

非柯尔莫哥洛夫湍流光束漂移的理论研究

都文和^{1,2} 谭立英¹ 马 晶¹

(¹哈尔滨工业大学航天学院,黑龙江 哈尔滨 150001;²齐齐哈尔大学理学院,黑龙江 齐齐哈尔 161006)

摘要 一直以来,大气湍流对空间光通信影响的研究都是在柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)湍流理论的框架内进行,该模型已经被人们广泛接受和使用。然而,近年来国内外众多非柯尔莫哥洛夫(Non-Kolmogorov)湍流的实验报道则表明 Kolmogorov 湍流理论有时不能完全正确地描述大气湍流的统计规律,尤其在对流顶层和平流层。为了全面了解大气湍流对空间光通信的影响,研究 Non-Kolmogorov 湍流对光波传输的影响成为了首先要面对的问题。基于 Non-Kolmogorov 湍流功率谱密度,运用几何光学近似方法推导了弱起伏条件下准直光束和聚焦光束的光束漂移方差,并给出了简洁的解析表达式;然后,利用这一表达式进行了仿真分析。

关键词 大气光学;光束漂移;非柯尔莫哥洛夫湍流;几何光学近似;空间光通信

中图分类号 TN929.12; TN012 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS200828s2.0020

Theory Study on Beam Wander for Laser Beam Propagation through Non-Kolmogorov Turbulence

Du Wenhe^{1,2} Tan Liying¹ Ma Jing¹

(¹*School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China*)
(²*College of Science, Qiqihar University, Qiqihar, Heilongjiang 161006, China*)

Abstract Free-space laser system performance is limited by atmospheric turbulence that has been described for many years by Kolmogorov's power spectral density model because of its simplicity. However, many inland and overseas experiments concerning non-Kolmogorov atmospheric turbulence have showed recently that Kolmogorov's theory is sometimes incomplete to describe atmospheric turbulence statistics correctly, in particular in portions of the troposphere and stratosphere. It is the first problem to investigate the effect of non-Kolmogorov on the propagation of light in order to know completely the effect of atmospheric turbulence on free-space laser communications. In this paper using the non-Kolmogorov turbulent power spectral density, we derived the variances of beam wander of the convergent and collimated beams, which are analytic and concise, and then analyzed the formulas.

Key words atmospheric optics; beam wander; non-Kolmogorov turbulence; geometrical-optical approximation; free-space laser communications

1 引 言

空间光通信因其具有高码率数据传输、抗干扰能力强、终端体积小和重量轻等诸多优点而备受青睐,美国、日本、欧洲各国等先进工业国家甚至包括一些第三世界国家都投入了大量人力、物力对其进行了广泛而深入研究。对于地对地、地对空、还是空对地之间的激光通信,由于地球大气层是其通信信道的一部分,因此大气湍流必将对激光通信系统的性能产生影响。

大气湍流对空间光通信影响的研究建立在大气

湍流中光波传输理论的基础上。长期以来,光波在大气湍流中的传输研究均是围绕着柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)湍流理论展开的,而且日臻成熟^[1~6]。然而,最近恒星的闪烁测量、空中系留气球的温度测量以及地面的雷达测量等实验都表明对流顶层和平流层湍流偏离 Kolmogorov 模型^[7~10];而且被动保守量传输进一步发展的理论也已经表明尽管 Kolmogorov 模型是重要的,但它仅仅是湍流被动保守量传输更一般行为的一部分而已^[11]。因此,欲充分了解大气湍流对空间光通信的影响,就要对 Non-

作者简介: 都文和(1970—),男,博士研究生,讲师,主要从事大气光学、空间光通信等相关方面的研究。

E-mail: duwenhe@hit.edu.cn

导师简介: 谭立英(1957—),女,博士生导师,教授,主要从事卫星光通信、小波光学理论等相关方面的研究。

E-mail: tanly@hit.edu.cn

Kolmogolov 湍流中光波的传输效应进行研究^[12,13]。

本文基于 Non-Kolmogolov 湍流折射率起伏功率谱密度,首先通过傅立叶逆变换得到了 Non-Kolmogolov 湍流折射率结构函数;然后在此基础上,利用几何光学近似方法分别推导了弱起伏情况下聚焦光束和准直光束光束漂移的方差,给出了方差与功率谱密度幂率之间解析关系,且该解析表达式简洁明了;最后,利用该解析表达式对光束漂移方差随功率谱密度幂率变化进行了仿真分析。这里需要特别指出的是该解析表达式也适用于 Kolmogolov 湍流情形。

2 Non-Kolmogorov 功率谱密度和结构函数

Non-Kolmogolov 湍流情形下,折射率起伏空间功率谱密度为^[12]

$$\Phi_n(\kappa, \alpha) = A(\alpha) \cdot \tilde{C}_n^2 \cdot \kappa^{-\alpha}, 3 < \alpha < 4, \kappa > 0, \quad (1)$$

式中, κ 表示空间波数; $A(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \Gamma(\alpha-1) \cos(\frac{\alpha\pi}{2})$, 这里的 $\Gamma(\alpha-1)$ 是伽玛函数。当 $\alpha = 11/3$ 时, $A(11/3) = 0.033$; $\tilde{C}_n^2 = \beta \cdot C_n^2$ 是归一化折射率结构常数。

根据大气湍流的基本理论^[14],折射率结构函数可由功率谱密度经傅立叶逆变换得到

$$D_n(r) = 8\pi \int_0^\infty \Phi_n(\kappa) \kappa^2 \left(1 - \frac{\sin \kappa r}{\kappa r}\right) d\kappa, \quad (2)$$

这里 $\Phi_n(\kappa)$ 为折射率起伏功率谱密度。因此,对于 Non-Kolmogolov 湍流,折射率结构函数可以通过把(1)式代入(2)式得到

$$D_n(r) = 8\pi \times A(\alpha) \cdot \tilde{C}_n^2 \int_0^\infty \kappa^{2-\alpha} \left(1 - \frac{\sin \kappa r}{\kappa r}\right) d\kappa = \frac{2}{\pi} \Gamma(\alpha-1) \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) \tilde{C}_n^2 \int_0^\infty \kappa^{2-\alpha} \left(1 - \frac{\sin \kappa r}{\kappa r}\right) d\kappa. \quad (3)$$

利用积分恒等式

$$\int_0^\infty x^l \left(1 - \frac{\sin ax}{ax}\right) dx = \frac{-\Gamma(l) \sin\left(\frac{\pi l}{2}\right)}{a^{1+l}}, \quad (-3 < l < -1), \quad (4)$$

可得到与 Non-Kolmogolov 功率谱密度相对应的结构函数,即 Non-Kolmogolov 湍流的折射率结构函数

$$D_n(r) = B(\alpha) \cdot C_n^2 \cdot r^{\alpha-3}, \quad (5)$$

这里

$$B(\alpha) = -\frac{2}{\pi} \Gamma(\alpha-1) \Gamma(2-\alpha) \sin\left(\frac{2-\alpha}{2}\pi\right) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

3 Non-Kolmogorov 湍流的光束漂移方差

根据几何光学近似理论^[15],对于一束曲率半径为 F 、直径为 D 、波长为 λ 的均匀光束通过距离为 L 的大气后,大气湍流引起的光束漂移的方差为

$$\langle \rho_c^2 \rangle = \int_0^z \int_0^z \langle \Delta n(z_1) \Delta n(z_2) \rangle \times \frac{(L-z_1)(L-z_2)}{\omega(z_1)\omega(z_2)} dz_1 dz_2, \quad (6)$$

式中 ρ_c 表示传输路径上大气湍流引起的光束在观察面上的位移; $\Delta n(z_1)$ 和 $\Delta n(z_2)$ 是距离光源 z_1 和 z_2 处光束顶部和底部相对于边缘的折射率差; $\omega(z_1)$ 和 $\omega(z_2)$ 为 z_1 和 z_2 处光束的束腰; $\langle \Delta n(z_1) \Delta n(z_2) \rangle$ 是折射率差的自相关函数,可以由折射率结构函数表示的。

把 Non-Kolmogolov 湍流的折射率结构函数,即(5)式,带入(6)式,就可以得到 Non-Kolmogolov 湍流折射率差的自相关函数

$$\langle \Delta n(z_1) \Delta n(z_2) \rangle = B(\alpha) \cdot C_n^2 \{ (z_2 - z_1)^2 + \frac{1}{4} [\omega(z_2) + \omega(z_1)]^2 \}^{\frac{\alpha-3}{2}} - \{ (z_2 - z_1)^2 + \frac{1}{4} [\omega(z_2) - \omega(z_1)]^2 \}^{\frac{\alpha-3}{2}} \}. \quad (7)$$

在(7)式中,首先考虑几何光学近似,那么光束束腰可简单地表示为

$$\omega(z) = D |1 - z/F|; \quad (8)$$

其次,假定光束的曲率半径远大于光束横截面的直径,从而光束束腰 $\omega(z)$ 可看作为 z 的缓变函数,于是有

$$\omega(z_1) \approx \omega(z_2) \approx D \left| 1 - \frac{z}{F} \right|; \quad (9)$$

最后,由于路径末端光束扩展对光束漂移没有影响,因此可以放宽对(7)式所作的要求湍流沿着传输路径是均匀的条件,而设 C_n^2 是 z 的缓变函数。

通过采取上述合理的假设和分析,(7)式具有如下形式

$$\langle \rho_c^2 \rangle = B(\alpha) \int_0^z \int_0^z C_n^2(z) (L-z_1)^2 \left(1 - \frac{z}{F}\right)^{-2} \times \{ [(z_2 - z_1)^2 + D^2 \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2]^{\frac{\alpha-3}{2}} - (z_2 - z_1)^{\alpha-3} \} dz_1 dz_2. \quad (10)$$

由于对 z_2 的积分时,对 $\langle \rho_c^2 \rangle$ 的主要贡献在

$z_2 \rightarrow z_1$ 区域,所以对 z_2 积分的积分限扩展到 $-\infty$ 与 $+\infty$ 而不引入明显误差。对 z_2 积分并作变换 $t = z_1/L$, 有

$$\langle \rho_c^2 \rangle = G(\alpha)B(\alpha)D^{-1/3}L^3 \int_0^1 C_n^2(t) \frac{(1-t)^2}{\left|1 - \frac{L}{F}t\right|^{\frac{\alpha-3}{2}}} dt, \quad (11)$$

式中, $G(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} [(x^2 + 1)^{\frac{\alpha-3}{2}} - x^{\alpha-3}] dx$ 。

对均匀湍流, $C_n^2(t) = C_n^2$ 。在条件 $L/F < 1$ 范围内,利用积分恒等式

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \times \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt, \quad c > b > 0, \quad (12)$$

(11) 式可以表示为

$$\langle \rho_c^2 \rangle = \frac{1}{3} G(\alpha)B(\alpha)C_n^2 D^{-1/3} L^3 {}_2F_1\left(\frac{\alpha-3}{2}, 1; 4; \frac{L}{F}\right), \quad (13)$$

这里 ${}_2F_1$ 是超几何函数。

对于准直光束,

$$\langle \rho_c^2 \rangle_{\text{coll}} = \frac{1}{3} G(\alpha)B(\alpha)C_n^2 D^{-1/3} L^3. \quad (14)$$

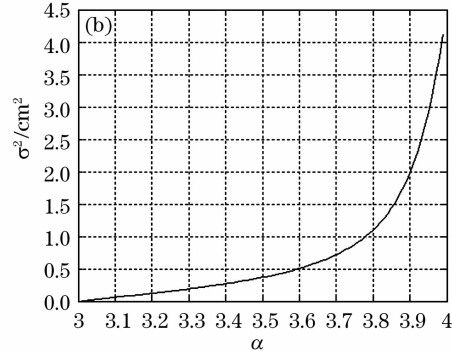
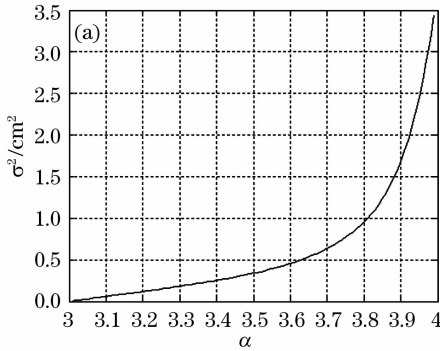


图 1 non-Kolmogorov 湍流准直光束(a)和聚焦光束(b)光束漂移方差随幂率 α 变化的曲线

Fig. 1 Variances of beam wander of collimated and convergent beams as the function of power law α

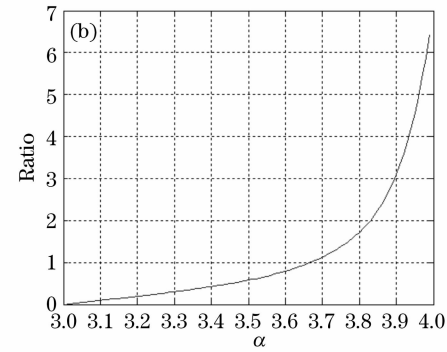
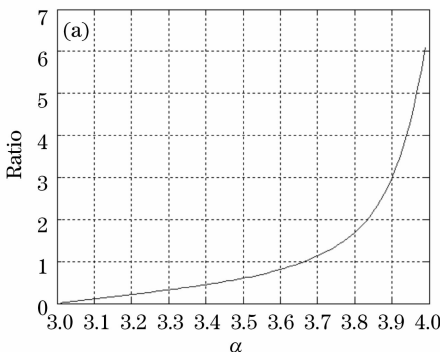


图 2 准直光束(a)和聚焦光束(b)的 Non-Kolmogorov 湍流和 Kolmogorov 湍流光束漂移方差比值随幂率 α 的变化曲线

Fig. 2 Ratio of beam wander variances of collimated (a) and convergent (b) beams for non-Kolmogorov turbulence to Kolmogorov case as the function of power law α

当 $\alpha = 11/3$ 时,上式就变成了 Kolmogorov 湍流情形下准直光束光束漂移方差的解析表达式

$$\langle \rho_c^2 \rangle_{\text{coll}} = 0.97 C_n^2 D^{-1/3} L^3. \quad (15)$$

该解析表达式与弱起伏条件下 Kolmogorov 湍流准直光束光束漂移方差表达式完全一致。

对于聚焦光束

$$\langle \rho_c^2 \rangle_{\text{focal}} = -\frac{2}{\alpha-9} G(\alpha)B(\alpha)C_n^2 D^{-1/3} L^3, \quad (16)$$

当 $\alpha = 11/3$ 时,上式就变成了 Kolmogorov 湍流情形下聚焦光束光束漂移方差的解析表达式

$$\langle \rho_c^2 \rangle_{\text{focal}} = 1.10 C_n^2 D^{-1/3} L^3. \quad (17)$$

该解析表达式也与弱起伏条件下 Kolmogorov 湍流聚焦光束光束漂移方差表达式完全一致。

4 仿真分析

为了获得弱起伏条件下 non-Kolmogorov 湍流对在其中传输光束光束漂移的影响,利用获得的光束漂移方差解析表达式进行了数值仿真。图 1 给出了在 non-Kolmogorov 湍流中水平传播准直光束(a)和聚焦光束(b)的光束漂移方差随幂率变化,这

里,取 $L = 1000 \text{ m}$; $C_n^2 = 1.7 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$; $D = 0.025 \text{ m}$ 。由图 1 可以得出如下结论:1) 随着幂率的增加光束漂移的方差增大;2) 对于幂率相等时,准直光束漂移方差小于聚焦光束漂移方差。为了了解 non-Kolmogorov 湍流与 Kolmogorov 湍流对光束漂移影响的相对大小,绘制 non-Kolmogorov 湍流和 Kolmogorov 湍流光束漂移比值随功率谱幂率的变化曲线,如图 2 所示,参数不变。由 2 图可知:随着幂率 α 的增加,两者的比值从零开始逐渐增大。当 $\alpha < 11/3$ 时,non-Kolmogorov 湍流光束漂移小于 Kolmogorov 湍流光束漂移;而当 $\alpha > 11/3$ 时,non-Kolmogorov 湍流光束漂移大于 Kolmogorov 湍流光束漂移。

5 结 论

基于国内外众多 non-Kolmogorov 湍流实验研究报告,考虑空间光通信系统的性能受到大气湍流的影响,在 non-Kolmogorov 湍流空间功率谱密度的基础上,分别推导了弱起伏湍流情况下准直光束和聚焦光束光束漂移方差的解析表达式,给出了光束漂移方差与功率谱密度幂率之间的关系。并利用该解析表达式进行了仿真分析,结果表明:光束漂移的方差随功率谱密度幂率的增加而增大;随着幂率的不同,non-Kolmogorov 湍流对光束漂移的影响不同,有时大于 Kolmogorov 湍流的影响,有时则小于 Kolmogorov 湍流的影响;由光束漂移方差的解析表达式可以直接看出 non-Kolmogorov 湍流对光束漂移的影响与光的波长无关。通过对 non-Kolmogorov 湍流光束漂移的研究,为进一步研究 non-Kolmogorov 湍流对空间光通信性能的影响奠定了基础。

参 考 文 献

- 1 V. I. Tatarskii. Wave Propagation in a Turbulent Medium[M]. New York:McGraw-Hill, 1961
- 2 Huang Honghua, Yao Yongbang, Rao Ruizhong. Atmospheric turbulence outer scale measurement based on angle-of-arrival covariance[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(8):1361~1365
- 3 黄宏华,姚永帮,饶瑞中等.根据到达角协方差测量大气湍流外尺度[J]. *光学学报*, 2007, **27**(8):1361~1365
- 4 L. C. Andrews, R. L. Phillips, P. T. Yu. Optical scintillations and fade statistics for a satellite-communication system [J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**:7742~7751
- 5 Huang Yinbo, Wang Yingjian. The effect of tracking jitter on the beam spreading induced by atmospheric turbulence[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(2):152~156
- 6 黄印博,王英俭.跟踪抖动对激光湍流大气传输光束扩展的影响[J]. *光学学报*, 2005, **25**(2):152~156
- 7 T. Chiba. Spot dancing of the laser beam propagated through the turbulent atmosphere[J]. *Appl. Opt.*, 1971, **10**:2456~2461
- 8 Rao Ruizhong, Wang Shipeng, Gong zhiben *et al.*. Probability distribution of laser irradiance scintillation in a real turbulent atmosphere[J]. *Acta Optica Sinica*, 1999, **19**(1):81~85
- 9 饶瑞中,王世鹏,龚知本等.实际大气中激光闪烁的概率分布[J]. *光学学报*, 1999, **19**(1):81~85
- 10 M. S. Belenkii, S. J. Karis, J. M. Brown II *et al.*. Experimental study of the effect of non-Kolmogorov stratospheric turbulence on star image motion [J]. *SPIE*, 1997, **3126**:113~123
- 11 M. S. Belenkii, S. J. Karis, J. M. Brown II *et al.*. Experimental evidence of the effects of non-Kolmogorov turbulence and anisotropy of turbulence [J]. *SPIE*, 1999, **3749**:50~51
- 12 D. T. Kyrakis, J. Wissler, D. B. Donna *et al.*. Measurement of optical turbulence in the upper troposphere and lower stratosphere [J]. *SPIE*, 1994, **2110**:43~55
- 13 Rao Changhui, Jiang Wenhan, Ling Ning. Analysis of arrival-of-angle fluctuations of optical wave-front for non-Kolmogorov turbulence [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(10):1323~1327
- 14 饶长辉,姜文汉,凌宁等.非科尔莫戈罗夫湍流情况下光学波前的到达角起伏方差分析[J]. *光学学报*, 2000, **20**(10):1323~1327
- 15 E. Golbraikh, N. S. Kopeika. Behavior of structure function of refraction coefficients in different turbulent fields [J]. *Appl. Opt.*, 2004, **43**(33):6151~6156
- 16 I. Tosellia, L. C. Andrews, R. L. Phillips *et al.*. Free space optical system performance for laser beam propagation through non Kolmogorov turbulence [J]. *SPIE*, 2007, **6457**:64570T-1~11
- 17 I. Tosellia, L. C. Andrews, R. L. Phillips *et al.*. Angle of arrival fluctuations for free space laser beam propagation through non-Kolmogorov turbulence [J]. *SPIE*, 2007, **6551**:65510E-1~12
- 18 Rao Ruizhong. Light Propagation in the Turbulence Atmosphere[M]. Hefei: Anhui Science and Technology Press, 2005. 78~80
- 19 饶瑞中.光在湍流大气中的传输[M].合肥:安徽科学技术出版社, 2005. 78~80
- 20 Zhang yixin, Chi Zeying. Propagation and Imaging of Light Wave in the Atmosphere [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2001. 63~67
- 21 张逸新,迟泽英.光波在大气中的传输与成像[M].北京:国防工业出版社, 2001. 63~67