

# 指数型分层介质粗糙面光透射问题的微扰法

任新成<sup>1,2</sup> 郭立新<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 西安电子科技大学理学院, 陕西 西安 710071; <sup>2</sup> 延安大学物理与电子信息学院, 陕西 延安 716000)

**摘要** 运用微扰法研究了平面波入射分层介质粗糙面的光透射问题, 推出了不同极化状态的透射系数公式。采用指数型粗糙面模拟实际的分层介质粗糙面, 结合其功率谱导出了平面波入射时的透射系数计算公式。通过数值计算得到了 HH 极化情形透射系数随透射光散射角变化的曲线。数值计算结果表明, 底层介质介电常量对透射系数几乎没有影响; 中间介质介电常量影响透射系数的大小及透射系数角分布曲线; 中间介质厚度增大为原来的二倍时, 曲线振荡的周期减小为原来的二分之一; 粗糙面高度起伏均方根影响透射系数的大小、曲线振荡的振幅; 粗糙面高度起伏相关长度既影响透射系数的大小、同时影响曲线的振荡行为; 透射系数随入射波长的增大而振荡减小。

**关键词** 散射; 光透射; 透射系数; 微扰法; 指数型粗糙面; 分层介质

中图分类号 O436.2; O431.1 文献标识码 A

## Optical Transmission from Exponentially Distributed Rough Surface of Layered Medium Using Perturbation Method

Ren Xincheng<sup>1,2</sup> Guo Lixin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> School of Sciences, Xidian University, Xian, Shaanxi 710071, China

<sup>2</sup> College of Physics and Electronic Information, Yan'an University, Yan'an, Shaanxi 716000, China

**Abstract** The optical transmission with plane wave incidence on the rough surface of layered medium is studied, the formulae of the transmission coefficient for different polarization states is derived using the perturbation method. An exponentially distributed rough surface is presented for describing the practical rough surface of layered medium, the transmission coefficient of HH polarization with the scattering angle of transmission wave is obtained by numerical calculation. The numerical results show that the transmission coefficient almost does not change with permittivity of the substrate medium. The magnitude and curve of the angular distribution for the transmission coefficient are affected by the the permittivity of intermediate medium. As the mean layer thickness of intermediate medium increases twice over, the period of the curves will decrease one half. The rough surface influences the magnitude of the transmission coefficient and the amplitude of the curve, the correlation length of the rough surface influences the magnitude of the transmission coefficient, the amplitude and varying trend of the curves. The transmission coefficient decreases oscillatorily with increase of the incident wavelength.

**Key words** scattering; optical transmission; transmission coefficient; perturbation method; exponentially distributed rough surface; layered medium

## 1 引言

粗糙面电磁(光)散射一直是一个十分活跃、有着大量实际应用、且为多学科领域共同研究的热门课题, 从原子物理、医学成像、地球科学到遥感等都有粗糙面电磁(光)散射的应用<sup>[1~4]</sup>。由于自然界许

多粗糙面下方都是分层介质, 不难想象分层介质粗糙面电磁(光)散射在诸多工程、技术和科学问题中是颇有价值的, 诸如在环境遥感、复合材料粗糙表面无损检测、薄膜物理、光学和电磁学方面的应用。在近十余年中, 研究粗糙面电磁(光)散射新的解析方

收稿日期: 2007-09-04; 收到修改稿日期: 2007-12-20

基金项目: 国家自然科学基金(60571058)和高等学校博士学科点专项科研基金(20070701010)资助课题。

作者简介: 任新成(1967—), 男, 副教授, 博士研究生, 主要从事电磁波和光波在复杂介质中的传播和散射等方面的研究。

E-mail: yauxchren@yahoo.com.cn

导师简介: 郭立新(1968—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事电磁波和光波在复杂介质中的传播和散射, 目标电磁(光)散射特性研究及计算机电磁成像和非线性物理等方面的研究。E-mail: lxguo@mail.xidian.edu.cn

法不断得到丰富和发展,这些方法有小斜率近似法<sup>[5]</sup>、全波分析法<sup>[6]</sup>、双尺度方法<sup>[7]</sup>、微扰法<sup>[8]</sup>和基尔霍夫近似法<sup>[9]</sup>等。

在过去的粗糙面电磁(光)散射的研究中,研究粗糙面、包括分形粗糙面上方的介质中的电磁(光)散射居多<sup>[10~13]</sup>,而研究粗糙面下方介质中的电磁(光)透射问题则相对较少<sup>[14,15]</sup>。所研究的粗糙面大多为两种介质的分界面,而实际的粗糙面有许多是其下方有两种或两种以上的介质。本文研究了由三种介质(粗糙面下方有两种介质)组成的分层介质粗糙面的光透射问题,而且入射到分层介质粗糙面的光波为平面波。假定粗糙面上方和下方的三种介质均是各向均匀的,根据瑞利假设,运用微扰法近似,避免繁琐的推导和证明而得到简洁的透射光散射振幅的表达式,进一步推出透射系数的公式。用指数型粗糙面来模拟实际的分层介质粗糙面。运用上述结果通过数值计算得到水平(HH)极化条件下透射系数随透射光的散射角变化的曲线,讨论底层介质介电常量、中间介质介电常量和厚度、粗糙面高度起伏均方根和相关长度及入射光波长对透射系数的影响。这些结果在诸如海上浮冰、雪层、干旱地区的沙层等的光散射中有重要的应用。

## 2 公式推导

考虑光波在两个半空间的分界面(粗糙面)上发生的散射,分界面用方程  $z=f(\mathbf{r})$  ( $\mathbf{r}=\{x,y\}$ ) 描述。不失一般性,假设粗糙面上方 [ $z>f(\mathbf{r})$ ] 均匀半空间介质(介质 1)的介电常量和磁导率分别为  $\epsilon_0=1$ ,  $\mu_0=1$ ,粗糙面下方 [ $z<f(\mathbf{r})$ ] 均匀半空间介质的介电常量为  $\epsilon(z)$ ,随机函数  $f(\mathbf{r})$  具有零均值且在空间上是统计均匀的,即  $\langle f(\mathbf{r}) \rangle = 0$ 。

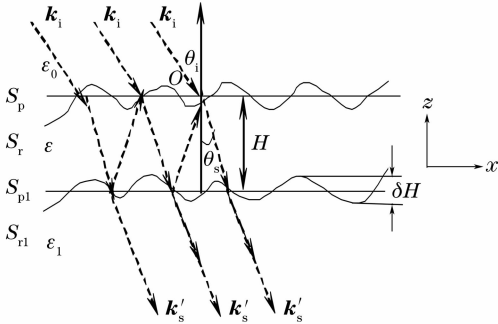


图 1 分层介质粗糙面光透射问题几何示意图

Fig. 1 Geometry of the optical transmission from rough surface of layered medium

频率为  $\omega$ 、波矢为  $\mathbf{k}_i$  ( $\mathbf{k}_i=[k_i \sin \theta_i, 0, -k_i \cos \theta_i]$ ),

$k_i=\omega/c$ ) 的单一频率[忽略时谐因子  $\exp(-i\omega t)$ ] 平面光波以入射角  $\theta_i$  从介质 1 入射到两个半无限介质的粗糙分界面  $S_r$  上,如图 1 所示。

根据电场和磁场的边界条件,电场和磁场的切向分量在粗糙边界  $S_r$  上连续,即

$$\mathbf{N} \times [\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}]_{S_r} = \mathbf{N} \times [\mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}]_{S_r} = 0, \quad (1)$$

式中  $\mathbf{E}^{(2)}$  和  $\mathbf{H}^{(2)}$  分别为下半空间  $z<f(\mathbf{r})$  的电场和磁场,  $\mathbf{E}^{(1)}$ ,  $\mathbf{H}^{(1)}$  分别为上半空间  $z>f(\mathbf{r})$  的电场和磁场,  $\mathbf{N}$  为粗糙面  $S_r$  的法线方向的单位矢量,并且指向上方,可以表示为

$$\mathbf{N} = (\mathbf{n} - \mathbf{s})(1 + s^2)^{-1/2}, \quad (2)$$

式中  $\mathbf{n}$  为水平面(粗糙面  $S_r$  的平均平面)  $S_p$  ( $z=0$ ) 法线方向的单位矢量,  $\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \nabla_r f(\mathbf{r})$  是表面斜度的矢量场,这里  $\nabla_r = \{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$ 。假定粗糙面  $S_r$  的斜度与水平面  $S_p$  相比较足够小,可以将边界条件(1)式展开为  $f(\mathbf{r})$  和  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  的级数,仅保留一阶项则为<sup>[7]</sup>

$$\begin{cases} (\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{H})_{S_p} = (\mathbf{s} \times \Delta \mathbf{H})_{S_p} - f(\mathbf{n} \times \frac{\partial \Delta \mathbf{H}}{\partial z})_{S_p}, \\ (\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{E})_{S_p} = (\mathbf{s} \times \Delta \mathbf{E})_{S_p} - f(\mathbf{n} \times \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial z})_{S_p}, \end{cases} \quad (3)$$

(3) 式中  $\Delta \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}$ ,  $\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}^{(2)} - \mathbf{E}^{(1)}$ 。

此时,可以用下式描述这一衍射问题:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(1,2)} &= \mathbf{H}_0^{(1,2)} + \mathbf{H}_1^{(1,2)}, \\ \mathbf{E}^{(1,2)} &= \mathbf{E}_0^{(1,2)} + \mathbf{E}_1^{(1,2)}, \end{aligned} \quad (4)$$

这里  $\mathbf{E}_0^{(1)}$ ,  $\mathbf{H}_0^{(1)}$  ( $\mathbf{E}_0^{(2)}$ ,  $\mathbf{H}_0^{(2)}$ ) 分别是粗糙面上方(下方)半空间对应于通过平面边界  $S_p$  反射(折射)且未受扰动的电场和磁场,满足一致性边界条件

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_0^{(2)} - \mathbf{H}_0^{(1)})_{S_p} = \mathbf{N} \times (\mathbf{E}_0^{(2)} - \mathbf{E}_0^{(1)})_{S_p} = 0, \quad (5)$$

$\mathbf{E}_1^{(1)}$ ,  $\mathbf{H}_1^{(1)}$  ( $\mathbf{E}_1^{(2)}$ ,  $\mathbf{H}_1^{(2)}$ ) 分别是关于  $f(\mathbf{r})$  和  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  的一阶近似、修正的散射电场和磁场,即上(下)半空间的散射场,它们满足非一致性边界条件

$$\begin{cases} (\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{H}_1)_{S_p} = (\mathbf{s} \times \Delta \mathbf{H}_0)_{S_p} - f(\mathbf{n} \times \frac{\partial \Delta \mathbf{H}_0}{\partial z})_{S_p}, \\ (\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{E}_1)_{S_p} = (\mathbf{s} \times \Delta \mathbf{E}_0)_{S_p} - f(\mathbf{n} \times \frac{\partial \Delta \mathbf{E}_0}{\partial z})_{S_p}, \end{cases} \quad (6)$$

这里,  $\Delta \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0^{(2)} - \mathbf{H}_0^{(1)}$ ,  $\Delta \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_1^{(2)} - \mathbf{H}_1^{(1)}$ ,

$$\Delta \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0^{(2)} - \mathbf{E}_0^{(1)}, \Delta \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1^{(2)} - \mathbf{E}_1^{(1)}.$$

考虑在介质 1 中传播的、入射在粗糙面  $S_r$  上的单一频率水平极化平面光波 (TE 波),在波矢  $\mathbf{k}_i$  的方向上有

$$\mathbf{E}_{\text{in}}^{(1)} = \mathbf{P}_0 \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{R}) = \mathbf{P}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - k_z z)], \quad (7)$$

这里,  $\mathbf{R} = \{\mathbf{r}, z\}$  是三维矢径,  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$  是单位极化矢量,  $\mathbf{k} = \{k, 0, 0\}$  是入射波矢  $\mathbf{k}_i = \{\mathbf{k}, -k_z\}$  在平面  $z=0$  上的二维投影,  $k_z = \sqrt{k_i^2 \mu_{0r} \epsilon_{0r} - k^2} = k_i \cos \theta_i$ .

根据折射定律, 下半空间 ( $z < 0$ ) 的总的零阶电场  $\mathbf{E}_0^{(2)}$  为

$$\mathbf{E}_0^{(2)} = \mathbf{P}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) T_h [\exp(-ik'_z z) + R'_h \exp(ik'_z z)], \quad (8)$$

(8) 式中  $R'_h, T_h$  分别为分层介质的反射系数和透射系数。

根据麦克斯韦方程组可得下半空间 ( $z < 0$ ) 的总的零阶磁场  $\mathbf{H}_0^{(2)}$  为

$$\mathbf{H}_0^{(2)} = \frac{1}{ik_i} \nabla \mathbf{E}_0^{(2)}. \quad (9)$$

在下面的推导中, 假定下半空间 ( $z < 0$ ) 介质的介电常量  $\epsilon(z)$  随  $z$  的变化是缓慢的, 并且在平均平面  $S_p (z=0)$  附近, 即在粗糙面下方的一个薄层内  $\epsilon(z)$  是一个常量, 忽略  $\epsilon(z), T_h$  和  $R'_h$  的变化, 可得

$$\mathbf{H}_0^{(2)} = \frac{1}{k_i} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) T_h [(k'_i \times \mathbf{P}_0) \exp(-ik'_z z) + R'_h (k'_r \times \mathbf{P}_0) \exp(ik'_z z)]_{z \rightarrow -0}, \quad (10)$$

将(8)式和(10)式代入一致性边界条件(5)式, 可以得到菲涅耳反射和折射系数的表达式为

$$R_h = \frac{R_{0h} + R'_h}{1 + R_{0h} R'_h}, \quad T_h = \frac{1 + R_{0h}}{1 + R_{0h} R'_h}, \quad (11)$$

这里  $R_{0h}$  为从两种均匀介质(介电常量分别为  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  F/m 和  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \epsilon_0$  为真空的介电常量,  $\epsilon_r$  为介质的介电常量)构成的水平分界面反射时通常的菲涅耳反射系数, 表示为

$$R_{0h} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_i}}, \quad (12)$$

由(8)式和(10)式可以得到边界条件(6)式右端零阶散射场的差值  $\Delta \mathbf{H}_0, \Delta \mathbf{E}_0$  和它们的法向导数如下:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{H}_0 |_{z=0} = \Delta \mathbf{E}_0 |_{z=0} = 0, \\ \left( \mathbf{n} \times \frac{\partial \Delta \mathbf{H}_0}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = -i \mathbf{P}_0 k_i (\epsilon - 1) (1 + R_h) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \\ \left( \mathbf{n} \times \frac{\partial \Delta \mathbf{E}_0}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0, \end{cases} \quad (13)$$

将透射场按平面波展开, 并且对坐标  $r$  应用傅里叶变换, 由(6)式可得

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times \left( \frac{\tilde{\mathbf{H}}_z^{(2)}}{k'_z} - \frac{\tilde{\mathbf{H}}_z^{(1)}}{k_z} \right) = i \tilde{f}(\mathbf{q}_\perp) k_i (\epsilon - 1) \cdot [1 + R_h(\theta_i)] \mathbf{P}_0 = \mathbf{J}_H^h, \\ \mathbf{n} \times \left( \frac{\tilde{\mathbf{E}}_z^{(2)}}{k'_z} - \frac{\tilde{\mathbf{E}}_z^{(1)}}{k_z} \right) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

由此可得水平极化波的透射振幅为

$$(\mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_s) = \frac{k'_z k_i (\mathbf{P} \cdot \mathbf{J}_H^h)}{k_z [1 + R'_h(\theta_s)] + k'_z [1 - R'_h(\theta_s)]}, \quad (15)$$

由(14)式定义的表面电流  $\mathbf{J}_H^h$  在矢量  $\mathbf{P}$  上的投影为

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{J}_H^h) = i \tilde{f}(\mathbf{q}_\perp) k_i (\epsilon - 1) [1 + R_h(\theta_i)] \cos \varphi, \quad (16)$$

将(16)式代入(15)式可得

$$(\mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_s) = i \tilde{f}(\mathbf{q}_\perp) \frac{(\epsilon - 1) k'_z k_i^2 T_h(\theta_s) [1 + R_h(\theta_i)] \cos \varphi}{2k_z}, \quad (17)$$

(17)式给出了水平极化入射波条件下透射波的振幅。类似地, 垂直极化入射波条件下透射波的振幅为

$$(\mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_s) = -\frac{\epsilon k'_z k_z [\mathbf{P} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{J}_H^h)]}{\epsilon k_z [1 + R'_v(\theta_s)] + k'_z [1 - R'_v(\theta_s)]}, \quad (18)$$

考虑到(14)式表面电流的定义可得

$$[\mathbf{P} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{J}_H^h)] = i \tilde{f}(\mathbf{q}_\perp) k_i (\epsilon - 1) [1 + R_h(\theta_i)] \sin \varphi, \quad (19)$$

由此得到(18)式的最终形式为

$$(\mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{H}}_s) = -i \tilde{f}(\mathbf{q}_\perp) \frac{\varepsilon - 1}{2} k_i k'_z T_v(\theta_s) [1 + R_h(\theta_i)] \sin \varphi, \quad (20)$$

所以透射截面可以表示为

$$\sigma'_h(k'_s, k_i) = \lim_{S_p \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^2}{S} \langle |(\mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{E}}')|^2 \rangle \text{Re} \sqrt{\varepsilon}, \quad (21)$$

$$\sigma'_v(k'_s, k_i) = \lim_{S_p \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^2}{S} \langle |(\mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{H}})|^2 \rangle \frac{\text{Re} \sqrt{\varepsilon}}{|\varepsilon|}, \quad (22)$$

对于水平极化入射波, 运用(17)式和(20)式可以得到(21)式和(22)式的统一的、相似的形式<sup>[6,16]</sup>

$$\sigma_{\alpha\beta}^0(k_s, k_i) = \pi k_i^4 |\varepsilon - 1|^2 |f'_{\alpha\beta}|^2 W_f(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \text{Re} \sqrt{\varepsilon}. \quad (23)$$

这里, 下标  $\alpha$  和  $\beta$  分别表示透射波和入射波的极化状态,  $W_f(\mathbf{q} - \mathbf{k})$  是粗糙表面的空间功率谱密度, 它是粗糙表面自相关函数的傅立叶变换,  $\mathbf{q} - \mathbf{k} = k'_s \sin \theta'_s \cos \varphi - k_i \sin \theta_i$ .

类似地, 也可推导出垂直极化平面光波(TM波)入射时, 分层介质粗糙面的透射波散射系数的公式。

考虑透射的最简单的情形, 即对于非磁性分层介质 ( $\mu = \mu_r \mu_0$ ,  $\mu_0$  为真空的磁导率,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m,  $\mu_r$  为介质的相对磁导率, 且  $\mu_r = 1$ ) 构成的粗糙边界, (23) 式中的一组因子  $f'_{\alpha\beta}$  用显式表示即为

$$\begin{cases} f'_{hh} = \sqrt{\varepsilon} T_h(\theta_s) [1 + R_h(\theta_i)] \frac{\cos \theta'_s}{\cos \theta_s} \cos \phi, \\ f'_{vh} = -T_v(\theta_s) [1 + R_h(\theta_i)] \cos \theta'_s \sin \phi, \\ f'_{vv} = T_v(\theta_s) \left\{ [1 - R_v(\theta_i)] \cos \theta_i \cos \varphi + \frac{1}{\varepsilon} [1 + R_v(\theta_i)] \sin \theta_i \tan \theta_s \right\} \cos \theta'_s, \\ f'_{hv} = \sqrt{\varepsilon} T_h(\theta_s) [1 - R_v(\theta_i)] \frac{\cos \theta'_s}{\cos \theta_s} \cos \theta_i \sin \phi, \end{cases} \quad (24)$$

这里  $R_h$  和  $R_v$  分别表示从水平面  $S_p$  ( $z=0$ ) 下方介质 ( $z<0$ ) 进入水平面上方 ( $z>0$ ) 半空间水平极化和垂直极化的镜反射系数,  $\theta_i$  为入射角,  $\theta_s$  为介质 1 中的散射角,  $\theta'_s$  为介质 2 中的散射角,  $\phi$  为透射波的方向角。对于一般的任意分层介质的情形, 镜反射系数  $R_h$  和  $R_v$  分别具有如下形式:

$$R_h = \frac{R_{oh} + R'_h}{1 + R_{oh} R'_h}, \quad R_v = \frac{R_{ov} + R'_v}{1 + R_{ov} R'_v}, \quad (25)$$

这里  $R_{oh}$  和  $R_{ov}$  分别为从两种均匀介质 (介电常量分别为  $\varepsilon_0 = 1$  和  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ ) 构成的水平分界面反射时的菲涅耳反射系数, 表示为(12)式和下式:

$$R_{ov} = \frac{\varepsilon_r \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta}}{\varepsilon_r \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta}}. \quad (26)$$

$R'$  为中间介质下方介质 (底层介质) 的反射系数 [ $R'=0$  对应于下半空间 ( $z<0$ ) 是介电常量为常量的均匀介质]。

考虑最简单的分层结构介质, 也就是粗糙面上方为自由空间, 下方为由两层介质构成的空间, 具有复介电常量  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$  的平均厚度为  $H$  的均匀层, 覆盖在复介电常量为  $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 + i\varepsilon''_1$  的均匀底层上, 如图 1 所示。具有这种结构的分层介质的反射系数  $R_h$  和  $R_v$  即为(11)式给出的一般方程, 且  $R'$  可以表示为下面的形式<sup>[7]</sup>:

$$R'_h(\theta) = R_{1h}(\theta) \exp(i2kH \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}), \quad (27)$$

$$R'_v(\theta) = R_{1v}(\theta) \exp(i2kH \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}),$$

式中  $R_1(\theta)$  为从介电常量为  $\varepsilon$  和  $\varepsilon_1$  ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1r} \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_{1r}$  为底层介质的相对介电常量) 的两种介质表面  $z = -H$  反射时的菲涅耳反射系数, 它们具有下面的形式

$$R_{1h}(\theta) = \frac{\sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta} - \sqrt{\varepsilon_{1r} - \sin^2 \theta}}{\sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta} + \sqrt{\varepsilon_{1r} - \sin^2 \theta}}, \quad (28)$$

$$R_{1v}(\theta) = \frac{\varepsilon_{1r} \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta} - \varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_{1r} - \sin^2 \theta}}{\varepsilon_{1r} \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta} + \varepsilon_r \sqrt{\varepsilon_{1r} - \sin^2 \theta}}.$$

### 3 数值计算结果和讨论

用指数型粗糙面来模拟实际的分层介质粗糙面, 指数型粗糙面的功率谱密度  $W_f$  为

$$W_f(K) = \sqrt{2\pi} \delta^2 l^2 (1 + K^2 l^2)^{-3/2}. \quad (29)$$

根据 2 中所述微扰法, 将(29)式代入(23)式, 可得光波经过指数型分层介质粗糙面透射进入下半空间的单位非相干散射截面为

$$\sigma_{\alpha\beta}^0(k_s, k_i) = \pi \sqrt{2\pi} k_i^4 |\varepsilon - 1|^2 |f'_{\alpha\beta}|^2 \times \delta^2 l^2 (1 + K^2 l^2)^{-3/2} \text{Re} \sqrt{\varepsilon}, \quad (30)$$

可以进一步得到指数型分层介质粗糙面光波透

射的透射系数如下：

$$\sigma = 10 \lg \sigma_{\text{sp}}^0(k_s, k_i). \quad (31)$$

微扰法要求粗糙表面标准离差小于入射光波长的 5%，粗糙表面的平均斜度与波数和标准离差的乘积具有同一数量级，这两个条件用数学公式表示即为<sup>[3]</sup>

$$k\delta < 0.3, \quad (32)$$

$$\sqrt{2}\delta/l < 0.3. \quad (33)$$

在数值计算中，仅仅考虑发生在入射平面的光波透射问题，即  $\phi = 0$ 。此时， $K = \sqrt{\epsilon_r k_s \sin \theta'_s - k_i \sin \theta_i}$ 。在利用(31)式进行计算时，入射波长取为  $1.06 \mu\text{m}$ ，入射角取为  $30^\circ$ 。

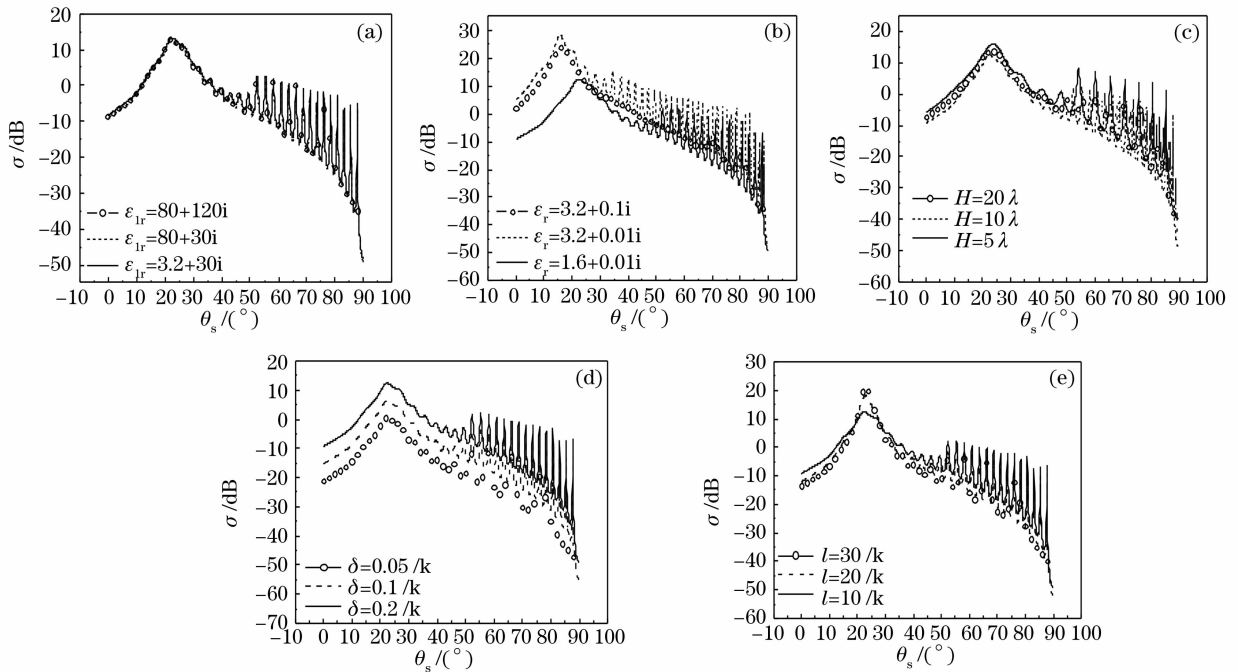


图 2 不同  $\epsilon_r$  (a),  $\epsilon$  (b),  $H$  (c),  $\delta$  (d),  $l$  (e) 时的  $\sigma$  角分布

Fig. 2 Distribution of  $\sigma$  with  $\theta'_s$  for different  $\epsilon_r$  (a),  $\epsilon$  (b),  $H$  (c),  $\delta$  (d),  $l$  (e)

从 2 之公式推导中可以发现，(23)式~(28)式含有或隐含有底层介质介电常量  $\epsilon_r$  这一物理量，根据数值计算结果可得它对透射系数几乎没有影响。

### 3.2 中间层介质介电常量 $\epsilon_r$ 对透射系数的影响

图 2(b)表示在  $\epsilon_r = 80 + 30i$ ,  $H = 10\lambda$ ,  $\delta = 0.2/k$ ,  $l = 10/k$  时，不同  $\epsilon_r$  对应的  $\sigma$  随透射波的散射角  $\theta'_s$  变化的曲线。不难看出，在其它参量和  $\epsilon_r$  的虚部一定的条件下， $\epsilon_r$  的实部越大，曲线振荡的周期越小，振荡的振幅越大，并且在透射波的散射角变化的大部分范围内，透射系数越大；在其它参量和  $\epsilon_r$  的实部一定的条件下， $\epsilon_r$  的虚部越大，曲线振荡的周期越大，振荡的振幅越小，并且在透射波的散射角变化的大部分范围内，透射系数越小。当  $\epsilon_r$  的虚部大到某

### 3.1 底层介质介电常量 $\epsilon_r$ 对透射系数的影响

根据(31)式，通过数值计算可得到在  $\epsilon_r = 1.6 + 0.01i$ ,  $H = 10\lambda$ ,  $\delta = 0.2/k$ ,  $l = 10/k$  时，不同  $\epsilon_r$  对应的  $\sigma$  随透射光的散射角  $\theta'_s$  的变化曲线(如图 2 所示)。由图 2(a)可以看出，在其他参量一定的条件下，对应不同  $\epsilon_r$  的曲线几乎是重合的。说明底层介质介电常量  $\epsilon_r$  对透射系数的影响不大。当  $\theta'_s < \theta'_{s0}$  ( $\theta'_{s0}$  系按照折射定律计算出的对应于入射角  $\theta_i = 30^\circ$ ,  $\epsilon_{or} = 1$ ,  $\epsilon_r = 1.6 + 0.01i$  的折射角)时，曲线几乎不振荡；当  $\theta_s = \theta'_{s0}$  时， $\sigma$  达到最大值；当  $\theta'_s > \theta'_{s0}$  时，曲线开始振荡，并且随着  $\theta'_s$  的增大，曲线振荡的振幅越来越大， $\epsilon_r$  不影响曲线振荡的周期。

一直时，曲线几乎不再振荡。可见透射系数对  $\epsilon_r$  的变化是非常敏感。这一结论对环境遥感等雷达工程问题来说是具有价值的。

中间层介质介电常量  $\epsilon_r$  的实部不同，则对光波的透射作用就不同，虚部不同，则对光波的吸收作用就不同，因此透射系数对  $\epsilon$  的变化非常敏感。

### 3.3 中间层介质厚度 $H$ 对透射系数的影响

图 2(c)表示在  $\epsilon_r = 80 + 30i$ ,  $\epsilon_r = 1.6 + 0.01i$ ,  $\delta = 0.2/k$ ,  $l = 10/k$  时，不同  $H$  对应的  $\sigma$  随透射光的散射角  $\theta'_s$  的变化曲线。不难看出，在其他参量一定的条件下， $H$  越大，曲线振荡的周期越小、振幅越小，并且当  $H$  增大到原来的两倍时，曲线振荡的周期也减小到原来的二分之一。这一结果在  $50^\circ < \theta'_s < 80^\circ$

的范围内是近似成立的。这一结果对于平面光波入射指数型分层介质粗糙面的光波逆散射问题具有重要的意义。

中间层介质厚度  $H$  不同,则它对光波吸收的多少亦不同,因此  $H$  就影响到透射系数的大小、分布等。

### 3.4 粗糙面高度起伏均方根值 $\delta$ 对透射系数的影响

图 2(d) 表示在  $\epsilon_{1r} = 80 + 30i, \epsilon_r = 1.6 + 0.01i, H = 10\lambda, l = 10/k$  时,不同  $\delta$  对应的  $\sigma$  随透射光的散射角  $\theta'_s$  的变化曲线,不难看出,在其他参量一定的条件下, $\delta$  越大, $\sigma$  越大, $\delta$  不影响曲线振荡的周期,但影响曲线振荡的振幅, $\delta$  越大,曲线振荡的振幅越大。

$\delta$  越大,光波在介质 1 中的的散射越弱。根据能量守恒原理,它在介质 2 中透射越强,因此  $\delta$  越大, $\sigma$  越大。

### 3.5 粗糙面高度起伏相关长度 $l$ 对透射系数的影响

图 2(e) 表示在  $\epsilon_{1r} = 80 + 30i, \epsilon_r = 1.6 + 0.01i, H = 10\lambda, \delta = 0.2/k$  时,不同  $l$  对应的  $\sigma$  随透射光的散射角  $\theta'_s$  的变化曲线,不难看出,在其他参量一定的条件下,在折射方向附近一个极小的范围内, $l$  越大, $\sigma$  越大,而在透射光的散射角变化的绝大部分范围内, $l$  越大, $\sigma$  越小, $\sigma$  变化得越快, $l$  不影响曲线振荡的周期,但影响曲线振荡的振幅,还影响曲线变化的快慢。 $l$  越大,曲线振荡的周期不变,曲线振荡的振幅亦越小,曲线变化得越快。

$l$  越大,光波在介质 1 的散射越强。根据能量守恒,它在介质 2 的散射越弱,因此在折射方向附近一个极小的范围内, $l$  越大, $\sigma$  越大,至于在其它方向  $\sigma$  随  $l$  变化的物理机理尚需进一步研究。

从图 2 不难看出,在平面光波入射指数型分层介质粗糙面时,当透射光的散射角小于折射角时,透射系数随透射光的散射角变化的曲线不振荡;当透射光的散射角等于折射角时,透射系数达到最大值;当透射光散射角大于折射角时,透射系数随散射角变化的曲线是振荡的。总体来说,当透射光的散射角小于折射角时, $\sigma$  随  $\theta'_s$  的增大而增大,而当透射光散射角大于折射角时, $\sigma$  随  $\theta'_s$  的增大而减小。

为了进一步研究透射系数  $\sigma$  随入射光波长  $\lambda$  变化的特征,对此进行了数值计算,图 3 给出了数值计算结果。计算时各种参量的取值为  $\epsilon_{1r} = 1.6 + 0.01i, \epsilon_r = 80 + 30i, H = 10\lambda, \delta = 0.001 \text{ m}, l = 0.1 \text{ m}, \theta_i = 30^\circ, \theta'_s$  分别为  $10^\circ$  和  $50^\circ$ 。

对于一个确定的分层介质粗糙面光波透射问题,

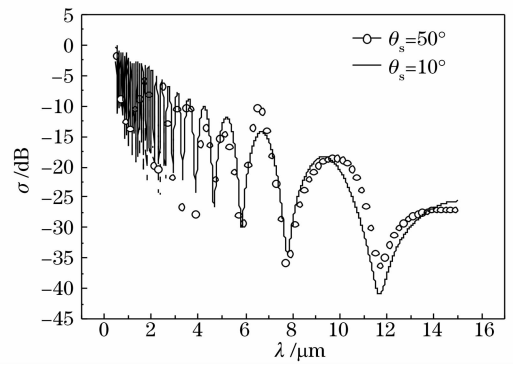


图 3  $\sigma$  随入射波长的分布

Fig. 3 Distribution of  $\sigma$  with  $\lambda$

其底层介质介电常量、中介质的介电常量和厚度、粗糙面高度起伏均方根值、相关长度均是一定的。这里,粗糙面高度起伏均方根取  $\delta = 0.001 \text{ m}$ 、高度起伏相关长度取  $l = 0.1 \text{ m}$  是根据微扰法条件(32)式与(33)式和入射波长的取值范围( $0.5 \sim 15 \mu\text{m}$ )确定的,以保证在上述波长变化范围内,微扰法的条件总能成立,微扰法总能使用。对于上述确定的指数型分层介质粗糙面来说,当不同波长的光波入射时,透射系数随波长的变化特征由图 3 得出。

由图 3 可以看出,透射系数随入射波长的增大而减小,并且是振荡的, $\theta'_s = 10^\circ$  与  $\theta'_s = 50^\circ$  对应的曲线几乎是重合的。尤其在入射波长较小时, $\theta'_s = 10^\circ$  与  $\theta'_s = 50^\circ$  对应的透射系数基本相当。

仅考虑发生在入射平面的光波透射问题,即透射光波的方位角  $\phi = 0$ ,因此(24)式中  $f'_{vh} = f'_{hv} = 0$ ,交叉极化的透射系数为 0。

根据(24)式,经过大量数值计算可以得出,在垂直(VV)极化的情形下,底层介质介电常量  $\epsilon_1$ 、中间层介质介电常量  $\epsilon$ 、中间层介质厚度  $H$ 、粗糙面高度起伏均方根  $\delta$  和相关长度  $l$  对其透射系数的影响与 HH 极化是完全类似的,只是与 HH 极化相比较, VV 极化情形下透射系数角分布曲线的振荡部分振幅明显减小。

## 4 结 论

当平面光波入射到一分层介质粗糙面上时,发生在粗糙面下方介质中的光波透射在诸多实际工程问题中有着广泛的应用。本文基于微扰法得到了平面光波入射分层介质粗糙面时透射系数的表达式,并且采用指数型粗糙面来模拟实际分层介质粗糙面,结合指数型粗糙面的功率谱导出了平面波入射时的透射系数计算公式。通过数值计算得到了 HH 极化情况下透射系数随透射光散射角变化的曲线,讨论了底层

介质介电常量、中间介质介电常量和厚度、粗糙面参量及入射光波长对透射系数的影响。这些结果在诸如在环境遥感、探地雷达、无线电传播与通信、粗糙面重构等光波逆散射问题中有着广泛的应用。本文只是研究了底层介质介电常量、中间介质介电常量和厚度、粗糙面参量及入射光波长对一种结构比较简单的指数型分层介质粗糙面透射系数的影响,对于其它谱分布、结构更为复杂的分层介质粗糙面的透射问题还有待于作进一步地深入研究。

### 参 考 文 献

- 1 Wang Yunhua, Guo Lixin, Wu Zhensen. Light scattering of plane wave/Gaussian beam from two adjacent objects [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(9): 1711~1718  
王运华,郭立新,吴振森. 两个相邻目标对平面波、高斯光束的光散射[J]. *光学学报*, 2007, **27**(9): 1711~1718
- 2 Li Haiying, Wu Zhensen. Debye series of scattering by an infinite multi-layered cylinder in an on axis Gaussian beam[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(10): 1846~1851  
李海英,吴振森. 在轴高斯光束入射无限长多层圆柱散射的德拜级数解[J]. *光学学报*, 2007, **27**(10): 1846~1851
- 3 Xincheng Ren, Lixin Guo. Study on optical wave scattering from slightly Gaussian rough surface of layered medium[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2007, **5**(10): 605~608
- 4 Wang Mingjun, Wu Zhensen, Li Yingle *et al.*. Modeling and measuring the pulse laser scattering echo power from whole dimension target[J]. *Chin. J. Lasers*, 2006, **33**(11): 1557~1561  
王明军,吴振森,李应乐 等. 全尺寸目标激光脉冲后向散射回波功率测定和建模[J]. *中国激光*, 2006, **33**(11): 1557~1561
- 5 Joel T. Johnson. A study of ocean-like surface thermal emission and reflection using Voronovich's small slope approximation[J]. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 2005, **43**(2): 306~313
- 6 Robert G. Olsen, G. L. Hower, P. D. Mannikko. A hybrid method for combining quasi-static and full-wave techniques for electromagnetic scattering problems [J]. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 1988, **36**(8): 1180~1184
- 7 David R. Lyzenga. Comparison of wind sat brightness temperatures with two-scale model predictions[J]. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, 2006, **44**(3): 549~559
- 8 Ren Xincheng, Guo Lixin. Investigation of characteristics of transmission coefficient from the 1D band-limited Weierstrass fractal rough surface[J]. *J. Xidian University*, 2007, **34**(4): 590~595  
任新成,郭立新. 一维带限 Weierstrass 分形粗糙面透射波散射系数特征研究[J]. *西安电子科技大学学报*, 2007, **34**(4): 590~595
- 9 Yang Du, J. A. Kong, Wenzhe Yan *et al.*. A Statistical integral equation model for Shadow-Corrected EM scattering from a Gaussian rough surface[J]. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2007, **55**(6): 1843~1855
- 10 Guo Lixin, Wang Yunhua, Wu Zhensen. Study on the electromagnetic scattering and doppler spectra from two-scale time-varying fractal rough surface[J]. *Acta Physic Sinica*, 2005, **54**(1): 96~101  
郭立新,王运华,吴振森. 双尺度动态分形粗糙海面的电磁散射及多普勒谱研究[J]. *物理学报*, 2005, **54**(1): 96~101
- 11 Yang Junling, Guo Lixin, Wan Jianwei. Study of electromagnetic scattering from fractal sea surface based on non-fully developed sea spectrum[J]. *Acta Physic Sinica*, 2007, **56**(4): 2106~2114  
杨俊岭,郭立新,万建伟. 基于未充分发展海谱的分形海面模型及其电磁散射研究[J]. *物理学报*, 2007, **56**(4): 2106~2114
- 12 Wang Yunhua, Guo Lixin, Wu Qiong. Electromagnetic scattering from parallel 2D targets arbitrarily located in a Gaussian beam[J]. *Chinese Physics*, 2006, **15**(8): 1755~1765
- 13 Liu Ye, Wei Enbo, Hong Jieli *et al.*. Microwave backscattering from the sea surface with breaking waves[J]. *Chinese Physics*, 2006, **15**(9): 2175~2179
- 14 Jin Yaqiu, Li Zhongxin. Bistatic scattering and transmitting through a fractal rough dielectric surface using the forward and backward method with spectrum acceleration algorithm (FBM/SAA) [J]. *Acta Electronic Sinica*, 2002, **30**(11): 1648~1653  
金亚秋,李中新. 结合谱积分加速法的前后向迭代法数值计算分形粗糙介质的透射和透射[J]. *电子学报*, 2002, **30**(11): 1648~1653
- 15 Li Zhongxin, Jin Yaqiu. Investigation of bistatic scattering and transmission through fractal rough dielectric surfaces with the physics-based two-grids method in conjunction with the forward and backward method and spectrum acceleration algorithm[J]. *Acta Physic Sinica*, 2002, **51**(7): 1403~1411  
李中新,金亚秋. 双网格前后向迭代与谱积分法计算分形粗糙面的散射与透射[J]. *物理学报*, 2002, **51**(7): 1403~1411