

光子偏振度受大气散射影响的分析

马丽珍 顾永建 史鹏 李新虎

(中国海洋大学物理系, 山东 青岛 266100)

摘要 采用矩阵形式描述光子的偏振态和大气散射理论, 分析了“BB84 协议”中四个不同偏振光子经单次散射后光子的偏振度与前向散射角的关系。发现单次散射不改变偏振光子的总偏振度, 但改变偏振光子的线偏振度与圆偏振度, 尤其对垂直偏振光子的线偏振度与圆偏振度改变明显; 当前向散射角小于 0.25 rad 时, 四个不同偏振光子的线偏振度基本保持不变, 量子信息仍然保持; 同时分析了大气散射对不同波长的垂直偏振光子线偏振度的影响, 发现长波光子偏振度保持度高。

关键词 散射; 偏振度; 矩阵; 量子密钥

中图分类号 O436.2 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS200828s2.0068

Analysis of the Effects of Atmosphere Scattering on Photon Polarization Degree

Ma Lizhen Gu Yongjian Shi Peng Li Xinhu

(Department of Physics, Ocean University of China, Qingdao, Shandong 266100, China)

Abstract By using matrix to describe the polarization characteristic of photon and atmosphere scattering theory, the relationship between the polarization degree of four different polarized photons in “BB84 protocol” after single scattering and the forward scattering angle is analyzed. It is shown that single scattering does not have influence on photon polarization state, while the degree of linear and circular polarization are changed, especially, those of the perpendicular polarized photon are changed obviously. Also, it is founded that linear polarization degree of four different polarized photons keep unchanged when scattering angle is less than 0.25 rad, and the quantum information is still survive at the same time, we study the influence of atmosphere scattering on different wavelength polarized photons, it is shown that the polarization degree of longer wavelength photon change less than that of short wavelength photon.

Key words scattering; polarization degree; matrix; quantum key

1 引言

量子通信以光学光纤和自由空间作为量子信息传输的通道。光纤信道量子通信不但传输效率高, 而且可以容易地改变传输方向, 故而得到广泛的应用^[1], 但由于光纤中有损耗且对光子的偏振态影响较大, 因此使得光纤中量子信息可传输距离被限制在 100 km 量级^[2], 在长于 200 km 的光纤中进行量子密钥分配将变得相当困难。另一种进行远距离量子通信的有效途径是借助于卫星来对单光子或纠缠光子对进行自由空间的分配和信息传输, 即自由空

间量子通信。由于大气层的有效厚度是 5~10 km, 在地面以上 5~10 km 以外空间, 光子的损耗和消相干作用可被忽略, 因此只要光子能成功地穿越大气层而保持其量子态, 全球范围的量子通信就可以实现。目前单光子或纠缠光子对的自由空间分配在实验方面已形成研究热点, 并已取得重要进展^[3~5]。与实验上的重大进展相比, 自由空间量子通信的理论研究明显滞后, 大气层对载有信息的单光子和纠缠光子对状态的影响将不可避免地成为信息分析和评估的重点所在, 因此只有从理论上了解

基金项目: 国家自然科学基金(60677044)资助课题。

作者简介: 马丽珍(1973—), 女, 博士研究生, 讲师, 主要从事空间光学方面的研究。E-mail: zjmlz@ouc.edu.cn

导师简介: 顾永建(1966—), 男, 博士生导师, 主要从事量子信息等方面的研究。E-mail: yjgu@ouc.edu.cn

了大气对光子状态的影响，才能实现对量子信息的准确性分析和纠错，从而向基于卫星的全球量子通信提供理论支持。

2 大气散射的矩阵描述

2.1 偏振光的矩阵描述

设单色偏振光波沿 z 方向传播，任意偏振状态的光都可由 x 轴和 y 轴方向振动的叠加而成，这样电场矢量可以用复函数表示

$$\mathbf{E} = (E_x \mathbf{x} + E_y \mathbf{y}) \exp[i(kz - \omega t)], \quad (1)$$

式中 $E_x = A_x e^{-i\delta_x}$, $E_y = A_y e^{-i\delta_y}$, \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 分别表示单位矢量, A_x 与 A_y 分别表示 x 轴与 y 轴方向上的振幅, $\delta = \delta_x - \delta_y$ 表示两个方向上的相位差, 这两个分量的振幅比和相位差决定偏振光的偏振态。

$$\text{定义参数: } \begin{cases} I = A_x^2 + A_y^2 \\ Q = A_x^2 - A_y^2 \\ U = 2A_x A_y \cos \delta \\ V = 2A_x A_y \sin \delta \end{cases}$$

$$\text{则得到 Stokes 矩阵 } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix}, \quad (2)$$

Stokes 矩阵可以完全描述偏振光的偏振态^[6], 其中 I 描述光的强度, Q, U, V 描述光的偏振态。 Q 和 U 依赖于坐标系的选取, 当坐标系旋转 φ 角度时, Stokes 矩阵的转换公式为

$$\begin{bmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\varphi) & -\sin(2\varphi) & 0 \\ 0 & \sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix},$$

由 Stokes 矩阵定义的三种偏振度为

$$\text{线偏振度 } P_L = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2}}{I},$$

$$\text{圆偏振度 } P_C = \frac{\sqrt{V^2}}{I},$$

$$\text{总偏振度 } P = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I}.$$

Stokes 参数对于完全偏振光满足等式 $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$ 。

2.2 Mie 散射理论的矩阵描述

设有(1)式表示的偏振光, 对于均匀球形粒子, 由 Mie 散射理论得, 散射波函数为

$$E_{s//} = -\frac{E_{i\perp}}{kr} S_1(\theta) \exp[-i(kr - \omega t)], \quad (3)$$

$$E_{s\perp} = -\frac{E_{i\perp}}{kr} S_2(\theta) \exp[-i(kr - \omega t)], \quad (4)$$

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \pi_n(\cos \theta) + a_n \tau_n(\cos \theta)], \quad (5)$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos \theta) + b_n \tau_n(\cos \theta)], \quad (6)$$

其中, $E_{i//}$, $E_{s//}$ 分别为入射波和散射波中平行于散射面的电矢量, $E_{i\perp}$, $E_{s\perp}$ 分别为入射波和散射波中垂直于散射面的电矢量, $S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$ 为散射振幅函数, a_n, b_n 为 Mie 散射系数。于是入射波与散射波振幅之间的关系用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} E_{s//} \\ E_{s\perp} \end{bmatrix} = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \begin{bmatrix} S_1(\theta) & 0 \\ 0 & S_2(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{i//} \\ E_{i\perp} \end{bmatrix} \quad (7)$$

因此, 可由式(2), (7)式建立由 Stokes 矩阵表示的入射光与散射光之间的关系, 以代替由振幅表示的关系, 即

$$\begin{bmatrix} I_s \\ Q_s \\ U_s \\ V_s \end{bmatrix} = \frac{1}{k^2 r^2} \mathbf{M} \begin{bmatrix} I_{in} \\ Q_{in} \\ U_{in} \\ V_{in} \end{bmatrix},$$

其中 M 为 Mueller 转换矩阵, 对于均匀球形粒子 M 表示为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & 0 & 0 \\ m_2 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & m_4 \\ 0 & 0 & -m_4 & m_3 \end{bmatrix},$$

其中

$$m_1 = \frac{1}{2k^2} [S_1(\theta) S_1^*(\theta) + S_2(\theta) S_2^*(\theta)],$$

$$m_2 = \frac{1}{2k^2} [S_1(\theta) S_1^*(\theta) - S_2(\theta) S_2^*(\theta)],$$

$$m_3 = \frac{1}{2k^2} [S_1(\theta) S_2^*(\theta) + S_2(\theta) S_1^*(\theta)],$$

$$m_4 = \frac{i}{2k^2} [S_1(\theta) S_1^*(\theta) - S_2(\theta) S_1^*(\theta)],$$

S_1^* 和 S_2^* 分别为 S_1 和 S_2 的共轭复数。

2.3 偏振光子的单次散射

为了实现自由空间中的量子通信, 必须研究量子信号的大气传输特性。基于“BB84 协议”的自由空间量子密钥分发中^[7], 信息编码在光子的偏振态上, 大气为量子信道。携带信息的光子在通过大气层时, 将会受到吸收、散射等影响, 由于在近红外激光波段附近存在大气传输窗口, 自由空间量子通

信通常选用该波段的光子或纠缠光子对作为信息载体, 故而引起光子能量衰减、偏振态变化的主要因素是大气粒子散射^[8~10]。采用矩阵形式描述光子的单次散射, 根据 Stokes 矩阵的定义, “BB84 协议”中选取的四个不同偏振态光子的 Stokes 矩阵见表 1 所示。

表 1 不同偏振态光子的 Stokes 矩阵

Table 1 Stokes matrix of the different polarized photon

	0°	90°	45°	135°
$S = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

入射光子 Stokes 矩阵表示为 S_0 , 散射光 Stokes 矢量为 S'_0 , 则发生单次散射时 Stokes 矢量的变换满足

$$S'_0 = L_2(-\varphi)ML_1(\varphi)S_0,$$

其中 φ 表示参考面和散射面之间的旋转角(图 1), M 为由 Mie 散射理论决定的 Mueller 矩阵, $L_1(\varphi)$ 为转换矩阵, 其作用是在发生散射之前把入射光的 Stokes 矢量从参考面转换到散射面, 转换矩阵 $L_2(-\varphi)$ 是在散射之后把 Stokes 矢量再从散射面转换到参考面, 这两个矩阵有着相同的表达式。光子每经历一次散射就可能改变其方向, 故在多次散射中, 为了追踪每次散射后光子 Stokes 矢量的变化, 对于每个 Stokes 矢量定义一个由散射面决定的局部坐标系, 当发生散射时若入射面与散射面之间有一个面夹角为 φ , 则引入旋转矩阵 $L(\varphi)$, 在发生散射之前把入射光的 Stokes 矢量从参考面转换到散射面, 那么经过 n 次散射后的光子相对于散射面的 Stokes 矢量 S_n 为

$$S_n = M_n \cdot L_n(\varphi_n) \cdot M_{n-1} \cdot L_{n-1}(\varphi_{n-1}) \dots$$

$$M_1 \cdot L_1(\varphi_1)S_0.$$

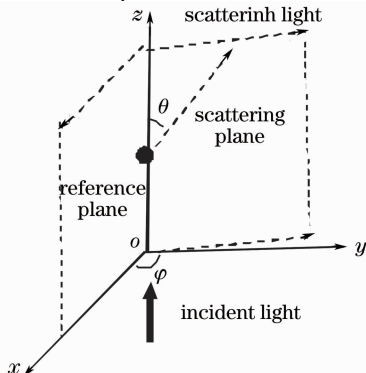


图 1 散射示意图

Fig. 1 Schematic of scattering

3 数值计算及结果

通过 MATLAB 编程计算了单次散射对光子偏振态的影响, 图 2 是水平偏振[1100]、垂直偏振[1-100]、45°偏振[1010]、135°偏振[10-10]四种偏振光子经单次散射后总偏振度 P 随散射角的变化, 由图 2 可知, 偏振光子经单次散射后总偏振度 $P = 1$, 说明偏振光经过单次散射后仍为偏振光, 这与散射理论一致。

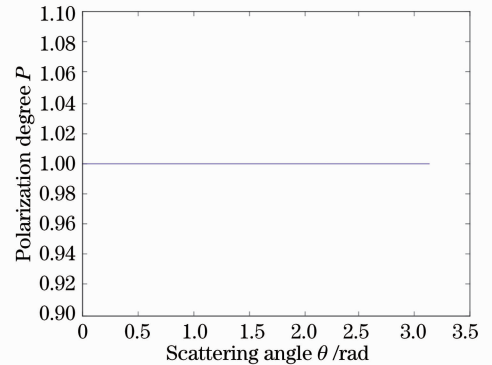


图 2 总偏振度随散射角的变化曲线

Fig. 2 Relationship between polarization degree and scattering angle

图 3 是四种偏振态光子经单次散射后相对参考面的线偏振度 P_L 随散射角的变化图, 因为基于卫星的自由空间量子通信主要考虑弹道方向的前向散射, 故仅仅计算了前向散射角度小于 0.65 rad 的散射。由图 3 可见, 不同偏振态光子的线偏振度成分都随散射角的增大而降低, 其中 135°偏振[10-10]光子的线偏振度随散射角的变化下降最为缓慢, 垂直偏振[1-100]光子的线偏振度随散射角变化最为明显, 当散射角小于 0.25 rad 时, 四种不同偏振态光子的线偏振度变化非常小, 仍然保持原来的线偏振度。

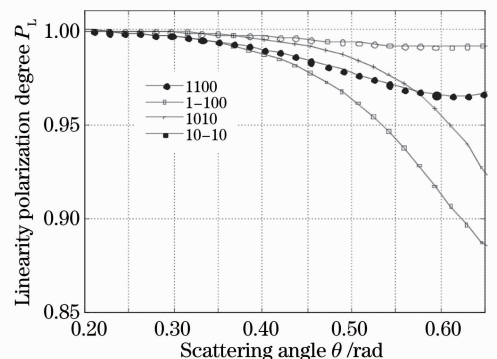


图 3 线偏振度随散射角的变化曲线

Fig. 3 Relationship between the degree of linear polarization and scattering angle

图4是四种偏振态光子经单次散射后相对参考面的圆偏振度 P_C 随散射角的变化图,由图可见,不同偏振态光子的圆偏振度成分都随散射角的增大而增大,与线偏振度对应的是 135° 偏振[10-10]光子的圆偏振度随散射角的变化上升最为缓慢,垂直偏振[1-100]光子的圆偏振度随散射角变化上升最为迅速。由图3与图4可知,偏振光子的线偏振度与圆偏振度为互补的关系,当线偏振成分大时圆偏振成分小,相反线偏振成分小时圆偏振成分大。图5是在其他条件相同的条件下,不同波长的垂直偏振光子[1-100]散射后线偏振度与散射角的关系,波长越长偏振度变化越小。

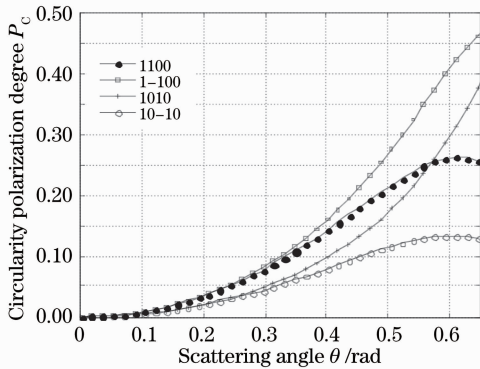


图4 圆偏振度随散射角的变化曲线

Fig. 4 Relationship between the degree of circular polarization and scattering angle

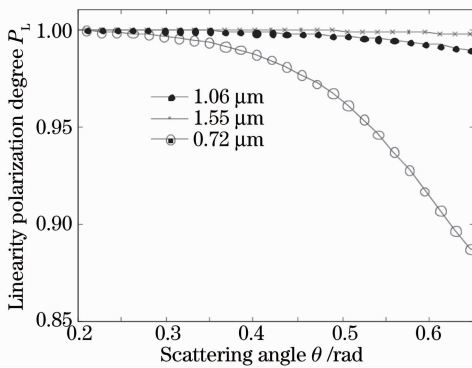


图5 不同波长偏振光子的线偏振度随散射角的变化曲线

Fig. 5 Relationship between the degree of linear polarization of different wavelength and scattering angle

发不可避免地会受到大气散射的作用,文中计算了单次散射对协议中4个不同偏振态光子偏振度的影响,得到单次散射不改变偏振光子的总偏振度,但会改变偏振光子的线偏振度,尤其对垂直偏振光子的线偏振度改变明显,而当这四个不同偏振态光子的线偏振度降低时,与其对应的圆偏振度增大;当散射角小于 0.25 rad 时,4个不同偏振光子的线偏振度变化极小,可知前向散射不改变光子的偏振度,因量子信息编码在光子的偏振态上,所以当光子发生前向散射时量子信息仍能够保持。同时我们也得到,自由空间单光子量子密钥分发中,应在大气传输窗口中选用波长较长的光子,因为波长较长的光子不但散射损耗小,而且偏振度保持度高。

参 考 文 献

- 1 Gui Youzhen, Mo Xiaofan, Han Zhengpu *et al.*. Quantum key distribution in optical fiber at wavelength of 1550 nm [J]. *Acta Sinica Quantum Optica*, 2004, **10**(3): 131~134
桂有珍, 莫小范, 韩正甫 等. 1550 nm 单模光纤中的量子密钥分配[J]. *量子光学学报*, 2004, **10**(3): 131~134
- 2 Gisin N, Ribordy G., Tittel W *et al.*. Quantum cryptography [J]. *Rev. Mod. Phys.*, 2002, **74**: 145~146
- 3 Hughes R J, Nordholt J E, Derkacs D *et al.*. Practical free-space quantum key distribution over 10 km in daylight and at night [J]. *New Journal of Physics*, 2002, **43**(4): 1~14
- 4 Kurtsiefer C, Zarda P, Halder M *et al.*. Quantum cryptography: A step towards global key distribution [J]. *Nature*, 2002, 419~450
- 5 Cheng Z P, Yang T, Xiao H B *et al.*. Experimental free-space distribution of entangled photon pairs over 13 km; towards satellite-based global quantum communication [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, **94**(150501): 1~4
- 6 Bron M, Wolf E. Principles of Optics; Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light [M]. Britain; Cambridge University Press, 1999, 20~31.
- 7 Bennett C H, Brassard G.. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing [C]. Proceeding of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Singal Processing, IEEE, New York, 1984, 175~179
- 8 Zhao Yiming, Jiang Yuesong. Depolarization characteristics of scattered light emitted from aspherical particles[J]. *Journal of Applied Optics*, 2007, **28**(3): 358~362
赵一鸣, 江月松. 非球形粒子散射光的去偏振特性研究[J]. *应用光学*, 2007, **28**(3): 358~362
- 9 Ye Fuqiu. The study of polarization of scattering light of particle group[J]. *Journal of Applied Optics*, 2004, **25**(2): 22~24
叶伏秋. 群体粒子散射光偏振特性的研究[J]. *应用光学*, 2004, **25**(2): 22~24
- 10 Liu Jianbin, Wu Jian. Analysis of scattering of spherical particles [J]. *Laser Journal*, 2004, **25**(6): 39~41
刘建斌, 吴健. 球形粒子的散射特性分析[J]. *激光杂志*, 2004, **25**(6): 39~41

4 结 论

自由空间基于“BB84协议”的单光子量子密钥分