

文章编号: 0253-2239(2008)07-1307-06

基于最小二乘迭代的多表面干涉条纹分析

徐建程 石琦凯 柴立群 邓 燕 许 乔

(成都精密光学工程研究中心, 四川 成都 610041)

摘要 为了准确地测量透射平行平板,提出了基于最小二乘迭代的多表面干涉条纹分析方法。依据波长调谐相移的原理,通过最小二乘迭代准确地求得每组双表面干涉条纹的实际相移值,从而准确地提取平板前后表面面形及厚度变化等信息。模拟计算结果表明,当相移值有微小偏差(小于 0.2 rad)时,通过 10 次迭代后求得相位的峰值(PV)误差为 0.005 rad,均方根(RMS)误差为 0.002 rad,而相应 Okada 算法的 PV 误差为 0.512 rad,RMS 误差为 0.103 rad。实验结果验证了该算法的有效性。

关键词 测量与计量;干涉测量;最小二乘迭代;多表面干涉条纹;平行平板

中图分类号 O436.1 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20082807.1307

Multiple-Surface Interference Fringes Analysis Based on Least-Squares Iteration

Xu Jiancheng Shi Qikai Chai Liqun Deng Yan Xu Qiao

(Fine Optical Engineering Research Center, Chengdu, Sichuan 610041, China)

Abstract To accurately profile transparent elements with parallel surfaces, a method based on least-squares iteration is presented to extract the phase information from multiple-surface interference fringes. According to the principle of wavelength-tuned phase shifting, the least-squares iteration is applied to obtain the actual phase shifts of the different two-beam interference fringes in each frame. Therefore, it allows extraction of front surface, back surface and thickness variation from multiple-surface interference fringes with high precision. The simulation results show that when the phase-shifting error is less than 0.2 rad, the proposed algorithm needs only 10 iterations and reduces the residual phase errors from 0.512 rad (peak value, PV) and 0.103 rad (root-mean-square, RMS) obtained by Okada's algorithm to 0.005 rad (PV) and 0.002 rad (RMS). Its validation is also demonstrated by the experiment of three-surface fringes analysis.

Key words measurement and metrology; interferometry; least-squares iteration; multiple-surface interference fringe; parallel flat

1 引 言

传统相移干涉术通常认为干涉条纹是双表面干涉产生的,然而当测量透射平行平板(在光显示、光通信中有广泛的应用)时,将产生三表面干涉,若用传统的相移算法计算三表面干涉条纹时将会产生很大的误差^[1]。目前常用的方法主要是抑制透射平板后表面的反射(如涂折射率匹配的消光漆或凡士林)或使后表面的反射光与测试光不相干(如采用多模

激光器^[2])。根据三表面干涉时每个面反射率不同,提出了一种单幅三表面干涉条纹空域傅里叶分析法^[3],但需引入空间载波且精度较低;Peter de Groot 等^[4]提出了加权波长调谐相移算法,通过设计合适的采样窗函数实现有用信息提取,它能有效抑制谐波的影响,但要求波长相移是连续线性的且透射平行平板厚度和干涉腔长度比例要合适。Okada^[5]等人利用波长调谐相移,提出了从多表面

收稿日期: 2007-10-23; **收到修改稿日期**: 2007-12-28

基金项目: 中国工程物理研究院人才基金(zx0104)资助课题。

作者简介: 徐建程(1981—),男,博士研究生,主要从事精密光学检测和光学设计等方面的研究。

E-mail: xujiancheng8143@126.com

导师简介: 许 乔(1972—),男,研究员,博士,主要从事先进光学制造和检测等方面的研究。

E-mail: xuqiao@vip.sina.com

干涉条纹中提取各个有用信息的最小二乘拟合算法,该算法要求已知每组干涉条纹的相移值,但不需要相移是线性的。

目前常用的相移量标定方法^[6,~8]和任意相移量迭代算法^[9,10]都是用在双表面干涉条纹上。为了解决多表面干涉条纹波长调谐相移误差对平行平板测量的影响,本文提出了一种基于最小二乘迭代的多表面干涉条纹分析方法。

2 原 理

2.1 由相移值求相位分布

用菲佐(Fizeau)干涉仪测量透射平行平板实验装置图如图1所示,设标准面(标准镜R后表面)为面1,透射平行平板T前表面为面2,后表面为面3,因为3个面的反射光[如图1(b)]都会进入干涉仪的采集系统形成多表面干涉条纹。定义面1和面2反射光干涉条纹为第一组,其强度为

$$g_1(x, y) = a_1(x, y) + b_1(x, y) \cos \left[\frac{4\pi}{\lambda} L(x, y) \right], \quad (1)$$

式中 $a_1(x, y)$ 和 $b_1(x, y)$ 分别为第一组干涉条纹的背景和调制度, $L(x, y)$ 为面1和面2间的距离(即干涉腔长度), λ 表示初始波长。当激光器的波长从 λ 变到 $\lambda - \Delta\lambda_m$ 时,则第一组第 m 帧干涉条纹强度可表示为

$$g_{1m}(x, y) = a_1(x, y) + b_1(x, y) \cos \left[\frac{4\pi}{\lambda - \Delta\lambda_m} L(x, y) \right] = a_1(x, y) + b_1(x, y) \cos \left[\frac{4\pi}{\lambda} L(x, y) + \theta_{1m} \right], \quad (2)$$

式中 θ_{1m} 为波长改变 $\Delta\lambda_m$ 引入的相移,

$$\theta_{1m} = \frac{4\pi L(x, y) \Delta\lambda_m}{\lambda(\lambda - \Delta\lambda_m)}. \quad (3)$$

通常能满足 $\Delta\lambda_m \ll \lambda$, $L(x, y) \approx L_{ave}$, L_{ave} 为面1和面2的平均距离,所以相移值可为 $\theta_m \approx \frac{4\pi L_{ave} \Delta\lambda_m}{\lambda^2}$ 。由于激光器的波长受环境的影响,使得每步相移量不相等,从而不能保证相移值线性变化,所以不能准确预算实际相移值。

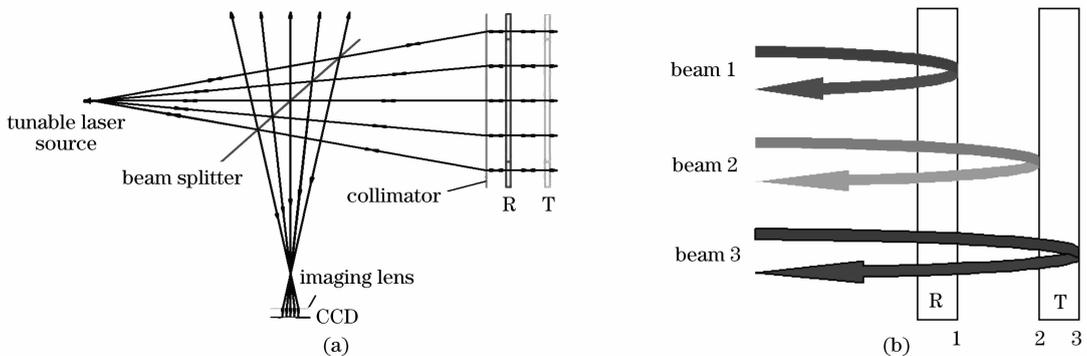


图1 波长调谐 Fizeau 干涉仪(a)和三表面干涉示意图(b)

Fig.1 Schematic of wavelength-tuned Fizeau interterometer (a) and three-surface interference (b)

因为面1、面2、面3的反射光是相干的,所以会发生两两干涉,根据(1)式、(2)式可得多表面干涉条纹的强度分布为(省略坐标)

$$g_m = a_0 + \sum_{j=1}^p b_j \cos[\Phi_j + \theta_{jm}] + n(m), \quad (4)$$

式中 p 为干涉条纹的组数, a_0 为多表面干涉条纹的背景, b_j 和 Φ_j 分别为第 j 组干涉条纹的对比度和相位值(包含平行平板面形或厚度信息); θ_{jm} 为第 j 组干涉条纹第 m 次相移值, n 为干涉图中噪声,包括微弱的谐波分量和随机噪声。定义一组新的变量: $X_0 = a_0$, $X_{2j-1} = b_j \cos \Phi_j$, $X_{2j} = -b_j \sin \Phi_j$; $S_0 = 1$,

$S_{2j-1}(m) = \cos \theta_{jm}$, $S_{2j}(m) = \sin \theta_{jm}$, 则(4)式可改写为

$$g_m = \sum_{k=0}^{2p} X_k S_k(m) + n(m), \quad (5)$$

若干涉图的帧数 $M \geq 2p + 1$, 且相移值 θ_{jm} 已知, 则相位 Φ_j 可通过加权最小二乘拟合求得。为了有效地分离各组干涉条纹分量, 可以取权分布 ω_m 为汉明(Hamming)窗^[11], 则误差函数可表示为

$$E(X_0, X_1, \dots, X_{2p}) = \sum_{m=1}^M \omega_m (I_m - g_m)^2 = \sum_{m=1}^M \omega_m \left[I_m - \sum_{k=0}^{2p} X_k S_k(m) - n(m) \right]^2, \quad (6)$$

因为随机噪声的平均值可近似为零,所以为了使 E 取最小值,要使 $\partial E/\partial X_k = 0, k = 0, 1, \dots, 2p$, 即要满足如下条件:

$$AX = Y, \quad (7)$$

式中

$$A_{jk} = \sum_{m=1}^M \omega_m S_j(m) S_k(m), \quad (8)$$

$$j, k = 0, 1, 2, \dots, 2p$$

$$Y_k = \sum_{m=1}^M \omega_m I_m S_k(m), \quad (9)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, 2p$$

由(6)式可求得 X , 从而可以求得相位

$$\Phi_j = \arctan\left(\frac{-X_{2j}}{X_{2j-1}}\right), \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (10)$$

2.2 由相位分布求相移值

定义一组新的变量为: $X'_0 = 1, X'_{2j-1} = \cos \Phi_j, X'_{2j} = \sin \Phi_j; S'_0(m) = a_0, S'_{2j-1}(m) = b_j \cos \theta_{jm}, S'_{2j}(m) = -b_j \sin \theta_{jm}$. 将上一步求得相位 Φ_j 作为已知量, 只要干涉图的像素总个数 $N \geq p$, 则可按最小二乘迭代求得相移值. 此时, (6)式改写成

$$E[S'_0(m), S'_1(m), \dots, S'_{2p}(m)] = \sum_{n=1}^N [I_m(n) - g_m(n)]^2 = \sum_{n=1}^N \left[I_m(n) - \sum_{k=0}^{2p} X'_k(n) S'_k(m) - n(m) \right]^2, \quad (11)$$

式中 n 为干涉图中第 n 个像素. 同理, 为了使(11)式中 E 取最小值, 此时要使 $\partial E(m)/\partial S'_k(m) = 0, k = 0, 1, \dots, 2p$, 即要满足如下条件:

$$BS'(m) = Z, \quad (12)$$

式中

$$B_{jk} = \sum_{n=1}^N X'_j(n) X'_k(n), \quad (13)$$

$$j, k = 0, 1, 2, \dots, 2p$$

$$Z_k = \sum_{n=1}^N I_m(n) X'_k(n), \quad (14)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, 2p; m = 1, 2, \dots, M$$

由(12)式可求得 $S(m)$, 从而求得第 m 帧干涉图的相移值

$$\theta_j(m) = \arctan\left[\frac{-S'_{2j}(m)}{S'_{2j-1}(m)}\right]. \quad (15)$$

$$j = 1, 2, \dots, p; m = 1, 2, \dots, M$$

2.3 迭代收敛判据

先用(3)式作为初始值, 通过第一步计算求得相位信息, 然后将求得的相位信息通过第二步计算求得相移值, 再将第二步求得相移值代入第一步, 如此反复迭代, 随着迭代次数的增加, 求得的相移值更加接近真实值, 从而提高了相位信息的精度. 直到满足如下判据迭代才终止:

$$\max |[\theta_j^q(m) - \theta_j^{q-1}(m)] - [\theta_j^{q-1}(m) - \theta_j^{q-2}(m)]| < \varepsilon,$$

$$j = 1, 2, \dots, p; m = 1, 2, \dots, M$$

式中 q 为迭代次数, ε 为预先设定的迭代精度.

3 模拟计算

模拟三表面干涉条纹来验证迭代算法, 即 $p = 3$, 假设

$$\Phi_1 = 5(x^2 + y^2) + 12x,$$

$$\Phi_2 = 8(x^2 + y^2) + 24y,$$

$$\Phi_3 = \Phi_2 - \Phi_1,$$

$$a_0 = 130 \exp[-0.2(x^2 + y^2)],$$

$$b_j = 40 \exp[-0.2(x^2 + y^2)],$$

其中 $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$, 噪声 n 为 10 个灰度的随机噪声和灰度为 2 的 2 阶谐波. 根据假设得到的干涉图如图 2 (a) 所示. 三组干涉条纹的初始相移值 $\theta_{1m} = (m-1)\pi/2, \theta_{2m} = 1.5\theta_{1m}, \theta_{3m} = 0.5\theta_{1m}$, 而实际相移在初始相移值加随机变量. 通过 10 次

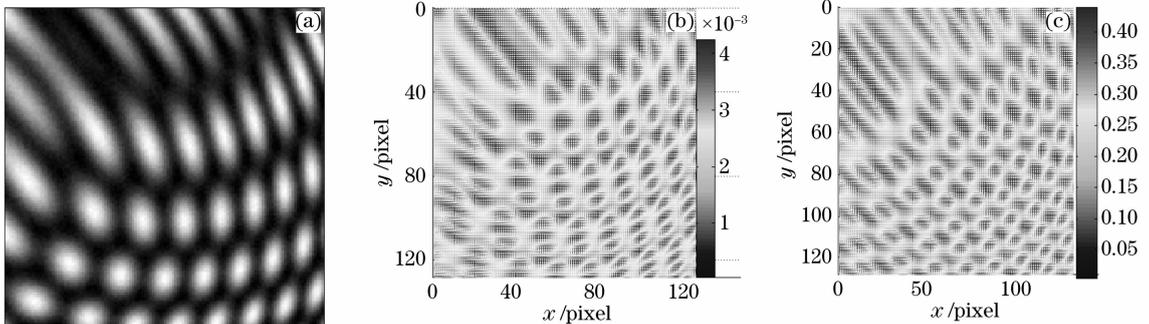


图 2 多表面干涉条纹(a), 迭代算法的误差分布(b), Okada 算法的误差分布(c)

Fig. 2 Multiple-surface interferogram (a), error distribution of the proposed iterative algorithm (b), error distribution of Okada's algorithm (c)

最小二乘迭代计算后的相移值如表 1 所示,求得相位 Φ_1 的误差分布如图 2(b)所示。若采用 Okada 算法求得相位 Φ_1 的误差分布如图 2(c)所示。两种算法求得各个相位分布的峰值(PV)误差和均方根(RMS)值如表 2 所示。由图 2、表 1 和表 2 可知,相

移值的微小偏差(小于 0.2 rad),严重限制了 Okada 的算法的精度(PV:0.512 rad;RMS:0.103 rad),而通过 10 次迭代以后,求得相移值与实际相移偏差小于 0.003 rad,从而提高了相位提取的精度(PV:0.005 rad;RMS:0.002 rad)。

表 1 初始相移、实际相移和求得相移的比较

Table 1 Comparison among initial phase shifts, actual phase shifts and obtained phase shifts

	θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}	θ_{14}	θ_{15}	θ_{16}	θ_{17}
Initial phase shifts /rad	0	1.5708	3.1416	4.7124	6.2832	7.8540	9.4248
Actual phase shifts /rad	0	1.4048	3.2451	4.7221	6.2806	7.9369	9.3716
Obtained phase shifts /rad	0	1.4029	3.2440	4.7232	6.2806	7.9345	9.3704

表 2 最小二乘拟合和最小二乘迭代算法的残留误差比较

Table 2 Comparison of residual errors between least-squares fitting and least-squares iteration

	PV($\Delta\Phi_1$)	RMS($\Delta\Phi_1$)	PV($\Delta\Phi_2$)	RMS($\Delta\Phi_2$)	PV($\Delta\Phi_3$)	RMS($\Delta\Phi_3$)
Presented algorithm	0.0043	0.0001	0.0048	0.0011	0.0058	0.0012
Okada algorithm	0.3890	0.0808	0.3490	0.0750	0.5117	0.1026

4 实 验

实验装置如图 1 所示,被测平行平板厚度约为 10 mm 的 K9 玻璃(设折射率 $n=1.5$),干涉腔长度 L 约为 45 mm,调谐激光器的主波长为 632.8 nm。通过控制波长调谐激光器的电压(电压改变量和波长改变量成近似线性),计算得到波长改变量约为 6.75×10^{-4} nm。而三组干涉条纹对应的光程差分别为 45 mm,15 mm,60 mm,将它们分别代入(3)式的 L 可求得三组干涉条纹的每步相移量的近似值约为 0.954 rad,1.272 rad 和 0.318 rad。通过改变波长得到 45 帧干涉图,图 3(a)就是其中一帧。取 45 帧干涉图中心位置特定点的光强组成该点光强随波长变化的一维分布,其频谱如图 3(b)所示,由频谱图中可估计三组干涉条纹的相移量约为 1.117 rad,1.536 rad 和 0.419 rad,定义该相移量为频谱法校正后的相移量。用(3)式求得的近似相移量作为本迭代算法的初

始值,对 17 帧干涉图进行 10 次迭代,计算后得到的平均每步相移量为 1.077 rad,1.470 rad,0.394 rad,另外,迭代结果还表明每步的相移量是不相等的。三组干涉条纹的近似相移值、频谱标定后的相移值及迭代得到的相移值如图 3(c)所示。分别用这三组相移值求得平行平板前后表面及厚度变化如图 4 所示,面形 PV、RMS 值如表 3 所示。由图 4 和表 3 可知,用初始相移值和频谱标定后的相移值求得的前后表面面形都有较明显的波纹,而最小二乘迭代得到面形已基本抑制了相移不准确引入的波纹。比较前后表面和厚度变化可知,前后表面面形中的波纹比厚度信息中的波纹明显,这是因为前后表面对应的相移量很接近,容易造成混频,如图 3(b)所示,而厚度信息对应相移量的频谱在 0.419 rad/frame 附近,偏离前后表面对应相移量的频谱(1.1170 rad/frame 和 1.5369 rad/frame 附近)较远。

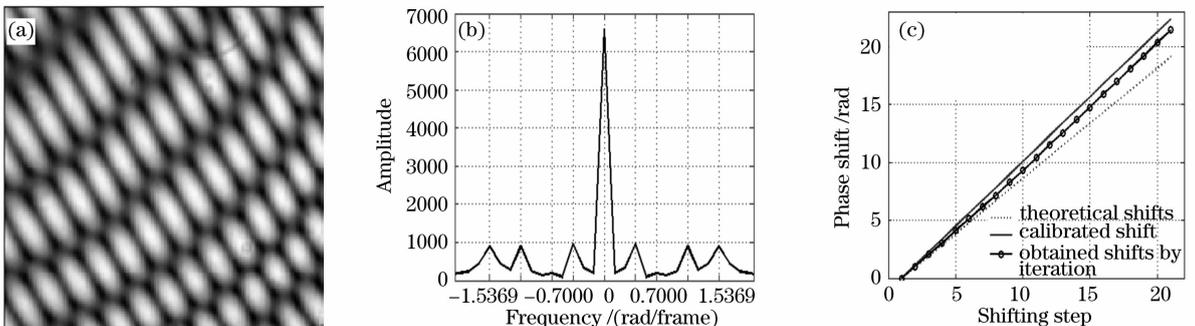


图 3 确定相移值。(a)干涉图,(b)相移量频谱,(c)相移值

Fig. 3 Determination of phase shifts. (a) Interferogram, (b) frequency spectrum of phase shifts, (c) phase shifts

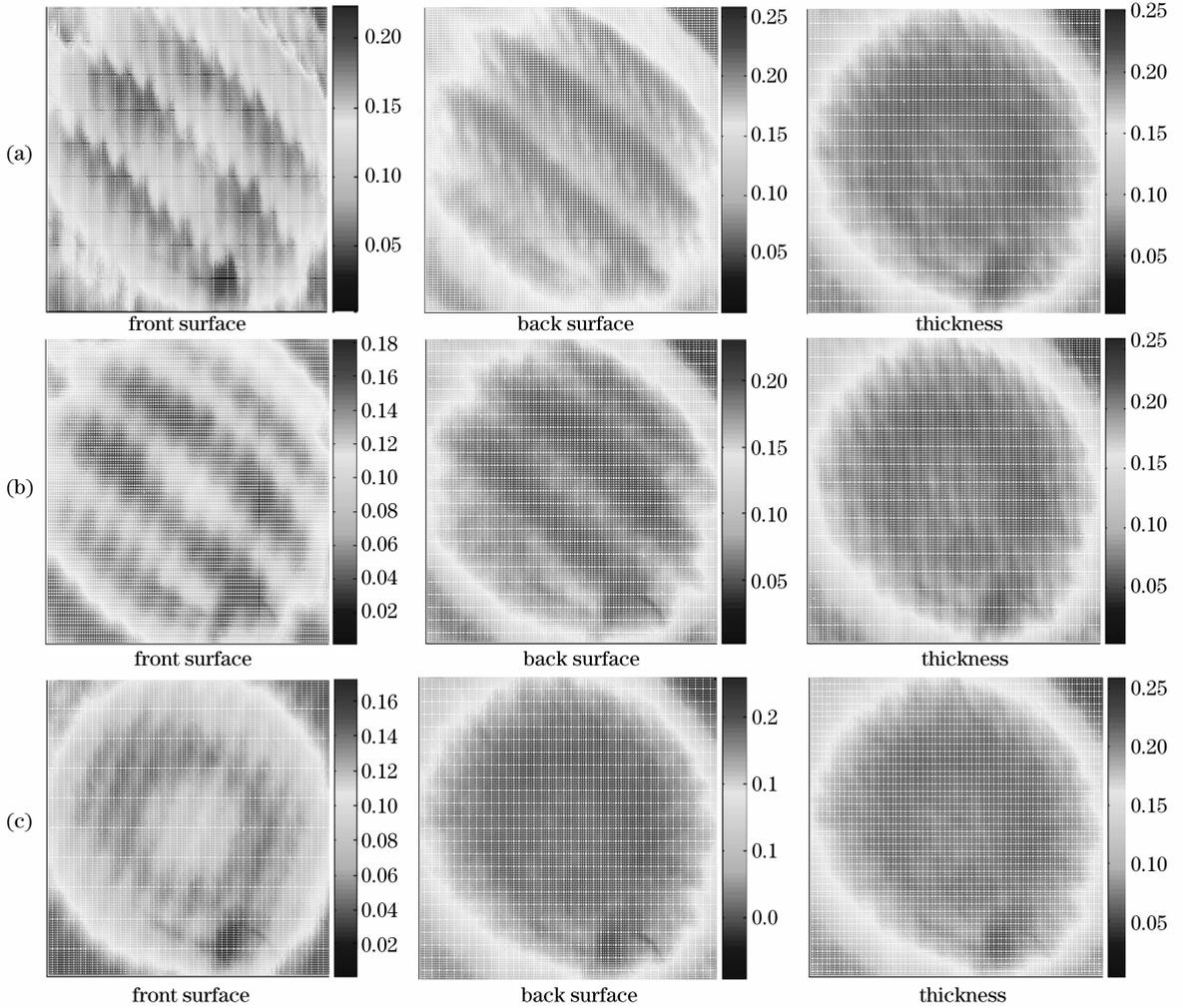


图 4 初始相移值(a), 频谱标定(b), 最小二乘迭代(c), 求得的前表面、后表面和厚度

Fig. 4 Front surface, back surface and thickness obtained by initial phase shifts (a), calibrated phase shifts (b), proposed least-squares iteration (c)

表 3 最小二乘拟合和最小二乘迭代求得的结果

Table 3 Results obtained by least-squares fitting (initial phase shifting and calibrated phase shifting) and least-squares iteration

	Front surface		Back surface		Thickness	
	PV /rad	RMS /rad	PV /rad	RMS /rad	PV /rad	RMS /rad
Initial phase shifts	0.2236	0.0354	0.2586	0.0461	0.2625	0.0489
Calibrated phase shifts	0.1827	0.0353	0.2320	0.0444	0.2610	0.0483
Least-squares iteration	0.1726	0.0319	0.2309	0.0431	0.2607	0.0481

5 结 论

提出了基于最小二乘迭代的多表面干涉条纹分析方法, 该方法只需要通过波长改变量、腔长和平板厚度等信息求得每组干涉条纹的相移值的初始量, 通过最小二乘迭代可得到每组干涉条纹每帧的实际相移值, 从而准确地求得前后表面及厚度信息。模拟计算结果表明, 当相移值有微小偏差 (小于 0.2 rad) 时, 通过 10 次迭代后求得相位的误差从 Okada 算法的

0.512 rad (PV)、0.103 rad (RMS) 降到 0.005 rad (PV)、0.002 rad (RMS)。实验结果表明, 波长相移时每步的相移量是不相等的, 通过最小二乘迭代后基本抑制了相移不准确引入的波纹。因为本算法不需要严格初始相移值和每帧等相移量, 因此简化了平行平板测试的操作难度, 降低了波长调谐激光器的稳定性要求。

参 考 文 献

- 1 Gao Zhishan, Chen Jinbang, He Yong *et al.*. Interferometric test of power spectral density in spatial mid-frequency band of the wavefront[J]. *Chin. J. Lasers*, 2000, **27**(4): 327~331
高志山,陈进榜,何 勇 等. 波面功率谱密度中频波段的干涉测试研究[J]. *中国激光*, 2000, **27**(4): 327~331
- 2 Chiayu Ai. Multimode laser Fizeau interferometer for measuring the surface of a thin transparent plate[J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(31): 8135~8138
- 3 Xu Jiancheng, Shi Qikai, Chai Liqun *et al.*. Spatial Fourier fringe analysis with single three-surface interferogram[J]. *Chin. J. Lasers*, 2006, **33**(9): 1260~1264
徐建程,石崎凯,柴立群 等. 三表面干涉条纹空域傅里叶分析[J]. *中国激光*, 2006, **33**(9): 1260~1264
- 4 Peter de Groot. Measurement of transparent plates with wavelength-tuned phase-shifting interferometry[J]. *Appl. Opt.*, 2000, **39**(16): 2658~2663
- 5 K. Okada, H. Sakuta, T. Ose *et al.*. Separate measurements of surface shapes and refractive index inhomogeneity of an optical element using tunable-source phase shifting interferometry[J]. *Appl. Opt.*, 1990, **29**(22): 3280~3285
- 6 Lü Xiaoxu, Zhong Liyun, Zhang Yimo. A method of phase-shifting measurement by the difference of phase-shifting interferograms[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(4): 603~608
吕晓旭,钟丽云,张以谟. 通过相移条纹图差分测定相移量的方法[J]. *光学学报*, 2007, **27**(4): 603~608
- 7 Luo Yinlong, Lü Xiaoxu, Zhu Yue *et al.*. Real-time high accuracy phase-shifting calibrating method based on one-dimensional spatial digital correlation[J]. *Chin. J. Lasers*, 2005, **32**(8): 1117~1122
罗印龙,吕晓旭,朱 越 等. 基于一维空间数字相关的实时相移标定方法[J]. *中国激光*, 2005, **32**(8): 1117~1122
- 8 Li Wansong, Su Xianyu, Su Likun *et al.*. Simultaneous calibration algorithm of phase-shifting based on FFT[J]. *Acta Optica Sinica*, 1999, **19**(10): 1390~1395
李万松,苏显渝,苏礼坤 等. 基于快速傅里叶变换的实时相移校正算法[J]. *光学学报*, 1999, **19**(10): 1390~1395
- 9 G. S. Han, S. W. Kim. Numerical correction of reference phases in phase-shifting interferometry by iterative least-squares fitting[J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(31): 7321~7325
- 10 Zhaoyong Wang, B. Han. Advanced iterative algorithm for phase extraction of randomly phase-shifted interferograms[J]. *Opt. Lett.*, 2004, **29**(14): 1671~1673
- 11 Shouhong Tang, Richard E. Bills, Klaus Freischlad. Weighted least-square approach for simultaneous measurement of multiple reflective surfaces[C]. *Proc. SPIE*, 2007, **6671**: 66710T1-10

《光学学报》“空间光学”专题征稿启事

随着国家对空间技术发展的不断重视,“神舟计划”、“嫦娥计划”的深入实施,国内空间技术不断发展,其中空间光学技术发挥了极其重要的作用。为集中反映“空间光学”领域国内外的最新发展,《光学学报》计划 2008 年 12 月推出“空间光学”专题栏目,特向国内外专家征集“空间光学”方面原创性的研究论文。

征稿范围包括:

- 空间观测与遥感
- 空间目标探测
- 空间信息链路技术
- 天基光电对抗
- 其他空间光学领域

截稿日期:

2008 年 10 月 5 日。

投稿方式及格式:

可直接将稿件电子版发至邮箱:gxxb@mail.shnc.ac.cn(主题标明“空间光学专题投稿”)。投稿文体不限,语种不限,其电子版请使用 MS-Word 格式。有任何问题请发邮件至 gxxb@mail.shnc.ac.cn 询问。