

基于矩阵理论的螺旋液晶透射光偏振态研究

谢嘉宁¹ 冯仕猛² 陈 婷²

(¹ 佛山科学技术学院光电子与物理学系, 广东 佛山 528000; ² 上海交通大学物理系, 上海 200240)

摘要 将螺旋型液晶看作是 N 层双折射材料晶片叠合而成, 而每层光轴相对于相邻的晶片有一个小的旋转。本文基于矩阵理论, 研究了光在螺旋液晶中传输时偏振态的变化。经过详细的数学推导, 理论研究表明, 线性偏振光经过螺旋液晶后偏振态会发生改变。当满足一定的条件时, 线偏振光的偏振方向旋转 90° , 左旋圆偏振光经过左螺旋液晶后转变为右旋圆偏振光。

关键词 螺旋液晶; 矩阵; 偏振态; 透射光

中图分类号 O436.3 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20082807.1343

Polarization State Research of Transmitted Light on Cholesteric Liquid Crystal Based on Matrix Theory

Xie Jianing¹ Feng Shimeng² Chen Ting²

(¹ Department of Photoelectron and Physics, Foshan University, Foshan, Guangdong, 528000, China)
(² Department of Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract The cholesteric liquid crystal can be regarded as a multilayer structure consisting of many uniaxial thin films which exhibit optical rotation. A new method is proposed to study the polarization states of the transmitted light through a cholesteric liquid crystal. It is found that the cholesteric liquid crystal can completely change the polarization state of the transmitted light. The direction of linear polarization can be turned by 90° , and the left circularly polarized light can be translated into right one, when it passes through the cholesteric liquid crystal.

Key word cholesteric liquid crystal; matrix; polarization state; transmitted light

1 引 言

液晶是介于完全规则的晶体和各向同性的液体之间的一种中间态物质, 光学上类似单轴晶体, 一般情况下光轴与分子的长轴方向一致。螺旋液晶结构与其它液晶结构不同, 其结构相当于许多单晶片组成, 单个晶片内分子长轴的指向一致, 两相邻晶片分子的指向矢稍有不同, 相邻晶片的光轴依次旋转一个小角度。螺旋液晶也可以看成是一维自组装的光子晶体, 其独特的性能引起了科学工作者广泛的兴趣, 成为光子晶体研究领域的一个热点^[1,2]。

与半导体存在禁带宽度一样, 螺旋液晶对光子也存在一个禁带宽度, 波长在这个范围内的光是无法进行传播的。螺旋液晶对圆偏振光选择性反射, 能够使透过的光产生色彩, 利用这一性能可以用它来制备显示器件。利用螺旋液晶的光学特性生产的

显示器件是目前正在研究发展一种新型显示器件^[3,4]。螺旋液晶的螺距与温度及所含杂质浓度有密切关系, 利用该性质可进行温度测量、无损探伤、环境监测, 也可作为医学诊断的辅助手段。

关于螺旋液晶透射光的偏振态问题, 目前报道文献不多。文献^[5~11]大多采用琼斯矩阵或者拓展的琼斯矩阵来分析讨论扭曲型向列液晶的光学性能^[12], 但这些研究都没有涉及到光的偏振态问题; 以麦克斯韦(Maxwell)方程为依据, 利用单轴介质的介电常数张量, 给出电磁波电场矢量 E 的本征值方程, 但这样的求解过程非常复杂^[13], 限制了对螺旋液晶光学性能的进一步研究。本文主要研究螺旋液晶透射光偏振态的理论处理新方法, 给出了相关的数学处理过程, 进一步揭示了螺旋型液晶的光学性能。

2 理论推导

螺旋型液晶可以被当作 N 层双折射材料,即被视为 N 层晶片的叠合而成。每层的光轴相对于相邻的晶片有一个小的旋转。通常情况下 N 是非常大的,在每一层晶片内其光轴方向可以看成是一个常矢量,如图 1 所示。图 1 中 x_1 为第一层液晶体层棒长的方向,即折射率大的方向, y_1 为第一层液晶层棒短的方向,也就是折射率小的方向。 x_2 为第二层液晶体层棒长的方向,也就是折射率大的方向, y_2 为第二层液晶层棒短的方向,也就是折射率小的方向。光的传播方向垂直于 x_1y_1 组成的平面,方向向里。

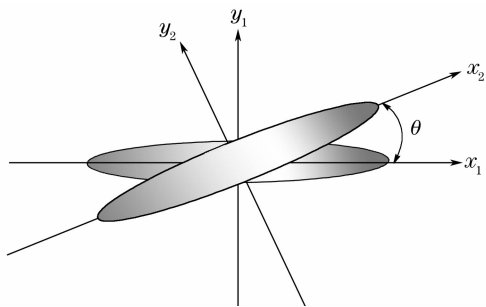


图 1 螺旋液晶的结构简图

Fig. 1 Structure model of the cholesteric liquid crystal

设一光束进入液晶,其电场可分解为两个分量:与第一层液晶片长轴方向平行的电场 E_{1x} 和短轴方向平行的电场分量 E_{1y} ,分别为

$$\begin{cases} E_{1x} = E_x \exp\left(i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right), \\ E_{1y} = E_y \exp\left(i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right), \end{cases} \quad (1)$$

式中 d 为单层液晶片厚度, $\exp\left(-i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right)$ 、 $\exp\left(-i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right)$ 分别表示光经过第一层液晶片后长轴、短轴方向的电场分量产生的相位因子, n_1 为液晶层棒长方向的折射率, n_s 为液晶层棒短方向的折射率。

因为第一层和第二层长轴方向的折射率相同,光不存在反射;而短轴方向的电场分量 $E_{1y} \sin \alpha$ 在进入第二层后,因为存在折射率变化,在第一层与第二层液晶片界面上会产生反射。

对于螺旋液晶来说,比如胆甾相液晶,指向矢在一个螺距内有几百到上千圈,螺距的典型值约为 600 nm。取一个螺距内层数为 500,那么 $\theta = 360/500 = 0.72^\circ$,所以 $E_0 \sin \theta$ 也就非常小,其二是螺旋液晶内相邻晶面之间的反射系数非常小,这两个因素导致总的反射光电场很小。因此在计算相邻两层液晶片界面反射系数时可以不考虑其他界面上产生的反射光电场对该界面反射系数的影响,根据 Maxwell 边界条件,在第一层和第二层液晶片边界两边光电场满足

$$\begin{cases} E_{2x} = \left[E_{1x} \exp\left(i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right) \cos \theta + (1 - r_{12y}) E_{1y} \exp\left(i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) \sin \theta \right], \\ E_{2y} = \left[E_{1y} \exp\left(i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) \cos \theta - (1 - r_{12x}) E_{1x} \exp\left(i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right) \sin \theta \right], \end{cases} \quad (2)$$

式中 r 是第一层液晶片和第二层液晶片之间的反射系数, $\exp\left(-i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right)$ 表示光经过第一层液晶片后产生的相位因子, E_{2x} 、 E_{2y} 分别表示在第二层液晶片中长、短轴方向的电场,(2) 式可以用矩阵来表达:

$$\begin{bmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp\left(-i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right) \cos \theta & \exp\left(-i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) (1 - r_{12y}) \sin \theta \\ -\exp\left(-i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right) (1 - r_{12x}) \sin \theta & \exp\left(-i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

光波经过第二层液晶片后,在第二层与第三层液晶片之间的界面上同样产生反射,同理,第三层液晶片内的透射光电场与反射光电场相比,反射光电场非常小,可以不用考虑。透过第二层液晶片后的电场

$$\begin{cases} E_{3x} = E_{2x} \exp\left(-i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right) \cos \theta + (1 - r_{23y}) E_{2y} \exp\left(-i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) \sin \theta, \\ E_{3y} = E_{2y} \exp\left(-i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) \cos \theta - (1 - r_{23x}) E_{2x} \exp\left(-i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right) \sin \theta, \end{cases} \quad (4)$$

式中 E_{3x} 和 E_{3y} 分别表示在第三层液晶片中长轴和短轴方向的电场, r_{23} 是第二层液晶片和第三层液晶片之间的反射系数。根据电场边界条件,螺旋液晶体内不同界面之间的反射系数不同,即 $r_{12} \neq r_{23}$ 。(4) 式可以表达为

$$\begin{bmatrix} E_{3x} \\ E_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp\left(i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right) \cos \theta & \exp\left(i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) (1 - r_{23x}) \sin \theta \\ -\exp\left(i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right) (1 - r_{23y}) \sin \theta & \exp\left(i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

同理,通过 $N-1$ 层液晶片后,在第 N 层液晶片内电场为

$$\begin{bmatrix} E_{Nx} \\ E_{Ny} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp\left(i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right) \cos \theta & \exp\left(i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) (1 - r_{n-1,ny}) \sin \theta \\ -\exp\left(i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right) (1 - r_{n-1,nx}) \sin \theta & \exp\left(i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{(n-1)x} \\ E_{(n-1)y} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

则经过 N 层晶体片后累积电场为

$$\begin{bmatrix} E_{Nx} \\ E_{Ny} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^N \begin{bmatrix} \exp\left(i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right) \cos \theta_{ij} & \exp\left(i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) (1 - r_{i,jx}) \sin \theta_{ij} \\ \exp\left(i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right) (1 - r_{i,jx}) \sin \theta_{ij} & \exp\left(i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) \cos \theta_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

在螺旋液晶中,因为 θ_{ij} 是一个常量,(7)式可以等效为

$$\begin{bmatrix} E_{Nx} \\ E_{Ny} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^N \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r_{ij} \sin \theta \\ +r_{ij} \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \exp\left(-i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

因为每一层液晶片的厚度非常小,而且长短轴之间折射率相差不大,因此有 $\exp\left(i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) \approx \exp\left(i \frac{2\pi n_1 d}{\lambda}\right)$,

把上式进一步简化得

$$\begin{bmatrix} E_{Nx} \\ E_{Ny} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^N \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r_{ij} \sin \theta \\ +r_{ij} \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \exp\left(-i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) \begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

因为每层晶片边界上的反射系数非常小^[6],不考虑二次以上高阶次幂的影响,利用 $\prod_{i=1}^N (a + x_i) \approx a^N +$

$a \sum_{i=1}^N x_i$ 得到

$$\prod_{i=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r_{ij} \sin \theta \\ r_{ij} \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \right\} \approx \begin{bmatrix} \cos N\theta & \sin N\theta \\ -\sin N\theta & \cos N\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} 0 & -r_{ij} \sin \theta \\ r_{ij} \sin \theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

把(10)式代入(9)式得

$$\begin{bmatrix} E_{Nx} \\ E_{Ny} \end{bmatrix} \approx \left\{ \begin{bmatrix} \cos N\theta & \sin N\theta \\ -\sin N\theta & \cos N\theta \end{bmatrix} + \sin \theta \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} r_{ij} \sin \theta & -r_{ij} \cos \theta \\ r_{ij} \cos \theta & r_{ij} \sin \theta \end{bmatrix} \right\} \exp\left(-i \frac{2\pi n_s d}{\lambda}\right) \begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

理论上通过(11)式可以计算各种不同的入射光经过螺旋液晶后的偏振态。

3 讨 论

螺旋液晶螺距为光波长的整数倍时,通过(11)式得到的透射光偏振态和文献[14]方法得到的结果相同。假设 $N\theta = (2k+1)(\pi/2)$,即整个螺旋液晶旋转角度为 $\pi/2$ 的奇数倍。将这个参量代入(11)式,得到

$$\begin{bmatrix} E_{Nx} \\ E_{Ny} \end{bmatrix} \approx \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \theta \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} 0 & -r_{ij} \\ r_{ij} & 0 \end{bmatrix} \right\} \exp(-i\beta) \begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中 $\beta = 2\pi d N n_1 / \lambda$ 。

1) 考虑到相邻界面反射系数非常小, 如果入射光为 45° 线偏振光, 即有 $E_{1x} = E_{1y} = E$, 代入(12)式得到

$$\begin{bmatrix} E_{nr} \\ E_{ny} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \exp(-i\beta)E. \quad (13)$$

从(13)式可以看出, 45° 线偏振光经过螺旋液晶后仍然为 45° 线偏振光。

2) 在每一层界面反射系数非常小的条件下, 对于线偏振光

$$\begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_{nr} \\ E_{ny} \end{bmatrix} \approx E \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \exp(-i\theta), \quad (14)$$

经过螺旋液晶后仍然是线偏振光, 但偏振方向旋转了 90° 。

3) 如果入射光是左旋圆偏振光, 在反射系数非常小的条件下有

$$\begin{bmatrix} E_{nr} \\ E_{ny} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \exp(-i\theta)E. \quad (15)$$

上式表明, 左旋偏振光经过左旋液晶透射出的偏振光仍然是圆偏振光, 但光偏振态从左旋变成了右旋。

4 结 论

利用一种新的理论处理方法研究了螺旋型液晶透射光的偏振态, 给出了详细的数学处理过程。讨论了螺旋液晶旋转角度为 $\pi/2$ 的奇数倍透射光的偏振态, 结果表明, x 方向的线偏振光经过该种螺旋液晶后会变为 y 方向的线偏振光, 即偏振方向旋转了 90° ; 左旋圆偏振光经过液晶透射出的偏振光仍然是圆偏振光, 但光偏振态从左旋转变为右旋; 和其它方法相比, 本文提出的方法比较简单明了, 而且物理意义非常清楚, 对螺旋液晶光学性能的研究是非常有

意义的。

参 考 文 献

- 1 Young-Chol Yang, Chul-Sik Kee, Jae-Eun Kim *et al.*. Photonic defect modes of cholesteric liquid crystals[J]. *Phys. Rev. E*, 1999, **60**(6): 6852~6854
- 2 Jiun-Yeu Chen, Lien-Wen Chen. Defect modes in a stacked structure of chiral photonic crystals[J]. *Phys. Rev. E*, 2005, **71**: 061708-1~7
- 3 Dimitrios C. Zografopoulos, Emmanouil E. Kriezis. Theoretical and experimental optical studies of cholesteric liquid crystal films with thermally induced pitch gradients[J]. *Phys. Rev. E*, 2006, **73**(6): 061701-1~9
- 4 C. Gu, P. Yeh. Extended Jones matrix method and its application in the analysis of compensators for liquid crystal display[J]. *Display*, 1999, **20**(5): 237~257
- 5 A. Lien. Extended Jones matrix representation for the twisted nematic liquid-crystal display at oblique incidence[J]. *Appl. Phys. Lett.*, 1990, **57**(26):
- 6 A. Lien. The general and simplified Jones matrix representation for the high pretilt twisted nematic cell[J]. *J. Appl. Phys.*, 1990, **67**: 2853~2856
- 7 P. Yeh. Electromagnetic propagation in birefringent layered media[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1979, **69**: 742~756
- 8 C. Gu, P. Yeh. Extended Jones Matrix method[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(5): 966~973
- 9 P. Yeh. Extended Jones matrix method[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(4): 507~513
- 10 H. L. Ong. Electro-optics of electrically controlled birefringence liquid crystal display by 2×2 propagation matrix and analytic expression at oblique angle[J]. *Appl. Phys. Lett.*, 1991, **59**(2): 155~157
- 11 Young-Chol Yang, Chul-Sik Kee, Jae-Eun Kim *et al.*. Photonic defect modes of cholesteric liquid crystals[J]. *Phys. Rev. E*, 1999, **60**(6): 6852~6854
- 12 Tatsunosuke Matsui, Masanori Ozaki, Katsumi Yoshino. Tunable photonic defect modes in a cholesteric liquid crystal induced by optical deformation of helix[J]. *Phys. Rev. E*, 2004, **69**: 061715
- 13 Huang Ziqiang. *Principle of Liquid Crystal Display* [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2006. 100~107
黄子强. 液晶显示原理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2006. 100~107
- 14 Wang Xinjiu. *Liquid Crystal Optics and Displays* [M]. Beijing: Science Press, 2006. 190~195
王新久. 液晶光学和液晶显示[M]. 北京: 科学出版社, 2006. 190~195