

左手介质矩形波导导模和表面模的场分布

王振永 周 骏 张玲芬 任海东 金嫦香

(宁波大学理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要 从麦克斯韦方程组出发, 结合电磁场的边界条件, 推导出介质矩形波导导模的一般色散方程。对普通介质矩形波导和左手介质矩形波导的导模场分布分别进行了数值模拟。通过对比两种介质矩形波导的导模场分布的模拟结果, 发现左手介质矩形波导 E_{22}^+ 模的场分布比普通介质波导 E_{00}^+ 模的场更集中在波导中部。同时, 根据处理普通介质矩形波导的 Marcanti 方法, 类比得到左手介质矩形波导表面模的色散方程, 并数值模拟了低阶模的场分布, 结果表明, 能量主要集中在波导的四个角区以及波导的边缘。

关键词 光学材料; 矩形波导; 场分布; 左手介质; 导模; 表面模

中图分类号 O441 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20082808.1558

Field Distribution of Guided Modes and Surface Guided Modes in Rectangular Waveguides with Left-Handed Materials

Wang Zhenyong Zhou Jun Zhang Lingfen Ren Haidong Jin Changxiang

(School of Science, Ningbo University, Ningbo, Zhejiang 315211, China)

Abstract According to Maxwell equations and boundary conditions of electromagnetic field, the general dispersion equations are reduced for the guided modes in rectangular dielectric waveguides. The field distributions of the guided modes are numerically simulated for the waveguides with ordinary dielectric materials and the rectangular waveguides with left-handed materials (LHMs), respectively. The simulation results show that field distribution of the E_{22}^+ mode is restricted mainly in the central part of waveguide with LHMs compared with that of E_{00}^+ mode of the waveguide with dielectric materials. Based on Marcanti's method, the dispersion equation of surface guided modes in rectangular waveguides with LHMs is deduced, and the field distribution of lower-order modes is numerically simulated. The results show that energy of field mode is located mainly in the four angles and edges of waveguide with LHMs.

Key words optical materials; rectangular waveguides; field distribution; left-handed materials (LHM); guided modes; surface guided modes

1 引 言

1968 年 Veselago^[1] 首先从理论上预测了一种介电常数 ϵ 和磁导率 μ 同时为负的新型介质的存在。1999 年, Pendry 等^[2] 提出周期性排列的开口谐振环 (SRRS) 处在谐振频率附近时, 其有效磁导率 μ_{eff} 表现为负。周期性排列的金属杆结构在低频时表现出有效介电常数 ϵ_{eff} 小于零, 从而在实验上证实了负折

率介质的可行性。文献[4]讨论了负折射率平板波导的特性以及芯层中的场分布, 文献[3~5]给出了不对称负折射率平板波导色散曲线、场分布与光波传播特性等。文献[6,7]讨论左手介质平板波导当横波数为纯虚数时, 模式为表面模的情况, 文献[8]得到了单负介质平板波导表面模。然而, 目前的研究工作大部分局限在左手介质平板波导上, 涉及矩形波导的较少, 而矩形波导是集成光学应用的重要器件,

收稿日期: 2007-12-11; **收到修改稿日期**: 2008-02-29

基金项目: 国家自然科学基金 (10574058)、浙江省钱江人才计划项目 (2007R10015) 和浙江省教育厅科研项目 (20070971) 资助课题。

作者简介: 王振永 (1984—), 男, 硕士研究生, 主要从事导波光学、光通信器件设计与制备技术等方面的研究。

E-mail: wangzhenyong12@163.com

导师简介: 周 骏 (1958—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事非线性光学、光电子材料与器件制备技术等方面的研究。

E-mail: ejzhou@yahoo.com.cn

有必要对左手介质矩形波导的性质开展研究。

本文着重讨论波沿矩形波导传播的色散特性和场在波导横截面上的分布情况。通过对矩形波导导模和表面模场分布的数值模拟^[9,10],发现左手介质矩形波导 E_{22}^z 模的场分布比普通介质波导 E_{00}^x 模的场集中,表明波沿左手介质矩形波导传播时,进入包层传播的功率更少。同时,在讨论左手介质矩形波导表面模的场分布时,发现能量主要集中在波导的四个角区及其边缘上。这些特性对于光波导器件的设计有着潜在的应用价值。

2 色散方程

考虑矩形波导的结构如图 1 所示。可以把矩形波导的横截面分为 9 个区域,其中 1 区为芯子,长、宽分别为 $2a$ 和 $2b$,其折射率为 n_1 ;2、3、4、5 四个区域为芯子的相邻区域,折射率分别为 n_2, n_3, n_4, n_5 ;标有阴影部分为矩形波导的四个角上区域。在图上建立直角坐标系, z 轴垂直于纸面向内,并定义电磁波沿着 z 轴的方向传播。

假设当波导中传播的模式不满足截止条件

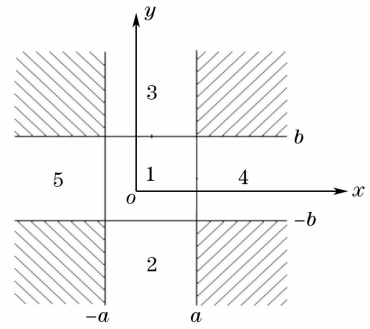


图 1 矩形波导结构示意图

时^[11],导模的大部分功率被束缚在波导芯子中,在芯子外传播的功率相对较少,而进入图 1 中 4 个标有阴影线区的功率就更微弱。因此在下面的分析讨论中忽略标有阴影线的 4 个区域的影响。

2.1 矩形波导导模

从麦克斯韦方程组出发,可以得到导模 E_{mn}^x 模关于主要磁场分量 H_y 的波动方程为^[12]

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) H_y = 0, \quad (1)$$

根据近似分析,写出 5 个区域的磁场 H_y 的磁场函数形式为

$$H_y = \begin{cases} H_1 \cos(k_x x + \xi) \cos(k_y y + \eta), & (\text{region1}) \\ H_2 \cos(k_x x + \xi) \exp(\alpha_2 y), & (\text{region2}) \\ H_3 \cos(k_x x + \xi) \exp(-\alpha_3 y), & (\text{region3}) \\ H_4 \cos(k_y y + \eta) \exp(-\alpha_4 x), & (\text{region4}) \\ H_5 \cos(k_y y + \eta) \exp(\alpha_5 x), & (\text{region5}) \end{cases} \quad (2)$$

其中(2)式中的 k_x, k_y 分别表示芯子中(区域 1)沿 x 方向、 y 方向的横波数, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 均为常数振幅因子,其下标表示各个区域的代号, ξ, η 为相位因子, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 表示在各区域中的衰减系数。

把(2)式代入到(1)式中,可以得到各参量之间满足如下关系:

$$\begin{cases} k_x^2 + k_y^2 + \beta^2 = k_0^2 n_1^2, \\ k_x^2 - \alpha_2^2 + \beta^2 = k_0^2 n_2^2, \\ k_x^2 - \alpha_3^2 + \beta^2 = k_0^2 n_3^2, \\ k_y^2 - \alpha_4^2 + \beta^2 = k_0^2 n_4^2, \\ k_y^2 - \alpha_5^2 + \beta^2 = k_0^2 n_5^2, \end{cases} \quad (3)$$

式中 β 为沿 z 轴方向的传播常数。根据电磁场边界条件,当 $x = \pm a$ 时, H_y 和 E_z 切向连续;当 $y = \pm b$ 时, E_x 和 H_z 切向连续。这样,很容易得到矩形波导的相位型色散方程为

$$\begin{cases} 2k_x a = \arctan\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_5} \frac{\alpha_5}{k_x}\right) + \arctan\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_4} \frac{\alpha_4}{k_x}\right) + m\pi, \\ 2k_y b = \arctan\left(\frac{\mu_1}{\mu_3} \frac{\alpha_3}{k_y}\right) + \arctan\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\alpha_2}{k_y}\right) + n\pi, \end{cases} \quad (4)$$

式中 $m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$, 由平板波导中的模序数定义可知, m, n 为 y 轴、 x 轴上的节点数。同时,假设 $N_x = \beta_x/k_0, N_y = \beta_y/k_0$, 并结合(3)式的各参量关系,对(4)式作进一步转化,得到矩形波导的相位型色散方程为

$$2k_0 a \sqrt{n_1^2 - N_x^2} = m\pi + \arctan \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_5} \frac{\sqrt{N_x^2 - n_5^2}}{\sqrt{n_1^2 - N_x^2}} \right) + \arctan \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_4} \frac{\sqrt{N_x^2 - n_4^2}}{\sqrt{n_1^2 - N_x^2}} \right),$$

$$2k_0 b \sqrt{n_1^2 - N_y^2} = n\pi + \arctan \left(\frac{\mu_1}{\mu_3} \frac{\sqrt{N_y^2 - n_3^2}}{\sqrt{n_1^2 - N_y^2}} \right) + \arctan \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\sqrt{N_y^2 - n_2^2}}{\sqrt{n_1^2 - N_y^2}} \right).$$
(5)

2.2 左手介质矩形波导表面模

在(4)式中, k_x, k_y 都为实数, 满足色散方程的模式为导模。如果当 k_x, k_y 都为纯虚数时, 模式成为表面模。

通过(4)式清楚地看到, Marcatili 近似分析得到的矩形波导模式本征方程实际上是由两个独立的平板波导 TE 模和 TM 模的模式本征方程组成。据此, 可以类比得出左手介质矩形波导表面模的本征方程也由平板波导表面模的 TE 模和 TM 模的本征方程组成^[13]。根据以上矩形波导导模的色散方程推导, 得到左手介质矩形波导表面模的相位型色散方程为

$$\tanh(2\alpha_x a) = - \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_4} \frac{\alpha_4}{\alpha_x} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_5} \frac{\alpha_5}{\alpha_x} \right) \bigg/ \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_4} \frac{\alpha_4}{\alpha_x} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_5} \frac{\alpha_5}{\alpha_x} \right),$$

$$\tanh(2\alpha_y b) = - \left(\frac{\mu_1}{\mu_3} \frac{\alpha_3}{\alpha_y} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_y} \right) \bigg/ \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_3} \frac{\alpha_3}{\alpha_y} \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_y} \right),$$
(6)

其中 $\alpha_x = -ik_x, \alpha_y = -ik_y$ (α_x, α_y 为正实数), 其它参量与导模中的参量相同。

为了便于讨论模式及其场分布, 把(6)式表示成关于 $2\alpha_x a, 2\alpha_y b$ 的函数。根据(3)式, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 满足如下关系:

$$\alpha_2 = \sqrt{k_0^2 (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2) + \alpha_y^2},$$

$$\alpha_3 = \sqrt{k_0^2 (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_3 \mu_3) + \alpha_y^2},$$

$$\alpha_4 = \sqrt{k_0^2 (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_4 \mu_4) + \alpha_x^2},$$

$$\alpha_5 = \sqrt{k_0^2 (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_5 \mu_5) + \alpha_x^2},$$
(7)

利用(7)式可以把(6)式的等号右端改写成以下形式:

$$G(2\alpha_x a) = - \frac{2\alpha_x a \left[\frac{\epsilon_1}{\epsilon_4} \sqrt{b_1^2 + (2\alpha_x a)^2} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_5} \sqrt{c_1^2 + (2\alpha_x a)^2} \right]}{(2\alpha_x a)^2 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_4} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_5} \sqrt{b_1^2 + (2\alpha_x a)^2} \sqrt{c_1^2 + (2\alpha_x a)^2}},$$

$$G(2\alpha_y b) = - \frac{2\alpha_y b \left[\frac{\mu_1}{\mu_3} \sqrt{b_2^2 + (2\alpha_y b)^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{c_2^2 + (2\alpha_y b)^2} \right]}{(2\alpha_y b)^2 + \frac{\mu_1}{\mu_3} \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{b_2^2 + (2\alpha_y b)^2} \sqrt{c_2^2 + (2\alpha_y b)^2}},$$
(8)

式中

$$b_1 = k_0 a \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_4 \mu_4}, \quad c_1 = k_0 a \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_5 \mu_5},$$

$$b_2 = k_0 b \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_3 \mu_3}, \quad c_2 = k_0 b \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2}.$$

3 矩形波导场分布数值模拟

3.1 矩形波导导模场

根据 Marcatili 近似分析, 把矩形波导等效成两个独立的介质平板 TE 模和 TM 模的模式本征方程, 并通过(5)式, 分别模拟出 TM 模、TE 模的色散曲线如图 2。在图 2 所示的色散曲线中, 无论是普通介质波导还是左手介质波导, 均假设 $n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 1.9$, $k_0 a = k_0 b = 7$ 。当 m, n 为不同值时, 从

图 2 可以得到普通介质矩形波导和左手介质矩形波导的 N_x 和 N_y 数值如表 1。从图 2(c)和图 2(d)的曲线图中, 可以发现, 在左手介质矩形波导中, 当 $m=n=0$ 时, (5)式无解, 即不论参量取什么值, 都不会出现 E_{00}^x 模; 而对于 $m=n=1$ 的 E_{11}^x 模式, 只在 $k_0 a = k_0 b$ 取特定的较小值时出现, 也就是说, $k_0 a = k_0 b$ 较大时, 左手介质矩形波导中不存在 E_{11}^x 模式的导模(见表 1)。

利用表 1 得到的数据, 结合(3)式, 解出参量 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, k_x$ 与 k_y , 再把(2)式中 H_y 的场分布函数转化成 E_x 的场分布函数。并假设常数 $H_1 = 3$, 利用 $x = \pm a, y = \pm b$ 时的边界条件, 确定 H_2, H_3 ,

H_4, H_5 与 H_1 的比例关系,使得场在边界上得以连续。最后通过数值模拟,得到普通介质矩形波导

模的三维场分布如图 3 所示。类似地,也可以得到左手介质矩形波导导模的三维场分布如图 4 所示。

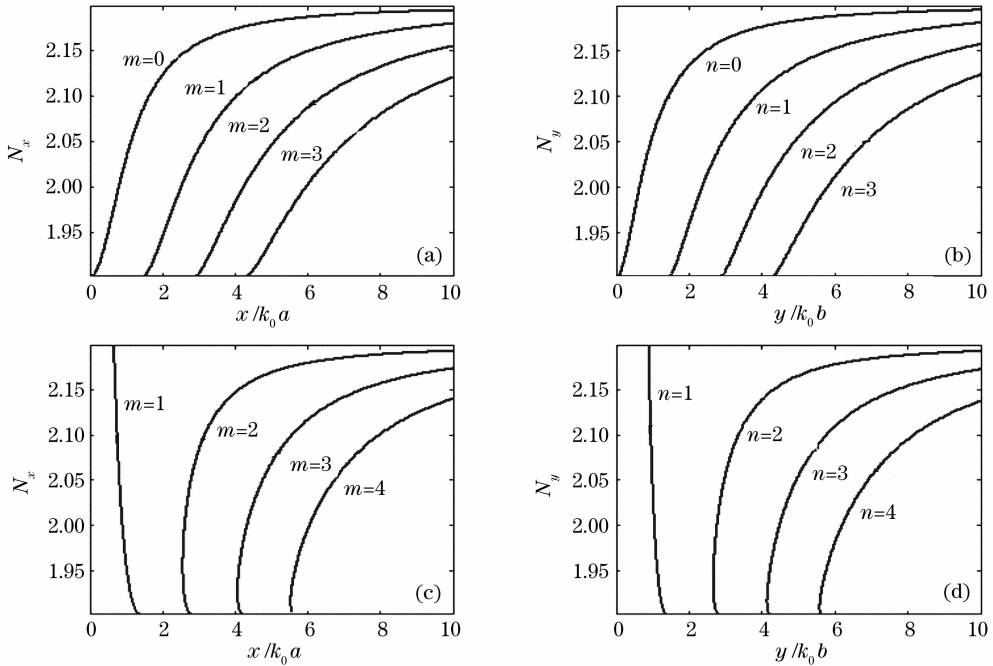


图 2 矩形波导的导模色散曲线图。(a) $n_1=2.2,x$ 方向, (b) $n_1=2.2,y$ 方向, (c) $n_1=-2.2,x$ 方向, (d) $n_1=-2.2,y$ 方向
Fig. 2 Dispersion curves of guided modes in rectangular waveguides. (a) $n_1=2.2,x$ direction, (b) $n_1=2.2,y$ direction, (c) $n_1=-2.2,x$ direction, (d) $n_1=-2.2,y$ direction

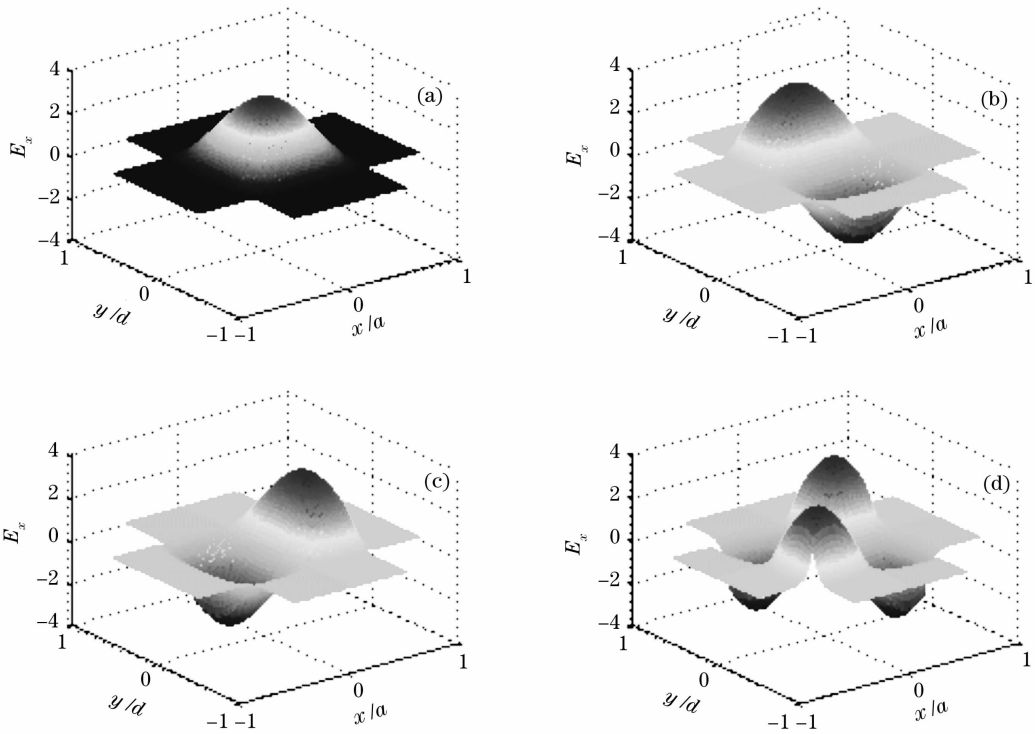


图 3 普通介质矩形波导导模 E_x 的场分布。(a) E_{00}^x 模, (b) E_{01}^x 模, (c) E_{10}^x 模, (d) E_{11}^x 模
Fig. 3 Field distribution of E_x for the guided modes in rectangular waveguides with ordinary materials. (a) E_{00}^x , (b) E_{01}^x , (c) E_{10}^x , (d) E_{11}^x

表 1 几个低阶模式的 N_x 、 N_y 值

Table 1 Value of N_x and N_y on several low-order modes

	$m=0$	$n=0$	$m=1$	$n=1$	$m=2$	$n=2$	$m=3$	$n=3$
Rectangular waveguides with ordinary materials	2.1905	2.1910	1.1619	2.1640	2.1143	2.1187	2.0483	2.0551
Rectangular waveguides with LHMs	—	—	—	—	2.1859	2.1848	2.1424	2.1381

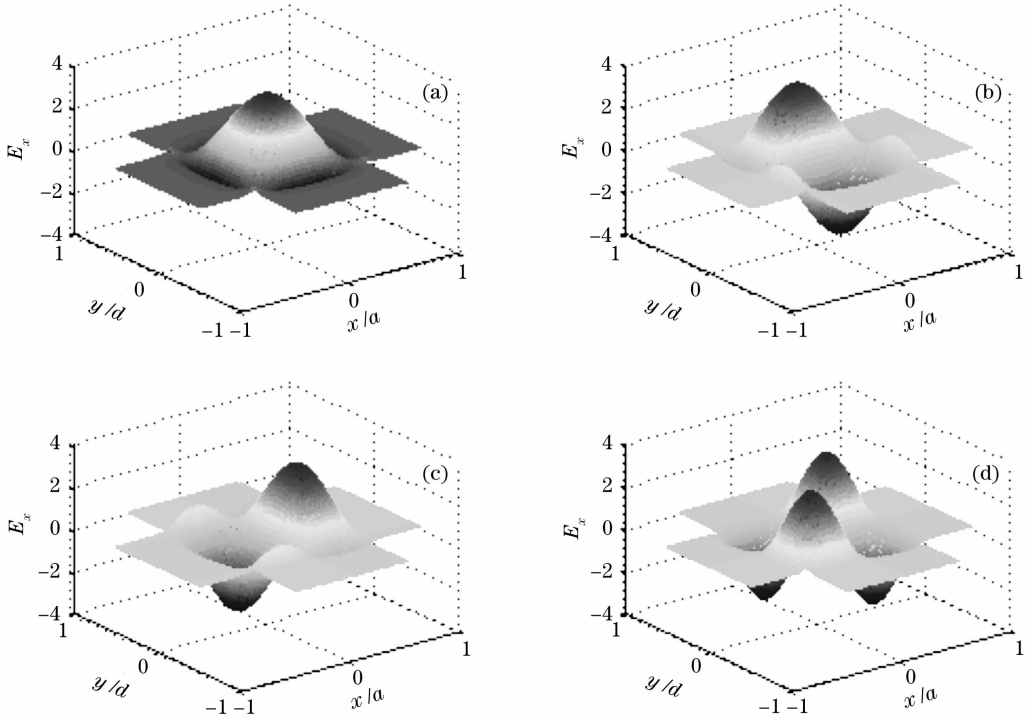


图 4 左手介质矩形波导导模 E_x 场分布。(a) E_{22}^x 模, (b) E_{23}^x 模, (c) E_{32}^x 模, (d) E_{33}^x 模

Fig. 4 Field distribution of E_x for the guided modes in rectangular waveguides with LHMs. (a) E_{22}^x , (b) E_{23}^x , (c) E_{32}^x , (d) E_{33}^x

比较图 3 和图 4, 发现左手介质矩形波导的场分布比普通介质波导中的场集中, 表明波沿左手介质矩形波导传播时, 能量更集中在芯子的内部, 进入包层传播的功率较少。在左手介质矩形波导中, E_{00}^x 模是不存在的, 因为当 $m=n=0$ 时, 色散方程(5)式无解; 而 E_{11}^x 模也只在芯子截止宽度 $k_0 a$ 和 $k_0 b$ 为一定值时可以存在。这些特性与普通介质矩形波导存

在着很大的差异。

3.2 左手介质矩形波导表面模

在考虑左手介质矩形波导表面模场分布时, 对称平板波导和不对称平板波导的表面模存在着极大的差异^[7], 取不同的折射率 n_2, n_3, n_4, n_5 , 将矩形波导等效成两个不对称平板波导, 并在 Marcatili 方法的基础上, 类比进行左手介质矩形波导表面模的分

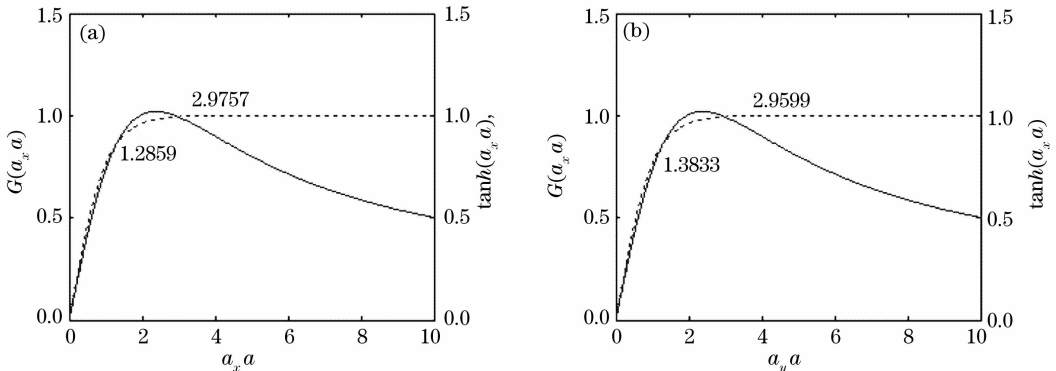


图 5 左手介质矩形波导表面模 $a_x a$ 、 $a_y b$ 的值

Fig. 5 Value of $a_x a$ and $a_y b$ on surface guided modes in rectangular waveguides with LHMs

析和场分布的数值模拟。

对(6)式和(8)式进行数值模拟,结果如图 5 所示。图中虚线与实线的交点为(6)式和(8)式的公共解,表示表面模的存在。由图 5 中交点得出 $\alpha_x a$ 、 $\alpha_y b$

的值,代入(7)式后,得到各区域衰减系数 α_2 、 α_3 、 α_4 、 α_5 的值,并可得到左手介质矩形波导表面模的场分布如图 6 所示。

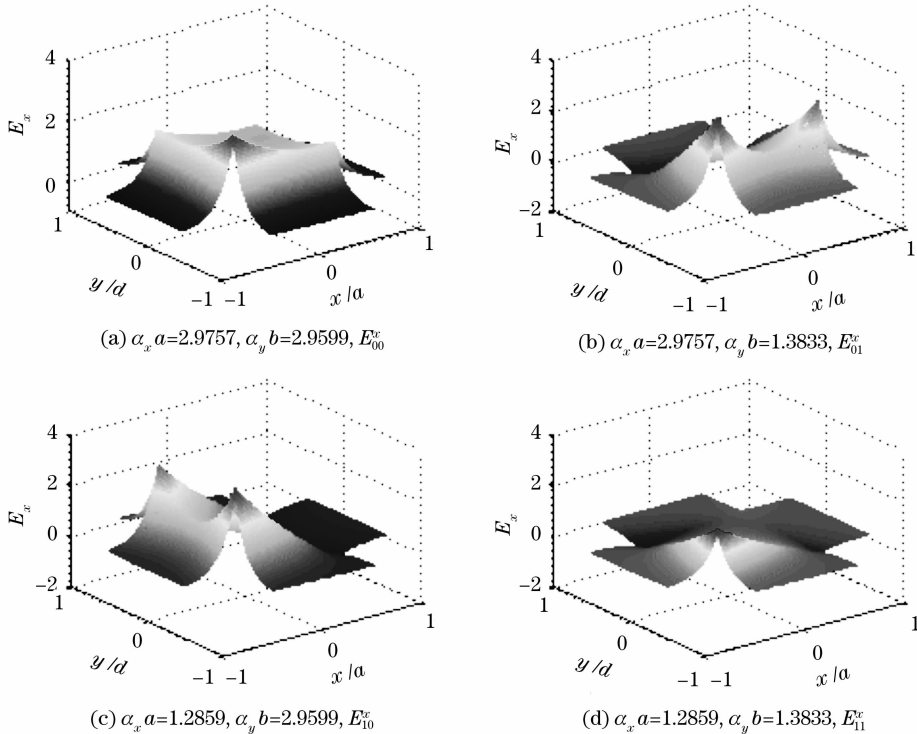


图 6 左手介质矩形波导表面模 E_x 的场分布

Fig. 6 Field distribution E_x for the surface guided modes in rectangular waveguides with LHMs

在图 6(a)中,无论场分布曲面沿 x 轴还是沿 y 轴投影后, E_x 场分布在其芯子区内不存在节点,所以,我们称此表面模为 E_{00}^x 模。而在图 6(b)中,场分布沿 x 轴投影后, E_x 场分布在其芯子区内存在一个节点,而沿 y 轴投影后, E_x 场分布在其芯子区内不存在节点,所以,我们称此表面模为 E_{01}^x 模。同理,定义图 6(c)中表面模为 E_{10}^x 模,图 6(d)中的定义为 E_{11}^x 模。

通过图 6(a)清楚地看到,边界上的电场强度比内部的要强,四个角上的 E_x 为最强,电磁波在沿 z 轴方向传播时,能量主要集中在波导的四个角及其边缘上。这一特点,与矩形波导导模有着明显的差别。

4 结 论

从 Maxwell 方程组出发,结合边界条件,推导出矩形波导导模的一般色散方程,并对普通介质矩形波导和左手介质矩形波导的导模 E_{mn}^x 模式的 E_x 场分布进行数值模拟和分析,发现左手介质矩形波导的场分布比普通介质波导的场分布集中,表明波

沿左手介质矩形波导传播时,进入包层传播的功率较少。同时,在 Marcatili 方法的基础上,通过类比,进行了矩形波导表面模的推导和场分布的数值模拟。我们发现,电磁波在沿 z 轴方向传播时,能量主要集中在波导的四个角及其边缘上。这一特点,与矩形波导导模有着明显的区别。以上这些特性,可以应用于集成光学器件如波分复用器、耦合器和功分器等,简化传统器件的复杂结构,对实现器件集成化、小型化有着潜在的应用价值。

参 考 文 献

- 1 Veselago V G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ [J]. *Sov. Phys. Usp.*, 1968, **10**(4): 509~514
- 2 Pendry J B, Holden A J, Robbins D J *et al.*. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena [J]. *IEEE Trans. Microwave Theory Technol.*, 1999, **47**(11): 2075~2084
- 3 Ilya V. Shadrivov, Andrey A. Sukhorukov, Yuri S. Kivshar. Guided modes in negative-refractive-index waveguides[J]. *Phys. Rev. E*, 2003, **67**: 057602-1~057602-4
- 4 Wang Zijun, Dong Jianfeng. Analysis of guided modes in asymmetric left-handed slab waveguides [C]. *Progress in Electromagnetics Research*, 2006, **PIER 62**: 203~215

- 王子君,董建峰. 异向介质非对称平板波导特性分析[C]. 全国微波毫米波会议文集, 2006, **PIER 62**: 203~215
- 5 Yang Ligong, Huang Biqing, Ye Hui *et al.*. Analysis of phase and transfer properties of optical waves in negative refractive index medium layers[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(3): 388~392
- 杨立功,黄弼勤,叶 辉 等. 负折射率介质层中光波的相位和传输特性研究[J]. *光学学报*, 2004, **24**(3): 388~392
- 6 Bae-lan Wu, Tomasz. M. Grzegorzcyk, Yan Zhang *et al.*. Guided modes with imaginary transverse wave number in a slab waveguide with negative permittivity and permeability[J]. *J. Appl. Phys.*, 2003, **93**(11): 9386~9388
- 7 Ying He, Zhuangqi Cao, Qishun Shen. Guided optical modes in asymmetric left-handed waveguides[J]. *Opt. Commun.*, 2005, **245**(1~6): 125~135
- 8 Chen Liang, Liang Changhong, Dang Xiaojie. Surface waves on single negative slab waveguide [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2007, **19**(5): 849~853
- 陈 亮,梁昌洪,党晓杰. 单负介质薄板波导中的表面波模式 [J]. *强激光与粒子束*, 2007, **19**(5): 849~853
- 9 Zhou Haifeng, Yang Jianyi, Wang Minghua *et al.*. Propagation characteristic analysis and applications of spatial four-waveguide system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(12): 1772~1776
- 周海峰,杨建义,王明华 等. 空间四波导的传输特性分析与应用 [J]. *光学学报*, 2006, **26**(12): 1772~1776
- 10 Zhang Yali, Zhang Tao, Zhu Ninghua *et al.*. Variational analysis of buried ion-exchanged optical waveguide by using Hermite-Gaussian field approximations [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(6): 981~986
- 张雅丽,张 韬,祝宁华 等. 掩埋型离子交换玻璃光波导的变分分析[J]. *光学学报*, 2007, **27**(6): 981~986
- 11 Marcatili E A J. Dielectric rectangular waveguide and directional coupler for integrated optics [J]. *Bell System Technology J.*, 1969, **48**: 2071~2102
- 12 Li Yuquan, Cui Ming. *Theory and Technology of Optical Waveguide* [M]. Beijing: Posts and Telecommunications Press, 2002
- 李玉权,崔 敏. *光波导理论与技术* [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2002
- 13 Cao Zhuangqi. *Wave Guiding Optics* [M]. Beijing: Science Press, 2007
- 曹庄琪. *导波光学* [M]. 北京: 科学出版社, 2007