验中由于光学元件摆放所造成的偏轴误差、光学元件本身的加工误差以及光源均匀性等因素的影响，造成实际光强分布并不满足均匀分布，因此在计算 Zernike 多项式系数矩阵时必须对模型进行离散化，便带来了矩阵的计算误差。

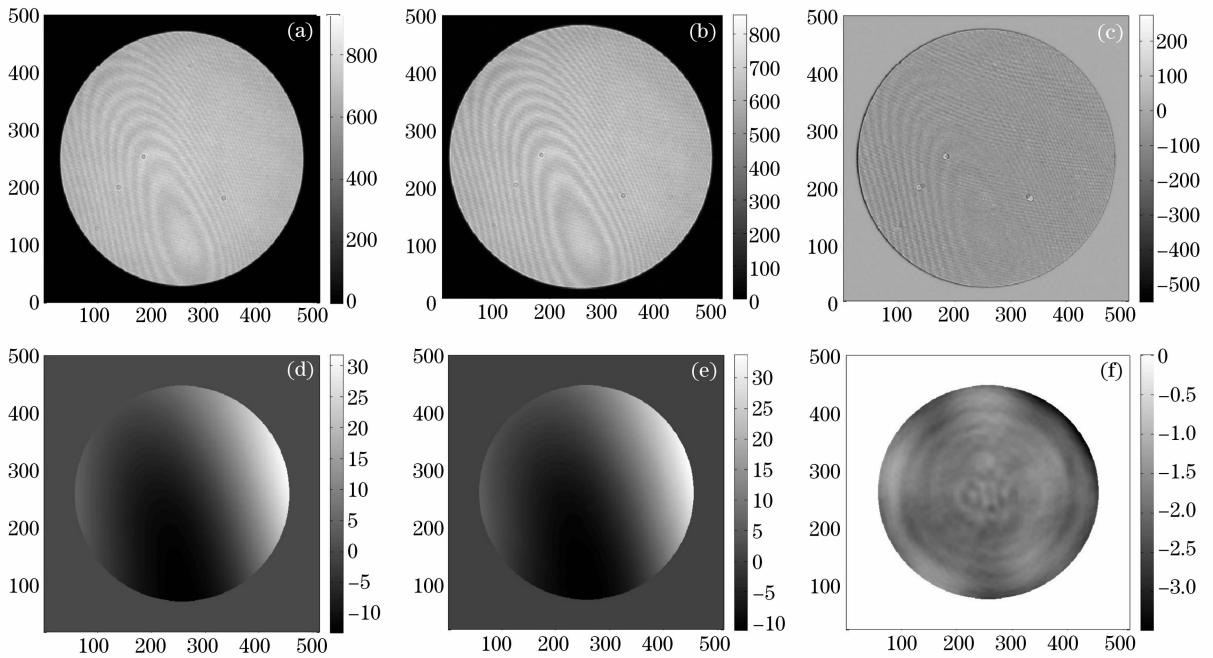


图 3 (a) 探测面 1 的光强分布;(b) 探测面 2 的光强分布;(c) 探测面 1 和 2 的光强分布差;(d) 本算法相位恢复结果;(e) PR 方法相位恢复结果(去除 piston 误差);(f) 两种方法的波前恢复误差, $RMS=0.17 \lambda$

Fig. 3 (a) the intensity distribution of detector plane 1; (b) the intensity distribution of detector plane 2; (c) the difference of intensity distribution; (d) phase recover result with the new algorithm; (e) phase recover result with phase retrieval method (piston error has been removed); (f) the wavefront sensing error between two algorithms, $RMS=0.17 \lambda$

5 结 论

利用一种基于光强传播方程的算法进行相位恢复,即在改变光强传播方程的计算区域、表达形式和边界条件的前提下求解方程,再利用计算机事先仿真得到的 Zernike 系数传递矩阵进行相位修正。此方法在应用新的边界条件后,不用再考虑圆形区域的边界条件,可以忽略待测相位的径向斜率值来进行相位恢复而使问题简单化,求解方程时所用的多重网格法也有很快的迭代速度。

为验证此算法的精确性,搭建了一套实验系统,利用科学级 CCD 探测的光强分布进行计算得到的待测光波相位分布,并将 PR 方法的计算结果作为参考。经过计算表明在光强分布为非均匀情况下两种算法之间的波前传感误差为 0.17λ ,因此该算法具有一定的可行性,可以适用在波前传感精度要求不是很高的情况下的相位恢复。最后,对实验中可能所引入的误差进行了分析,主要包括截断误

差、光斑尺寸的归一化误差以及 Zernike 系数矩阵的计算误差。

参 考 文 献

- 1 R. P. Millane. Recent advances in phase retrieval[C]. *SPIE*, 2006, **6316**: 1~11
- 2 M. R. Teague. Deterministic phase retrieval: a Green's function solution[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1983, **73**(11): 1434~1441
- 3 T. E. Gureyev, A. Roberts, K. A. Nugent. Phase retrieval with the transport-of-intensity equation: matrix solution with use of Zernike polynomials[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, **12**(9): 1932~1941
- 4 Wang Xiao, Mao Heng, Zhao Dazun. Phase retrieval on intensity transport equation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(12): 2117~2122
王 潇, 毛 珩, 赵达尊. 基于光强传播方程的相位恢复[J]. *光学学报*, 2007, **27**(12): 2117~2122
- 5 S. C. Woods, A. H. Greenaway. Wave-front sensing by use of a Green's function solution to the intensity transport equation [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2003, **20**(3): 508~512
- 6 W. Hackbusch. *Muti-Grid Methods and Applications* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1985: 65