

增光子圆态及其性质

张克福 王中结

(安徽师范大学物理与电子信息学院, 安徽 芜湖 241000)

摘要 利用光场产生算符的逆算符作用于圆态来构造增光子圆态。讨论了此态的非经典性质,同时计算并模拟出它的维格纳(Wigner)函数。结果表明,在不同光强下,随着激发数的增大增光子圆态光场的平均光子数增加与减少交替地出现;光子激发后,光场的亚泊松统计特性得到增强,压缩效应却受到抑制。维格纳函数图像显示了增光子圆态显著的非经典性质,发现了光子激发与圆态光强的增大都能使量子态由叠加引起的干涉效应明显增强。另外,在不同叠加数的情况下,通过适当选择参量可使维格纳函数具有相同的变化规律。

关键词 量子光学; 增光子圆态; 玻色算符的逆算符; 非经典性质; 维格纳函数

中图分类号 O431.2 **文献标识码** A

Photon-Added Circular States and Their Properties

Zhang Kefu Wang Zhongjie

(College of Physics and Electrical Information, Anhui Normal University, Wuhu, Anhui 241000, China)

Abstract The photon-added circular states are introduced by repeated application of Bose inverse operators on the circular states. Its non-classical properties are discussed, the Wigner function are derived. It is shown that the mean photon number is alternant changes between increase and decrease after photon adding in different strength regimes of the optical fields. Photon inverse operator can enhance sub-Poissonian distribution and suppress squeezing effects. It is also found that the quantum interference effects can be enhanced with the increases of photon-adding number and strength of light. For the different number of superposition, the same characteristics of the Wigner function can be obtained by choosing the suitable parameters.

Key words quantum optics; photon-added circular states; Bose inverse operators; nonclassical effects; Wigner function

1 引言

光场量子态的非经典效应由于在量子测量、量子通信和量子计算等领域中具有重要的应用。非经典光场可通过各种方法来产生,特别是从经典的相干态光场出发,可以方便地获得非经典光场态^[1~4]。一方面,具有相位差的多个相干态的叠加而形成的量子态具有丰富的非经典性质。例如,Bužek 等^[3]引入的两相干态的叠加态,Janszky 等^[4]引入的由 N 个相干态在同一半径为 $|\alpha_k|$ 圆上的叠加而形成的圆态等等,由于量子叠加的干涉效应使这些叠加态呈现出丰富的量子特性。另一方面,自 1991 年 Agarwal 等^[5]提出通过在相干态上重复作用光子产

生算符而产生新量子态的方法以来,Wei 等^[6~9]研究了在其他的量子态上作用某种算符而形成的新量子态的性质,发现了算符的作用使量子态呈现出新的非经典特性。

关于圆态至今已有很多研究^[10,11],本文利用文献^[12]引入并由范洪义^[13]给出严格表述的玻色算符的逆算符 a^{-1} 及 a^{+1} ,作用在圆态上而形成的一种新量子态,进而讨论此态的压缩、亚泊松分布和维格纳(Wigner)函数等非经典特性。

2 增光子圆态

引入新量子态

收稿日期: 2007-09-24; 收到修改稿日期: 2007-11-03

基金项目: 安徽省教育厅自然科学基金(KJ2008A029)和安徽师范大学光学重点学科资助课题。

作者简介: 张克福(1980-),男,安徽阜阳人,硕士研究生,主要从事量子光学方面的研究。E-mail: wulizkf1119@sohu.com

导师简介: 王中结(1962-),男,安徽潜山人,教授,硕士生导师,主要从事量子光学与光混沌等方面的研究。

$$|\alpha, m, N\rangle = \lambda_N a^{-m} \sum_{k=1}^N C_k |\alpha_k\rangle, \quad (1)$$

式中取 $C_k = 1$ 。其中, $\alpha_k = \alpha_0 \exp(i2\pi k/N)$ [$\alpha_0 = r \exp(i\theta)$]。根据文献[13] 可得

$$a^{-m} |\alpha\rangle = \alpha^{-m} \left[|\alpha\rangle - \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle \right]. \quad (2)$$

利用归一化条件 $\langle \alpha, m, N | \alpha, m, N \rangle = 1$ 及(2) 式可得

$$\lambda_N^{-2} = \exp(-|\alpha_0|^2) \sum_{k,l=1}^N (\alpha_l^* \alpha_k)^{-m} \times \left[\exp(\alpha_l^* \alpha_k) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\alpha_l^* \alpha_k)^n}{n!} \right], \quad (3)$$

由关系式

$$\begin{aligned} a^m a^{-m} &= a^{+m} a^{-m} = I, \\ a^{-m} a^m &= a^{-m} a^{+m} = I - \sum_{i=0}^{m-1} |i\rangle \langle i|, \end{aligned} \quad (4)$$

可以证明, 态 $|\alpha, m, N\rangle$ 是算符 $A = a^{-m} a^{m+s}$ 的本征值为 α^s 的本征态, 即

$$\begin{aligned} a^{-m} a^{m+s} |\alpha, m, N\rangle &= \alpha^s \lambda_N a^{-m} \sum_{k=1}^N C_k |\alpha_k\rangle = \\ &= \alpha^s |\alpha, m, N\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

因此, 态 $|\alpha, m, N\rangle$ 可称为增光子圆态。可以看出, 当 $m = 0$ 时, 态 $|r, m, N\rangle$ 为圆态; 当 $N = 1$ 时则为激发相干态^[6]; 当 $N = 1$ 和 $m = 0$ 时, 即为相干态, 当

$N = 2$ 时则为增光子奇偶相干态^[7]。因此增光子圆态是一种更为广泛的量子态。

3 非经典特性

3.1 平均光子数分布

增光子圆态的平均光子数分布 A 为

$$\begin{aligned} A &= \langle a^+ a \rangle = \\ &= \frac{\sum_{k,l=0}^N (\alpha_l^* \alpha_k)^{1-m} \left[\exp(\alpha_l^* \alpha_k) - \sum_{n=0}^{m-2} \frac{(\alpha_l^* \alpha_k)^n}{n!} \right]}{\sum_{k,l=0}^N (\alpha_l^* \alpha_k)^{-m} \left[\exp(\alpha_l^* \alpha_k) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\alpha_l^* \alpha_k)^n}{n!} \right]}, \end{aligned} \quad (6)$$

平均光子数 A 随参量 $|\alpha_k|$ 变化的曲线如图 1 所示。从图 1(a) 可以看出光子的激发使平均光子数有明显增加, 但是随着光强的增加, 激发引起的平均光子数增加幅度却减小; 图 1(b) 是十个量子态的叠加, 其图形与图 1(a) 有显著区别, 光强较弱时, 激发数的增加使平均光子数呈线性增加, 且对于每一个 m 值, 光强变化时平均光子数却几乎不变; 在某些特定的光强区域, 光子激发数的增加却引起平均光子数减小, 但在另一特定光强区域平均光子数又随激发数增大而增加。总体来说, 平均光子数随光强增大总体上是增加的, 只是平均光子数的增加与减小在不同光强区域交替出现。这是多个量子态之间干涉的结果。

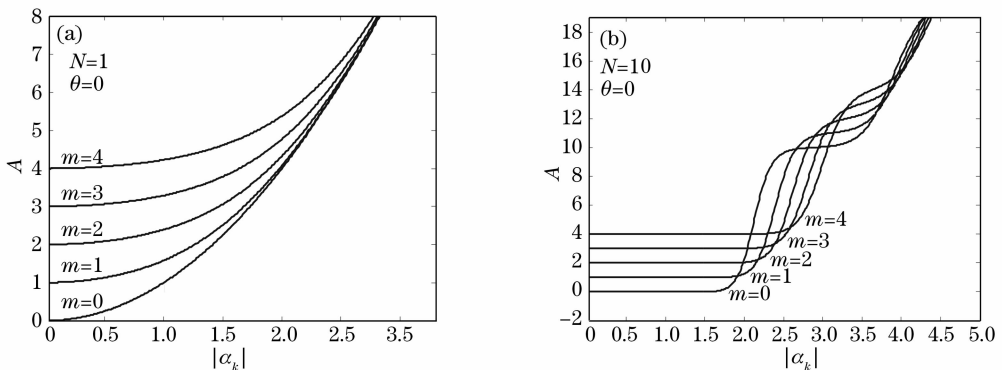


图 1 平均光子数 A 随 $|\alpha_k|$ 变化的关系曲线

Fig. 1 Relation between mean photon number A and parameter $|\alpha_k|$

3.2 亚泊松统计

引入函数

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\langle a^{+2} a^2 \rangle}{\langle a^+ a \rangle^2} - \langle a^+ a \rangle = \\ &= \frac{\sum_{k,l=0}^N (\alpha_l^* \alpha_k)^{2-m} \left[\exp(\alpha_l^* \alpha_k) - \sum_{n=0}^{m-3} \frac{(\alpha_l^* \alpha_k)^n}{n!} \right]}{\left[\sum_{k,l=0}^N (\alpha_l^* \alpha_k)^{-m} \left[\exp(\alpha_l^* \alpha_k) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\alpha_l^* \alpha_k)^n}{n!} \right] \right]^2} - \frac{\sum_{k,l=0}^N (\alpha_l^* \alpha_k)^{1-m} \left[\exp(\alpha_l^* \alpha_k) - \sum_{n=0}^{m-2} \frac{(\alpha_l^* \alpha_k)^n}{n!} \right]}{\sum_{k,l=0}^N (\alpha_l^* \alpha_k)^{-m} \left[\exp(\alpha_l^* \alpha_k) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\alpha_l^* \alpha_k)^n}{n!} \right]}, \end{aligned} \quad (7)$$

描述光子数分布偏离泊松分布的程度。 $Q > 0$ 时为超泊松分布; $Q = 0$ 时为泊松分布; $Q < 0$ 时为亚泊松分布, 此分布对应于非经典效应。选取一定的参量函数 Q 随 $|\alpha_k|$ 的变化如图 2 所示。

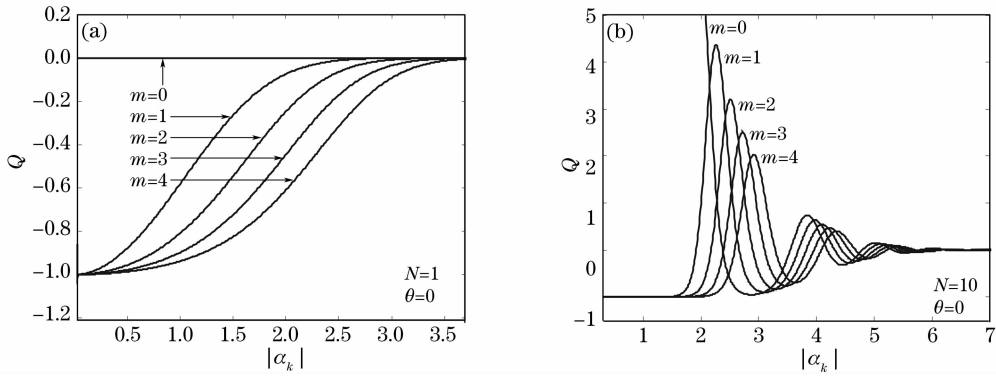


图 2 Q 随 $|\alpha_k|$ 变化的关系曲线

Fig. 2 Relation between Q and $|\alpha_k|$

图 2(a) 是 $N=1$ 激发相干态^[6], 可以看出, 由于光子激发使得光子数分布呈现出强烈的亚泊松分布。且随激发数的增加, 亚泊松分布特性进一步增强, 但 $|\alpha_k|$ 增加即光场强度增大时却引起了亚泊松分布程度的减弱; 图 2(b) 为十个量子态在同一圆 (半径为 $|\alpha_k|$) 上的叠加, 发现叠加的结果使某些区域的亚泊松分布增强, 有些地方的亚泊松分布减弱了, 这是叠加的干涉效应的结果。与图 2(a) 相比, $|\alpha_k|$ 较小时曲线上对应 Q 的值出现了明显的波动, 每条曲线都出现了一系列波峰, m 值的增大使这些峰值依次减小的同时向右平移。 $|\alpha_k|$ 较大时曲线趋于平缓, 同 $N=1$ 时的情况类似, 依然呈现出稳定的亚泊松分布。

3.3 压缩效应

单模光场振幅的两个正交分量算符为

$$u_1 = \frac{1}{2}(a + a^+), \quad u_2 = \frac{1}{2i}(a - a^+), \quad (8)$$

对于给定的状态, 若光场 $u_i (i = 1, 2)$ 分量的涨落函数 $S_i (i = 1, 2)$ 满足

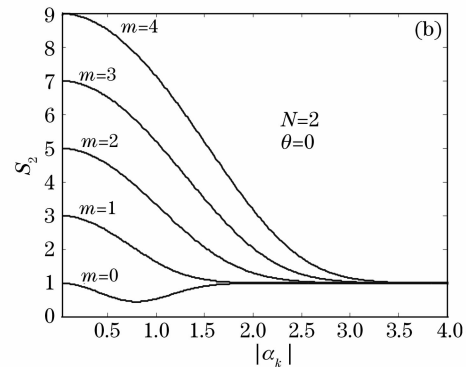
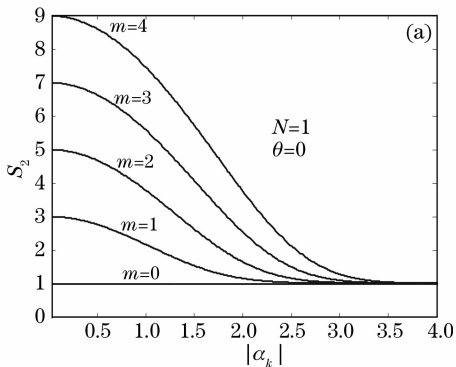


图 3 S_2 随 $|\alpha_k|$ 变化的关系曲线

Fig. 3 Relation between S_2 and $|\alpha_k|$

$$S_i = 4 \langle (\Delta u_i)^2 \rangle = 4 \langle u_i^2 \rangle - 4 \langle u_i \rangle^2 < 1, \quad (9)$$

则称光场 $u_i (i = 1, 2)$ 分量的涨落被压缩。以 S_2 为例来讨论增光子圆态的正交压缩。通过计算可得

$$\langle a^p \rangle = \lambda_N^2 \exp(-|\alpha_0|^2) \sum_{k,l=0}^N \alpha_k^p (\alpha_l^* \alpha_k)^{-m} \times \left[\exp(\alpha_l^* \alpha_k) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\alpha_l^* \alpha_k)^n}{n!} \right], \quad (10)$$

$$\langle a^{+p} \rangle = \lambda_N^2 \exp(-|\alpha_0|^2) \sum_{k,l=0}^N \alpha_l^{+p} (\alpha_l^* \alpha_k)^{-m} \times \left[\exp(\alpha_l^* \alpha_k) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\alpha_l^* \alpha_k)^n}{n!} \right], \quad (11)$$

把(6)式,(10)式,(11)式代入(9)式并取 $i = 2$ 得出 $S_2(r, m, N)$, 选取 $\theta = 0$ 和一定的 m, N 值画出了 $S_2(r, m, N)$ 随 $|\alpha_k|$ 变化的曲线图。图 3 给出的是不同 m 值时压缩参量 $S_2 (i = 2)$ 随 $|\alpha_k|$ 的变化规律。从图 3(a) 看到, $N = 1$ 时曲线没有出现 $S_2 < 1$ 的情况, 则光场的这一正交分量没有被压缩, 随着 m 的渐渐增大, S_2 值进而增大, 其中曲线 $m = 0$ 对应于相干态的情况, 其它几条曲线为激发相干态的情况。

图 3(b) 对应于 $N = 2$ 的情况, $m = 0$ 对应于薛定谔猫态。可以看出, 只有薛定谔猫态出现了压缩效应, 而薛定谔猫态的激发态没有出现压缩现象。进一步的研究表明, 当 $N > 2$ 时, 改变激发数 m , 不能使其出现正交振幅压缩特性(未画出), 这说明激发抑制

了圆态的压缩效应。

4 维格纳函数

取相干态表象下维格纳函数的形式^[14]

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{2}{\pi^2} \exp(2|\alpha|^2) \int \langle -\beta | \rho | \beta \rangle \exp[-2(\beta \alpha^* - \beta^* \alpha)] d^2\beta, \tag{12}$$

这里
则

$$\rho = \sum_{k,l=1}^N a^{-m} |a_k\rangle \langle a_l| (a^+)^{-m}$$

$$\begin{aligned} W(\alpha, \alpha^*) &= \frac{2}{\pi^2} \exp(2|\alpha|^2) \int \sum_{k,l=1}^N \langle -\beta | a^{-m} |a_k\rangle \langle a_l| (a^+)^{-m} | \beta \rangle \exp[-2(\beta \alpha^* - \beta^* \alpha)] d^2\beta = \frac{2}{\pi^2} \lambda_N^2 \exp(2|\alpha|^2) \times \\ &\int \sum_{k,l=1}^N \exp(-r^2) \sum_{n,p=0}^{\infty} \frac{\alpha_k^n \alpha_l^{*p}}{\sqrt{(n+m)!(p+m)!}} \langle -\beta | n+m \rangle \langle p+m | \beta \rangle \exp[-2(\beta \alpha^* - \beta^* \alpha)] d^2\beta = \\ &\frac{2}{\pi^2} \lambda_N^2 \exp(-r^2 + 2|\alpha|^2) \sum_{k,l=1}^N (\alpha_l^* \alpha_k)^{-m} \exp(-|\beta|^2) \left[\exp(-\beta^* \alpha_k) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-\beta^* \alpha_k)^n}{n!} \right] \times \\ &\left[\exp(\beta \alpha_l^*) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(\beta \alpha_l^*)^n}{n!} \right] \exp[-2(\beta \alpha^* - \beta^* \alpha)] d^2\beta = \frac{2}{\pi} \lambda_N^2 \exp(-r^2 - 2|\alpha|^2) \sum_{k,l=1}^N (A - B - C + D), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= (\alpha_l^* \alpha_k)^{-m} \exp(-\alpha_l^* \alpha_k + 2\alpha^* \alpha_k + 2\alpha \alpha_l^*), \\ B &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{n!} \alpha_l^{*n-m} \alpha_k^{-m} (2\alpha - \alpha_k)^n \exp(2\alpha^* \alpha_k), \\ C &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{n!} \alpha_l^{*m-n} \alpha_k^{n-m} (2\alpha^* - \alpha_l^*)^n \exp(2\alpha \alpha_l^*), \\ D &= \sum_{n,p=0}^{m-1} (-1)^n \alpha_l^{*p-m} \alpha_k^{n-m} (2\alpha)^{p-n} \sum_{x=0}^n \frac{(-4|\alpha|^2)^x}{x!(n-x)!(p-n+x)!}, \end{aligned} \tag{13}$$

式中

$$\alpha_k = r \exp[i(\theta + 2\pi k/N)], \alpha_l = r \exp[i(\theta + 2\pi l/N)].$$

图 4(a) 给出 $n = 10, m = 0$ 时即为圆态的维格纳函数图像。可以看出, 维格纳函数出现了负值区域, 意味着叠加的量子态为非经典态, 这主要是多个态

的叠加而产生干涉效应的结果。图 4(b) 是 $n = 10, m = 4$ 时维格纳函数的图像, 此时增光子圆态的维格纳函数分布呈现多峰结构, 叠加干涉效应变得更为明显。进一步计算表明, 波峰的个数随着激发数 m 的增加而增加。图 5 为 $n = 10, m = 4, |\alpha_k| = 2.6$ 时

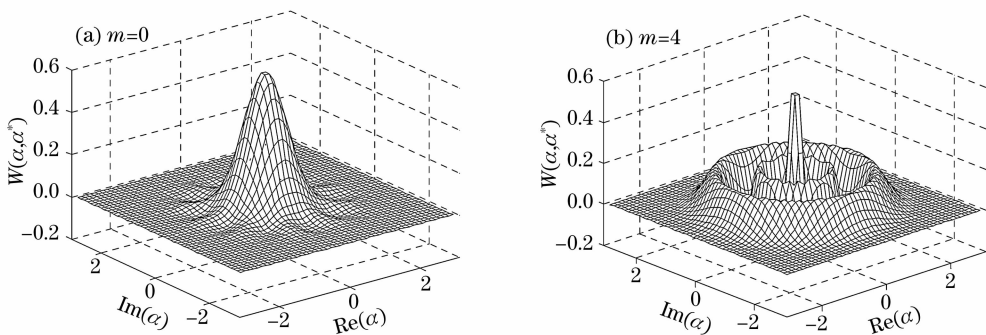


图 4 当 $\theta = 0, N = 10, |\alpha_k| = 1.5$ 时增光子圆态的维格纳函数图像
Fig. 4 Curve of Wigner function when $\theta = 0, N = 10, |\alpha_k| = 1.5$

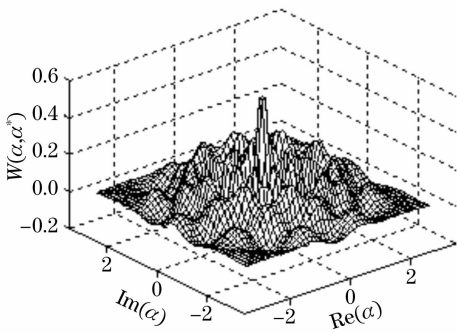


图 5 当 $\theta=0, N=10, |\alpha_k|=2.6, m=4$ 时增光子圆态的维格纳函数图像

Fig. 5 Curve of Wigner function of photon-adding circular state when $\theta=0, N=10, |\alpha_k|=2.6, m=4$

的维格纳函数图像,与图 4(b)比较只是 $|\alpha_k|$ 增大了,但此时增光子圆态的维格纳函数图像在相空间中发生了塌陷,已呈现出无规则的多峰结构。意味着随 $|\alpha_k|$ 的增大即光强增大,增光子圆态的量子干涉效应进一步增强。文献[9]中讨论了增光子偶相干态的维格纳函数,也得到了增光子偶相干态量子干涉效应随激发数 m 的增加而增强的规律,只是光强很弱时维格纳函数就已塌陷。这里 $N=10$ 时维格纳函数在光强较大时才出现塌陷。进一步计算模拟表明, N 取更大时维格纳函数也出现塌陷,只是在光强更大时才会出现。总之,在适当选择参量时,叠加数 N 不同的条件下增光子圆态的维格纳函数具有一致的变化规律。

5 结 论

引入了增光子圆态,即光子湮灭算符的逆算符作用到圆态上而产生的新量子态。显示出了很多不同于圆态的性质。讨论了增光子圆态在激发数变化和光强变化的情况下各自显示的非经典性质。结果表明,增光子圆态的平均光子数增加和减小交替地出现;压缩效应只在 $N=2, m=0$ 的情况下出现, $N=1$ 或大于 2 时,改变激发数均不出现压缩效应;单个相干态的激发态光子数分布呈现出很明显的亚泊松统计特性,而叠加态之间的干涉使得亚泊松统计特性分别被有规律地加强和减弱。维格纳函数图像中明显的负值区域显示出增光子圆态强烈的非经

典性质,且增光子圆态比圆态有更强的干涉效应。同时发现,选取适当的 $|\alpha_k|$,不同叠加个数的增光子圆态的维格纳函数都能呈现一致的干涉规律。

参 考 文 献

- Liu Youwen, Chen Changyuan. Quantum statistic properties of the superposition of the q -coherent states [J]. *Acta Optica Sinica*, 1999, **19**(11): 1459~1463
刘友文,陈昌远. 叠加 q -相干态的量子统计性质[J]. *光学学报*, 1999, **19**(11): 1459~1463
- Ma Zhimin, Ma Aiqun, Zeng Ran *et al.*. Superposition of two arbitrary coherent states and its quantum statistical properties [J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(5): 2049~2058
马志民,马爱群,曾然等. 任意两个相干态的叠加及其量子统计性质[J]. *物理学报*, 2005, **54**(5): 2049~2058
- V. Bužek, A. Vidiella-Barranco, P. L. Knight. Superpositions of coherent states: Squeezing and dissipation[J]. *Phys. Rev. A*, 1992, **45**(9): 6570~6585
- J. Janszky, P. Domokos, P. Adam. Coherent states on a circle and quantum interference [J]. *Phys. Rev. A*, 1993, **48**(3): 2213~2219
- G. S. Agarwal, K. Tara. Nonclassical properties of states generated by the excitation on a coherent state [J]. *Phys. Rev. A*, 1991, **43**: 492~497
- Wei Lianfu, Wang Sunjin, Jie Quanlin. Excited states of coherent state and their nonclassical properties [J]. *Chin. Sci. Bull.*, 1997, **42**(20): 1686~1688
- Meng Xiangguo, Wang Jisuo, Lang Baolong. Phase properties for the photon-added even and odd coherent states [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(4): 721~726
孟祥国,王继锁,梁宝龙. 增光子奇偶相干态的相位性质[J]. *光学学报*, 2007, **27**(4): 721~726
- Sun Jingwen, Yang Qingyi, Ding Liang'en. Anti-bunching effects of the photon-depleted squeezed vacuum states [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(11): 1573~1576
孙敬文,杨庆怡,丁良恩. 减光子压缩真空态的反群聚效应[J]. *光学学报*, 2005, **25**(11): 1573~1576
- Meng Xiangguo, Wang Jisuo, Lang Baolong. Wigner function for the photon-added even and odd coherent state [J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, **56**(4): 2160~2167
孟祥国,王继锁,梁宝龙. 增光子奇偶相干态的 Wigner 函数 [J]. *物理学报*, 2007, **56**(4): 2160~2167
- Wagner Duarte José, Salomon S. Mizrahi. Generation of circular states and Fock states in a trapped ion [J]. *Quantum Semiclass Opt.*, 2000, **2**: 306~314
- J. Janszky, P. Domokos, S. Szabo *et al.*. Quantum-state engineering via discrete coherent-states superpositions [J]. *Phys. Rev. A*, 1995, **51**(5): 4191~4193
- C. L. Mehta, Anil K. Roy, G. M. Saxena. Eigenstates of two-photon annihilation operators [J]. *Phys. Rev. A*, 1992, **46**(3): 1565~1572
- Fan Hongyi. Inverse operators in Fock space studied via a coherent-state approach [J]. *Phys. Rev. A*, 1993, **47**(5): 4521~4523
- Scully M O, Zubairy M S. *Quantum Optics* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 85