

# 对光学设计中照度计算公式的讨论

屈恩世<sup>1</sup> 张恒金<sup>1</sup> 曹剑中<sup>1</sup> 杨 正<sup>1,2</sup>

(<sup>1</sup> 中国科学院西安光学精密机械研究所, 陕西 西安 710068; <sup>2</sup> 中国科学院研究生院, 北京 100039)

**摘要** 分析并指出了教科书及光学软件中光学系统照度公式的不恰当地方, 推导出了更符合实际的光学系统照度公式。假设透镜系统为无源传输模式, 通过对教科书中以及光学设计软件中的照度分布计算公式进行了推导分析, 得出轴外视场相对轴上视场照度为  $\cos^4 \omega'$  关系。当像方视场角减小时, 通过模拟得到了与实际相背的无源传输系统能量放大的结论。建立了以入瞳模式为参考的计算模型, 对照度公式重新进行推算得到新的与实际相符的照度公式, 得出像面照度分布取决于物方视场角。通过仿真模拟, 验证了像面上轴外视场的照度与对应物方视场角的  $\cos^4 \omega$  成正比。

**关键词** 光学设计; 相对照度; 入瞳; 出瞳

**中图分类号** O435 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20082807.1364

## Discussion of Illuminance Formula in Optical Design

Qu Enshi<sup>1</sup> Zhang Hengjin<sup>1</sup> Cao Jianzhong<sup>1</sup> Yang Zheng<sup>1,2</sup>

(<sup>1</sup> Xian Institute of Optics and Precision Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Xian, Shaanxi 710068, China)  
(<sup>2</sup> Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

**Abstract** Some improper points of system illuminance formula in the optics textbook and optical software have been found and analyzed, and more practical formula have been deduced. On the assumption that an optical lens is a passive transfer system, after analysis of the original formula the relationship of the off-axial field of view with the relative illuminance is  $\cos^4 \omega$ . When the field angle in image space becomes smaller, the energy will be enlarged, which is impractical in a passive transfer system. Then, by taking entrance pupil as reference, we recalculate the illuminance formula and obtain a reasonable one. Software simulation validates the new function. And the illuminance of image plane off-axial fields is proportional to the  $\cos^4 \omega$  of the objective field angle.

**Key words** optic design; relative illuminance; entrance pupil; exit pupil

## 1 引 言

相对照度是指像平面不同坐标点的照度和中心点照度之比。在一个成像系统中, 如果相对照度较小, 像平面的照度则很不均匀, 容易产生某些位置曝光不足或中心过曝光的问题, 影响光学仪器的成像质量, 因此在光学设计的过程中, 需要对像平面的照度进行分析计算。目前, 在国内光学教科书中和国外通用的光学设计软件(例如 Codev 和 Zemax)中, 相对照度仍用像方视场角四次方余弦的计算公式, 为了提高像平面的照度均匀性, 像方视场角越大, 相对照度越小。存在利用压缩像方视场角提高像面照度均匀性的设计方法<sup>[1~7]</sup>。如果控制光路设计为像方远心, 此时像方视场角为  $0^\circ$ , 则像平面的相对照度为 1, 整个像面的照度是非常均匀的。然而这个

结论值得怀疑, 首先它表明在任何情况下, 照度均匀的设计在理论上是可以实现的, 按照照相机国家标准要求<sup>[5]</sup>, 边缘的相对照度大于 20%, 这个要求显得太低; 其次, 现有的照度公式是基于出瞳模式计算的, 假设的前提是出瞳面的照度分布是均匀的, 这种假设是没有依据的。参考国外发表的部分论文, 照度按照物方视场角的模式计算<sup>[8~10]</sup>, 计算模型溯源于 1945 年 Max Reuss 发表的论文<sup>[9]</sup>, 文中提到朗伯光源上的微小平面对接收器的照度按照角度余弦四次方的关系变化, 成像系统的照度与物方视场角有关, 而后对于 Max Reuss 的余弦法则存在两种看法, 一种将光学系统的出瞳当作朗伯光源, 光学系统的出瞳照射像平面形成不同的照度, 另外一种是将光学系统入瞳当作接收器, 对于不同视场的朗伯光

源接收不同的照度。相比较,前一种看法直接将光学系统出瞳当作朗伯体光源,实际上在光学系统的出瞳位置,光束根据设计具有很大的方向性,不能当作朗伯光源。为此,本文进行了详细的验证。

## 2 现有照度计算公式计算方法和过程的描述

### 2.1 轴上的照度公式

现存光学照度公式的推导基于图 1 的计算模型<sup>[10,11]</sup>,在图 1 中, $ds$ 、 $ds'$  分别代表轴上点附近的物和像的微小面积,物方和像方孔径角分别为  $U$  和  $U'$ ,物面和像面亮度分别为  $L$  和  $L'$ ,物体为朗伯面

辐射源,物方  $ds$  在  $U$  立体角范围内发出的光通量  $\Phi$  为

$$\Phi = \pi L ds \sin^2 U, \quad (1)$$

从出瞳入射到像面  $ds'$  微面积上的光通量  $\Phi'$  为

$$\Phi' = \pi L' ds' \sin^2 U', \quad (2)$$

像面照度  $E'$  为

$$E' = \frac{\Phi'}{ds'} = \pi L' \sin^2 U', \quad (3)$$

当物空间和像空间介质一致时,像面亮度  $L'$  等于物面亮度  $L$  与系统透射率  $\tau_0$  的乘积,即  $L' = L\tau_0$ ,则(3)式为

$$E' = \pi L\tau_0 \sin^2 U'. \quad (4)$$

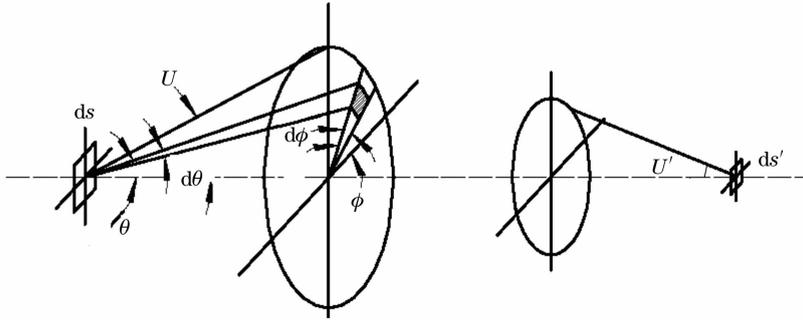


图 1 轴上照度计算模型

Fig. 1 Calculation model of axial illuminance

### 2.2 轴外的照度公式

图 2 中轴外像点和光轴的夹角为  $\omega'$ ,假设物面的亮度是均匀的,并且轴上点和轴外点所对应的光束截面积相等,即不存在斜光束渐晕,像平面上每一点对应的光束都充满整个出射瞳孔,光学系统的出射瞳孔是一个发光面,照亮像平面的每一点。出射瞳孔射向像平面上不同像点的光束,是由物平面上不同的对应点发出的,如果物平面的亮度是均匀的,则出射瞳孔射向不同方向的光束亮度也是相同的。假定出

射瞳孔的直径和出射瞳孔离开像平面的距离相比较不大,即光束孔径角较小,则像平面照度近似为

$$E' = I \cos \omega' / l'^2, \quad (5)$$

(5) 式中, $I$  为轴外视场的发光强度, $l'$  为发光点到像面接收器的直线距离。

由于  $I = I_0 \cos \omega'$ ,  $l' = l'_0 / \cos \omega'$ ,  $I_0$  中心视场的发光强度,则

$$E' = I_0 \cos^4 \omega' / l'_0{}^2. \quad (6)$$

当  $\omega' = 0$  时,  $E' = E'_0 = I_0 / l'_0{}^2$ ,  $E'_0$  为像平面中心点照度,比较(6)式可得轴外照度公式为

$$E' = E'_0 \cos^4 \omega'. \quad (7)$$

## 3 照度的计算结果和问题的提出

在光学设计中<sup>[12,13]</sup>,如果控制像方远心,使得  $\omega' = 0$ ,则  $E' = E'_0$ ,因此,假设有这样的一种系统,光阑前置,光阑后为理想透镜,即不存在任何像差,以此排除光阑像差的影响从而只从像方视场角考虑最后的结果。

图 3 为三种情况下的成像光路图,图中给出了 3 个视场分别为  $0^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,理想透镜的焦距为 100 mm,入瞳口径为 50 mm。图 3(a)中的光阑和

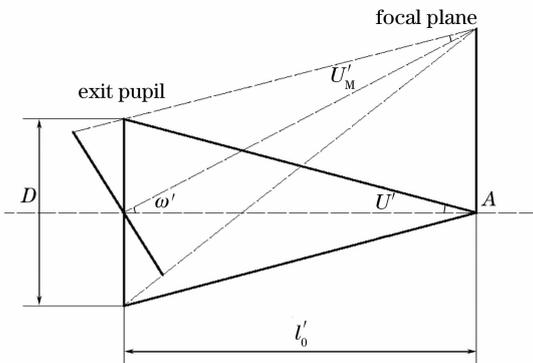


图 2 轴外照度计算模型

Fig. 2 Calculation model of off-axial illuminance

理想透镜重合,此时的像方视场角等于物方视场角,图 3(b)中光阑和理想透镜分开一定的距离,像方视场角减小,图 3(c)中像方远心,孔径光阑位于物方焦平面上,像方视场角为  $0^\circ$ 。上述过程可看作光阑

位置固定,理想透镜自左向右移动,按照以前的照度公式,此时像平面的照度可以得到一定程度的改善,最后整个像平面的照度保持一致。表 1 为图 3 中不同形式的相对照度。

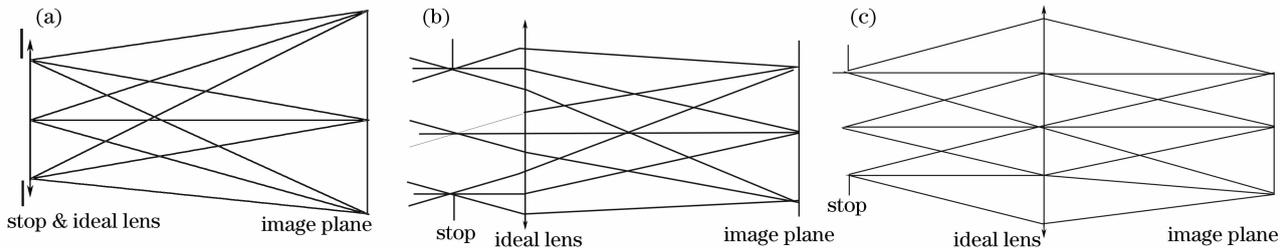


图 3 照度计算的 3 种简化光路图。(a) 光阑与理想透镜重合,(b) 光阑与理想透镜分开,(c) 光阑在物方焦平面上  
Fig. 3 Three simplified lens system to calculate illuminance. (a) Superposing stop and ideal lens, (b) separating stop from ideal lens, (c) stop at object focal plane

表 1 图 3 中不同形式的相对照度

Table 1 Relative illuminance in different cases according with Fig. 3

Stop position /mm	0			-20			-100		
Field /( $^\circ$ )	0	10	20	0	10	20	0	10	20
Relative illuminance	0	0.946	0.797	0	0.965	0.863	1	1	1

假设物体在无穷远,理想透镜在移动过程中,像方孔径角不变,根据(7)式可知,中心视场的像面照度不变。然而,当理想透镜移动时,像面其他位置的照度得到提高。另外,由于系统为理想系统,在移动过程中,每一个像点在像平面的位置相对于以前都没有变化。

由于光阑前置,光学系统的光能均是通过光阑进入系统的,光阑位置固定,物平面相对于光阑的位置固定,每一个物点传递给光学系统的能量是固定的,通过理想系统,每一个像点接收的能量也是固定的,然而通过以前的结论,移动理想透镜,光学系统总的光能量得到加强。透镜系统为一个无源变换系统,入瞳对光能量的接收为输入系统,像平面的能量

来自出瞳,在输入系统不变的情况下,无源变换的输出系统的能量却得到放大,由此可得这种结论是不正确的。

#### 4 对问题的进一步研究和照度公式推导

分析上述的结论,主要问题在于现有的计算是按照出瞳模式计算,其假设条件是不成立的,在入瞳位置,光学系统对各个物点光能量的接收是不一致的,在出瞳位置,因为各视场的光束带有明显的方向性,所以也不能按照朗伯体进行计算。正确的计算应该基于这样的数理过程:物平面上的一个微小区域照射入瞳面,光学系统接收物面小区域的能量,这些能量在没有拦截,即系统没有渐晕的情况下,全部

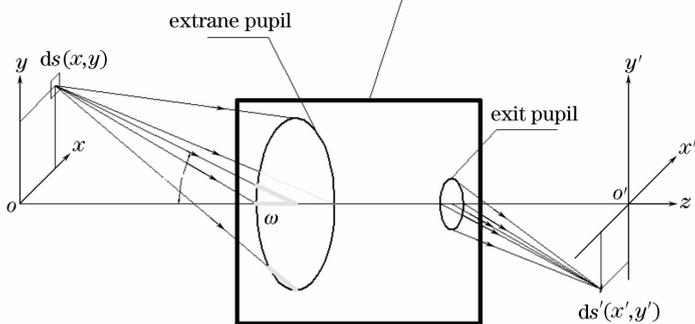


图 4 入瞳模式计算模型图

Fig. 4 Calculation model of entrance pupil illuminance

传导到像面的微小区域上,玻璃表面的微小反射和材料对能量的损失可以乘以光学系统的透射率,像面微小区域接收的光能量即为此处的相对照度。因此可以将这种方法称为基于入瞳模式的计算过程。

如图 4,物平面  $oxy$  有一微小面元  $ds$ ,经过光学系统成像在  $o'x'y'$  像平面上,成像面元为  $ds'$ 。光学系统的入瞳接收面元  $ds$  出射的部分光通量,这些光通量被分配在像平面  $ds'$  面元上,据此计算入瞳接收面元  $ds$  的光通量。

设入瞳面至物面的距离为  $R$ ,面元至入瞳中心的夹角为  $\omega$  整个物平面为朗伯体,发光亮度为  $L$ ,光学系统的透射率为  $\tau_0$ ,则  $ds$  在  $\omega$  方向上的强度为

$$I = Lds\cos\omega, \quad (8)$$

面元  $ds$  至入瞳中心的距离为  $R/\cos\omega$ 。

设入瞳直径为  $d$ ,则入瞳面对应面元  $ds$  的空间角为

$$\Omega = \frac{\pi d^2 \cos\omega}{4(R/\cos\omega)^2} = \frac{\pi d^2 \cos^3\omega}{4R^2}, \quad (9)$$

入瞳面接收的光通量为

$$\Phi = I\Omega = \pi d^2 Lds\cos^4\omega/(4R^2), \quad (10)$$

像平面的照度为

$$E = \frac{\Phi'}{ds'} = \frac{\pi d^2 L\tau_0 ds\cos^4\omega}{4R^2 ds'} = \frac{\pi d^2 L\tau_0 \cos^4\omega}{4R^2 \beta^2}, \quad (11)$$

式中  $\beta$  为光学系统的放大率。不同视场像平面的相对照度设为  $E_R$ ,根据(11)式可得

$$E_R = \cos^4\omega. \quad (12)$$

当光学系统为无穷远共轭时, $\beta = f/R$ , $f$  为光学系统的焦距,代入(11)式,得

$$E = \pi L\tau_0 \cos^4\omega/(4F^2), \quad (13)$$

式中  $F$  为光学系统相对孔径的倒数。

由(11)式~(13)式可总结出,像平面的相对照度只取决于物方视场角,在有限共轭的系统中,可以采用入瞳面远离物面的设计提高相对照度,对于无穷远共轭的系统,物方视场一般在设计时给定一个固定值,因此相对照度也基本上是固定的。

## 5 仿真模拟及其结果

为了说明(13)式的正确性,需要通过仿真模拟进行验证。仿真模拟基于如下的数理过程:物体是一个均匀的朗伯体,物体的大小覆盖成像系统的设计视场,通过光学系统后,成像在焦平面上,为了避免光学像差对成像照度的影响,光学系统选用理想成像系统,物体至光学系统的距离大于 50 倍光学系统的焦距。

系统 A 的像面照射光路图如图 5 所示,光路参量如为:相对孔径  $D/f' = 1/5$  辐射亮度  $1 \text{ W}/(\text{sr} \cdot \text{m})$ ,物方角视场  $\pm 30^\circ$ ,探测器尺寸  $82 \text{ mm} \times 82 \text{ mm}$ 。表 2 为模型 A 设计的参量。

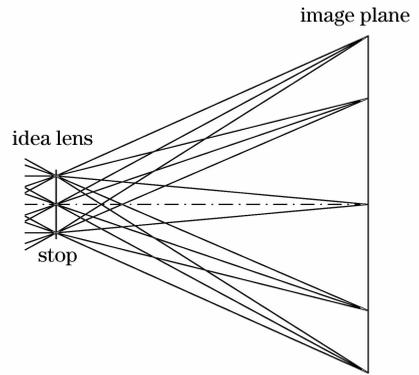


图 5 系统 A 像面照射光路图

Fig. 5 Ray trace from exit pupil of system A

模型 A 的照度计算结果如图 6 所示,可见中心照度为  $0.01 \text{ lx}$ ,边缘照度为  $0.00565 \text{ lx}$ ,由此计算最小相对照度为  $56.5\%$ 。

表 2 模型 A 的设计参量

Table 2 Design parameters of model A

Surface	Radius	Thickness /mm
Object	Infinity	5100
Stop	Infinity	0
Perfect lens	Infinity	100
Image	Infinity	

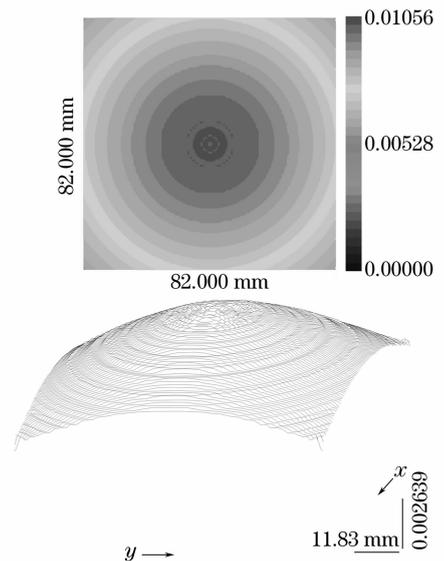


图 6 模型 A 照度计算结果。(a) 像面照度分布色表图, (b) 像面照度分布等线图

Fig. 6 Illuminance calculated with model A. (a) Distribution of image plane illuminance of chromatic table, (b) contour distribution of image plane illuminance

系统 B 的像面照射光路图如图 7 所示, 光路参量为: 相对孔径  $D/f' = 1/5$  辐射亮度  $1 \text{ W}/(\text{sr} \cdot \text{m})$ , 物方角视场  $\pm 30^\circ$ , 探测器尺寸  $82 \text{ mm} \times 82 \text{ mm}$ 。表 3 为模型 B 设计的设计参量。

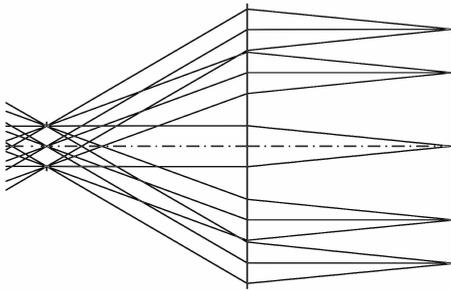


图 7 系统 B 像面照射光路图

Fig. 7 Illuminance distribution of image plane of system B

模型 B 的照度如图 8 所示, 可见中心照度为  $0.0114 \text{ lx}$ , 边缘照度为  $0.00607 \text{ lx}$ , 最小相对照度为  $53.2\%$ 。利用(13)式计算得中心照度  $E_0 = 0.01 \text{ lx}$ , 边缘照度  $E_S = 0.005625 \text{ lx}$ , 与模拟结果数据基本相符。

表 3 模型 B 的设计参量

Table 3 Design parameters of model B

Surface	Radius	Thickness /mm
Object	infinity	5000
Stop	Infinity	100
Perfect lens	Infinity	100
Image	Infinity	

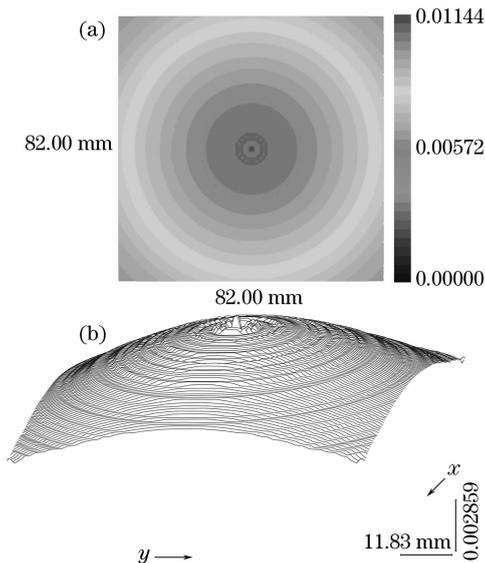


图 8 模型 B 照度计算结果。(a) 像面照度分布色表图,

(b) 像面照度分布等高线图

Fig. 8 Illuminance calculated with model B. (a) Distribution

of image plane illuminance of chromatic table,

(b) contour distribution of image plane illuminance

## 6 结 论

通过数学分析和模拟验证可以得出, 像面照度分布取决于物方视场角而非像方视场角, 提高像面照度应该采用物方远心而非像方远心, 对于无穷远-有限共轭的系统, 物方远心根本无法做到, 因此对于类似系统, 像面照度基本随设计视场的增大呈  $\cos^4 \omega$  规律下降。

## 参 考 文 献

- Shen Weimin, Xue Mingqiu, Yu Jianjun. Long wave infrared fast objective with wide field of view[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(4): 460~462
- 沈为民, 薛鸣球, 余建军. 大视场大相对孔径长波红外物镜[J]. *光子学报*, 2004, **33**(4): 460~462
- Wang Yongzhong. Some key problems about the design of IR thermal imaging fish-eye lens[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(7): 1078~1080
- 王永仲. 红外热成像鱼镜头设计中若干特殊问题的处理[J]. *光子学报*, 2005, **34**(7): 1078~1080
- Zhen Zhenrong. The analysis of relative illumination for projection lens based on étendue[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(1): 55~58
- 郑臻荣. 基于 étendue 量的液晶投影物镜相对照度分析[J]. *光子学报*, 2005, **34**(1): 55~58
- M. Rimner. Relative illumination[C]. *Proc. SPIE*, 1996, **665**: 99~104
- Yu Ruqing. GB10047-88, China Camera Standard. Hangzhou institute of Camera research
- 俞儒庆. GB10047-88, 中华人民共和国照相机国家标准. 杭州照相机研究所
- Mark Shechterman. Analysis of illumination distribution in the plane of a thermal imager[C]. *Proc. SPIE*, 1997, **3061**: 662~672
- Günter Zöchling. Design and analysis of illumination system[C]. *Proc. SPIE*, 1990, **1354**: 617~626
- Zoechling. Illumination system analysis—a proposal for computing the local illuminance[C]. *Proc. SPIE*, 1986. 655~656
- Max Reuss. The  $\cos^4$  law illumination[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1945, **35**(4): 283~288
- Shi Er, Jing Gong. *Applied Optics* [M]. Beijing: Press of National Defence Industry, 1973. 323~327
- 史尔, 荆工. *应用光学* [M]. 北京: 国防工业出版社, 1973. 323~327
- Yu Daoying, Tan Hengying. *Engineering Optics* [M]. Beijing: Press of Mechanical Industry, 2005. 70~78
- 郁道银, 谈恒英. *工程光学* [M]. 北京: 机械工业出版社, 2005. 70~78
- Zhao Xing, Fang Zhiliang, Cui Jicheng *et al.*. Study on the optical engine of the mini-projector[J]. *Acta Opica Sinica*, 2007, **27**(5): 913~918
- 赵星, 方志良, 崔继承等. 微型投影机光学引擎的研究[J]. *光学学报*, 2007, **27**(5): 913~918
- Zheng Jianzhou, Yu Qingxu, Lu Yongjun *et al.*. Improved lens arrays optical system with controllable focus width for uniform irradiation[J]. *Chin. J. Lasers*, 2007, **34**(3): 331~336
- 郑建洲, 于清旭, 卢永军等. 焦斑可调的透镜阵列均匀辐照光学系统[J]. *中国激光*, 2007, **34**(3): 331~336