

文章编号: 0253-2239(2008)05-0965-06

# (1 + 1) 维强非局域非线性介质中的高阶模呼吸子

赵 昕 楚存坤 张东升 马芳芳

(泰山医学院, 山东 泰安 271016)

**摘要** 基于强非局域非线性介质中的 Snyder-Mitchell 模型, 利用分离变量法得到了(1+1)维光束传输的厄米-高斯型解析解。比较厄米-高斯型解析解与非局域非线性薛定谔方程的数值解, 证实了, 在强非局域条件下, 该厄米-高斯型解与数值解完全吻合。对厄米-高斯光束的传输特性进行研究, 结果表明, 光束束宽会出现周期性的压缩或者展宽现象。并且得到了实现厄米-高斯光束稳定传输的临界功率、厄米-高斯孤子解及传输常量, 临界功率与厄米-高斯光束的阶数无关, 但传输常量随阶数的增加而增加。高斯呼吸子和高斯孤子就是基模厄米-高斯呼吸子和基模厄米-高斯孤子。

**关键词** 非线性光学; 高阶模呼吸子; 分离变量法; 厄米-高斯

中图分类号 O431.1 文献标识码 A

## (1 + 1)-Dimensional Higher-Order Mode Breathers in Strongly Nonlocal Nonlinear Media

Zhao Xin Chu Cunkun Zhang Dongsheng Ma Fangfang

(Tai Shan Medical College, Taian, Shandong 271016, China)

**Abstract** Based on the Snyder-Mitchell model, with the method of separation of variables, exact analytical Hermite-Gaussian (HG) solutions are obtained in strongly nonlocal nonlinear media. The comparison of analytical solutions with numerical simulations of the nonlocal nonlinear Schrödinger equation (NNLSE) shows that the analytical HG solutions are in good agreement with the numerical simulations in the case of strong nonlocality. The evolution of the HG beam in strongly nonlocal nonlinear media is discussed. The results demonstrate that the width of the HG breathers vibrates periodically as they travel. Furthermore, the critical power for the soliton propagation, the solution of HG solitons, and the propagation constant are obtained. The critical power does not change with the mode number, and the propagation constant increases as the mode number increases. Gaussian breathers and Gaussian solitons can be treated as special cases of HG breathers and HG solitons.

**Key words** nonlinear optics; higher-order mode breathers; method of separation of variables; Hermite-Gaussian

## 1 引 言

空间光孤子是介质的非线性效应和光束的衍射效应精确平衡的产物, 若非线性效应引起的光束的自聚焦与光的衍射效应不能相互抵消但又相差不多时, 光束束宽就会作周期性的压缩或者展宽, 这种束宽作周期“振荡”的光束就称为呼吸子(Breathers)。光束在非局域非线性介质中传输时满足非局域非线性薛定谔方程(Nonlocal nonlinear Schrödinger equation, NNLSE)。1997 年 Snyder 和 Mitchell 在

极强非局域条件下, 将非局域非线性薛定谔方程近似为一线性方程(被称为 Snyder-Mitchell 模型), 非线性问题被巧妙地转化成了线性问题进行处理, 并发现了线性(空间光)孤(Accessible solitons)及非稳态的呼吸子<sup>[1]</sup>, 由此引发了人们对非局域非线性介质中光束传输特性的研究。Peccianti 等<sup>[2]</sup>在向列相液晶(NLC)中观察到了稳定传输的孤子光束, 被称之为 nematicons, 并且从理论上和实验上均已证明, 向列相液晶就是一种强非局域性的非线性介质。

收稿日期: 2007-10-19; 收到修改稿日期: 2007-11-16

基金项目: 泰山医学院 2007 年度青年科学基金(962)资助课题。

作者简介: 赵 昕(1979-), 女, 山东泰安人, 硕士, 主要从事强非局域空间光孤子及呼吸子等方面的研究。

E-mail: zhao.xin79@163.com

Hutsebaut 等<sup>[3]</sup>在向列相液晶中观察到了可以稳定传输的高阶模孤子。Guo 等<sup>[4]</sup>又在理论上得到了非稳态的高斯呼吸子精确解析解,以及稳态的厄米-高斯光孤子解<sup>[5]</sup>。

本文基于强非局域非线性介质中的 Snyder-Mitchell 模型,利用分离变量法得到了(1+1)维光束传输的厄米-高斯型解析解。并且讨论了厄米-高斯光束在强非局域非线性介质中的演化规律。通过比较发现,在强非局域的条件下,该厄米-高斯型解析解和非局域非线性薛定谔方程的数值解符合得相当好。还得到了实现厄米-高斯光束稳定传输的临界功率及传输常量。高斯呼吸子和高斯孤子就是基模厄米-高斯呼吸子和基模厄米-高斯孤子。

## 2 傍轴条件下 Snyder-Mitchell 模型的厄米-高斯型解

(1+1)维非局域非线性介质中光束传输满足非局域非线性薛定谔方程<sup>[1,4]</sup>

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k\eta\varphi \int R(x-x') |\varphi(x,z)|^2 dx = 0, \quad (1)$$

其中  $\varphi = \varphi(x, z)$  为傍轴光束,  $z$  为沿传输方向的纵向坐标,  $\mu = 1/2k$ ,  $k$  为介质中不包含非线性的波数 ( $k = \omega n_0/c$ ,  $n_0$  为介质中线性折射率)。 $\eta$  为材料常量,  $\eta > 0$ 、 $\eta < 0$  分别相应于聚焦介质和散焦介质。 $R$  是归一化的实响应函数。

在强非局域非线性条件下,非局域非线性薛定谔方程可以简化为 Snyder-Mitchell 线性模型<sup>[1,4]</sup>:

$$i2k \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - k^2 \eta P_0 x^2 \varphi = 0, \quad (2)$$

其中  $\gamma (> 0)$  是与响应函数  $R$  相关的材料参量,  $P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x, 0)|^2 dx$  为光束在  $z = 0$  处的入射功率。

高阶模光束假设为基模函数与某一函数的乘积,形式如下,试探解设为<sup>[11,12]</sup>

$$\varphi = F(x, z) \exp \left[ -i p(z) + i \frac{k}{2p(z)} x^2 \right], \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式,可得

$$F \left[ \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{q} \right) + \frac{1}{q^2} + \eta P_0 \right] x^2 + F \left( \frac{dp}{dz} + \frac{i}{2q} \right) + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{i2kx \partial F}{q \partial x} + i2k \frac{\partial F}{\partial z} \right) = 0. \quad (4)$$

函数  $p(z)$  和  $q(z)$  可以为任一形式。但不管  $p(z)$  和

$q(z)$  的表达式如何,若试探解中的函数  $F(x, z)$  为常量时,高阶模函数就变成了特例——基模函数,但仍是(4)式的解,所以  $p(z)$  和  $q(z)$  必须满足方程<sup>[12]</sup>

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{q} \right) + \frac{1}{q^2} + \eta P_0 = 0, \quad (5a)$$

$$\frac{dp}{dz} + \frac{i}{2q} = 0. \quad (5b)$$

将(5)式代入(4)式,可得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{i2kx \partial F}{q \partial x} + i2k \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (5c)$$

(5)式的解为

$$q = \frac{q_0 \cos \beta_0 z + (1/\beta_0) \sin \beta_0 z}{-q_0 \beta_0 \sin \beta_0 z + \cos \beta_0 z}, \quad (6)$$

$$p = -\frac{i}{2} \ln \left( q_0 \cos \beta_0 z + \frac{1}{\beta_0} \sin \beta_0 z \right), \quad (7)$$

其中  $\beta_0^2 = \eta P_0$ 。将(6)式和(7)式代入试探解(3)式,可得

$$\varphi = F \frac{1}{|q_0 \cos \beta_0 z + (1/\beta_0) \sin \beta_0 z|^{1/2}} \times \exp \left[ \frac{ikx^2 (-q_0 \beta_0 \sin \beta_0 z + \cos \beta_0 z)}{2[q_0 \cos \beta_0 z + (1/\beta_0) \sin \beta_0 z]} + i\phi \right], \quad (8)$$

其中

$$\phi = \frac{1}{2} \arctan \frac{\text{Re}[q_0 \cos \beta_0 z + (1/\beta_0) \sin \beta_0 z]}{\text{Im}[q_0 \cos \beta_0 z + (1/\beta_0) \sin \beta_0 z]}. \quad (9)$$

由  $q$  参量的 ABCD 矩阵可知,只有在二次方折射率介质中,  $q$  参量才存在稳态解<sup>[11]</sup>。对于本文所研究的强非局域克尔介质,折射率呈实二次函数分布<sup>[1]</sup>,所以  $q$  存在稳态解。当  $q$  不随  $z$  变化时,即  $dq/dz = 0$  时,可以取得稳态解。由(6)式可得,稳态解为  $q = i/\beta_0$ ,是纯虚数。由此可知,  $q_0$  也应取得纯虚数,即

$$q_0 = -is, \quad (10)$$

式中  $s$  为任意实数。将(9)式、(10)式代入(8)式,可得

$$\varphi = F \frac{A'}{\sqrt{\omega}} \exp \left( -\frac{x^2}{2\omega^2} + icx^2 + i\phi \right), \quad (11)$$

式中  $A'$  为一常量,束宽  $\omega$ 、波前曲率  $c$  和相位  $\phi$  分别为

$$\omega^2 = \frac{s^2 \cos^2 \beta_0 z + (1/\beta_0^2) \sin^2 \beta_0 z}{ks}, \quad (12a)$$

$$c = \frac{k\beta_0 (1 - s^2 \beta_0^2) \sin 2\beta_0 z}{4(s^2 \beta_0^2 \cos^2 \beta_0 z + \sin^2 \beta_0 z)}, \quad (12b)$$

$$\phi = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{1}{s\beta_0} \tan \beta_0 z \right). \quad (12c)$$

令初始束宽为  $w_0$ , 则由(12a)式可得

$$s = kw_0^2. \quad (13)$$

由(12a)式可以得到束宽不变的稳定条件  $s^2\beta_0^2 = 1$ , 由此实现此高阶模光束稳定传输的临界功率:

$$P_c = \frac{1}{k^2\gamma\eta w_0^4}. \quad (14)$$

将(13)式、(14)式代入(12a)式~(12c)式, 得到

$$w^2 = w_0^2 \left( \frac{P_c}{P_0} \sin^2 \beta_0 z + \cos^2 \beta_0 z \right), \quad (15)$$

$$c = \frac{k\beta_0 (P_c/P_0 - 1) \sin 2\beta_0 z}{4[\cos^2 \beta_0 z + (P_c/P_0) \sin^2 \beta_0 z]}, \quad (16)$$

$$\phi = -\frac{1}{2} \arctan \left( \sqrt{\frac{P_c}{P_0}} \tan \beta_0 z \right). \quad (17)$$

(5c)式中, 由于  $q$  是  $z$  的函数, 显然不能直接分离变量求解, 需要作如下变量代换:

$$\xi = a(z)x, \quad \zeta = z, \quad (18)$$

将(18)式代入(5c)式, 并利用前面已得的参量关系

$$\frac{1}{q} = \frac{i}{kw^2} + \frac{2c}{k}, \text{ 可以得到}$$

$$a^2(z) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \left\{ -\frac{2}{w^2} + 2i \left[ 2c + \frac{k}{a(z)} \frac{da(z)}{dz} \right] \right\} \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + i2k \frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0. \quad (19)$$

(19)式能分离变量求解的条件是

$$a(z) = a_0/w, \quad (20a)$$

和

$$2c + \frac{k}{a(z)} \frac{da(z)}{dz} = 0. \quad (20b)$$

将(16)式代入(20b)式, 并求解微分方程得

$$a(z) = \frac{b_0}{\sqrt{2k w_0 \beta_0 w}} = \frac{a_0}{w},$$

式中  $a_0, b_0$  均为任意常量。由此可见(20a)式与(20b)式的条件相同, (19)式能分离变量求解。令  $a(z) = 1/w$ , 代入(19)式, 得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + 2ikw^2 \frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0, \quad (21)$$

令  $F = X(\xi)\Theta(\zeta)$ , 将(21)式分离变量得

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial X}{\partial \xi} + 2nX = 0, \quad (22a)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} + \frac{in}{kw^2} \Theta = 0, \quad (22b)$$

其中  $n$  为整数。(22a)式为厄米方程, 其解为厄米多项式<sup>[13]</sup>。上述两式的解分别为

$$X = H_n(\xi) = H_n\left(\frac{x}{w}\right), \quad (23a)$$

$$\Theta = \exp\left[-in \arctan\left(\sqrt{\frac{P_c}{P_0}} \tan \beta_0 z\right)\right], \quad (23b)$$

综合上述结果, 将(15)式~(17)式、(23a)式及(23b)式都代入(11)式, 可以得到(1+1)维厄米-高斯型解

$$\varphi = \frac{C_n H_n\left(\frac{x}{w}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right) \times \exp(icx^2) \exp[i(2n+1)\phi], \quad (24)$$

式中  $C_n = [P_0/(\sqrt{\pi}2^n n!)]^{1/2}$  是归一化常量。 $P_c, w, c$  和  $\phi$  分别由(14)式~(17)式给出, 这四个参量的取值均与阶数  $n$  无关。

### 3 (1+1)维厄米-高斯型解的讨论

假设介质是自聚焦介质并且其响应函数为高斯型:

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}w_m} \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right),$$

式中  $w_m$  为响应函数的相关长度。 $\alpha = w_{0n}/w_m$  表示材料的非局域程度, 其中厄米-高斯光束初始束宽  $w_{0n}$  由光束束宽的二阶距定义得到  $w_{0n} = \sqrt{2n+1}w_0$ , 其中  $w_0$  为基模厄米-高斯光束的初始束宽。 $\alpha$  越小, 材料的非局域程度越强。显然, 当  $w_m$  一定时,  $\alpha$  的取值随着厄米-高斯光束阶数的增加而增加, 材料的非局域程度随之变弱。因此, 当厄米-高斯光束的阶数  $n$  足够大时, 强非局域的条件就不再成立, 高阶的厄米-高斯型解也就变得没有意义。对变量进行归一化(无量纲化)变换:

$$Z = \frac{z}{w_0^2 k}, \quad X = \frac{x}{w_0}, \quad \Phi = kw_0 \eta^{1/2} \varphi.$$

本文所做图形均应用以上响应函数和归一化变换, 并且非局域程度的取值均为  $\alpha = 0.1$ 。

#### 3.1 厄米-高斯呼吸子

从束宽的表达式(15)式可以得出, 厄米-高斯光束束宽  $w$  是纵向传输坐标  $z$  的周期函数。当  $P_0 > P_c$  时, 介质的非线性效应大于光束的衍射效应, 光束束宽做初始压缩的周期性变化; 当  $P_0 < P_c$  时, 介质的非线性效应小于光束的衍射效应, 光束束宽做初始展宽的周期变化。以上关于束宽的演化规律均可以从图1中得出。所以厄米-高斯型解(24)式即为厄米-高斯呼吸子解。

当  $n=0$  时, (24)式简化为基模厄米-高斯呼吸子, 即高斯呼吸子:

$$\varphi_0 = \frac{\sqrt{P_0}}{(\sqrt{\pi}w)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right) \exp[i(cx^2 + \phi)]. \quad (25)$$

(25)式与文献[4]中的(13)式完全符合。将厄米-高

斯型解(24)式与高斯型解(25)式进行比较,可以得出厄米-高斯光束与高斯光束的波前曲率  $c(z)$  的表

达式完全相同,相位除去厄米-高斯光束的附加相位  $\Theta(z)$  部分, $\phi(z)$  的表达式也完全相同。

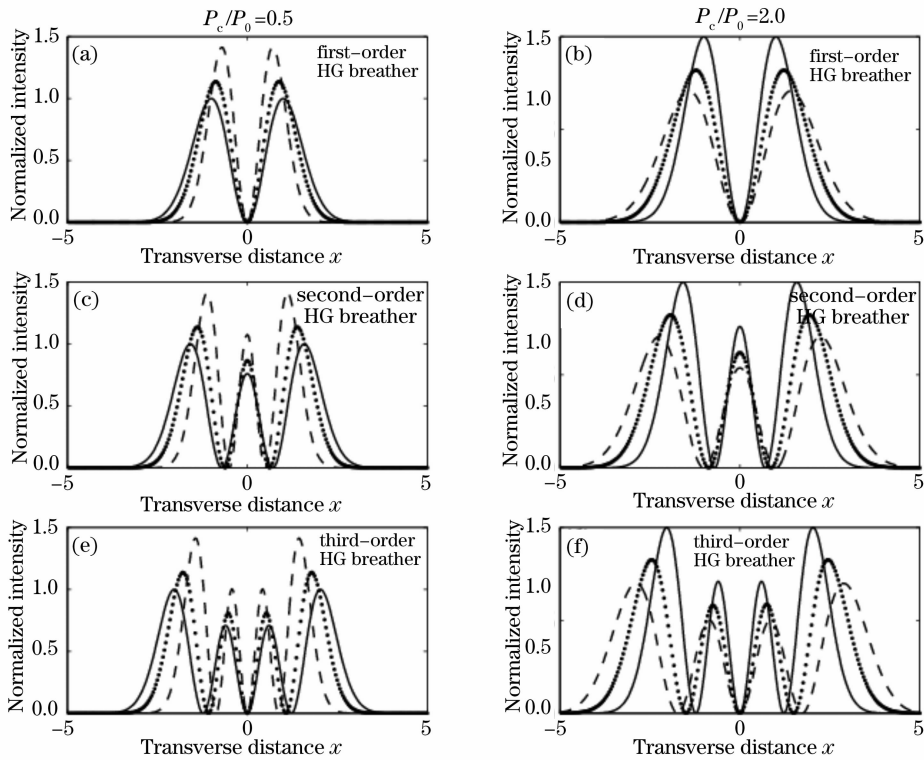


图1 (1+1)维厄米-高斯呼吸子归一化光强图。实线、虚线、点线分别代表光束传输到  $Z=0, Z=T/2, Z=3T/4$  处的归一化光强,光束的传输周期  $T=\pi\sqrt{P_c/P_0}$

Fig. 1 Normalized intensities of the (1+1)-dimensional HG breather propagation. The beam profile are taken respectively at the position  $Z=0$  (solid line),  $Z=T/2$  (dashed line),  $Z=3T/4$  (dotted line), where  $T=\pi\sqrt{P_c/P_0}$

### 3.2 厄米-高斯光孤子

当  $P_0 = P_c$  时,介质的非线性效应与光束的衍射效应相平衡,厄米-高斯光束稳定传输,形成厄米-高斯光孤子,如图2所示。(24)式就简化为厄米-高斯光孤子的解析式:

$$\varphi_n = \frac{C_n}{\sqrt{\omega_0}} H_n\left(\frac{x}{\omega_0}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\omega_0^2}\right) \exp(-i\beta_n z), \quad (26)$$

其中传输常量  $\beta_n$  为

$$\beta_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\beta_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\eta\gamma P_0}, \quad (27)$$

可以看出,传输常量  $\beta_n$  随着阶数  $n$  的增加而增加。此结果与文献[5]中所得结论(15)式和(16)式完全符合。

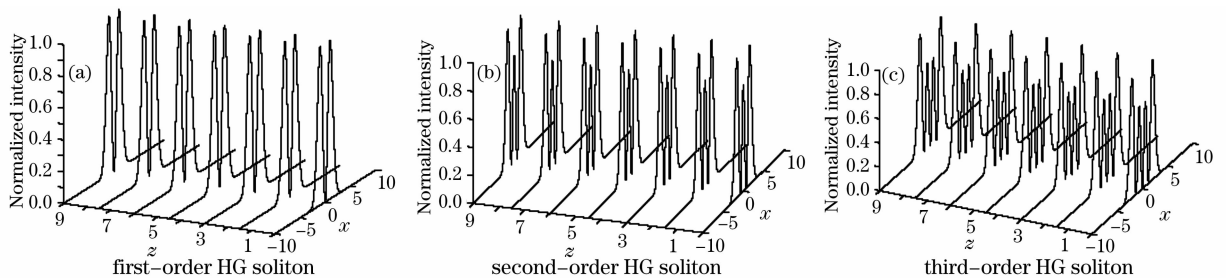


图2 (1+1)维厄米-高斯孤子传输的归一化光强图

Fig. 2 Normalized intensities of (1+1)-dimensional HG soliton propagation

### 3.3 厄米-高斯型解析解与非局域非线性薛定谔方程的数值解的比较

厄米-高斯型解(24)式是 Snyder-Mitchell 线性

模型(2)式的精确解析解,但却是非局域非线性薛定谔方程(1)式的近似解。图3对厄米-高斯型解析解与非局域非线性薛定谔方程的数值模拟结果进行了

比较。从图 3 可以看出,数值解和解析解重合的较好,尤其是当入射功率较小时,两者精确重合。当入

射功率  $P_0$  和材料的非局域程度  $\alpha$  一定时,数值解和解析解随着阶数  $n$  的增加,重合程度有所降低。

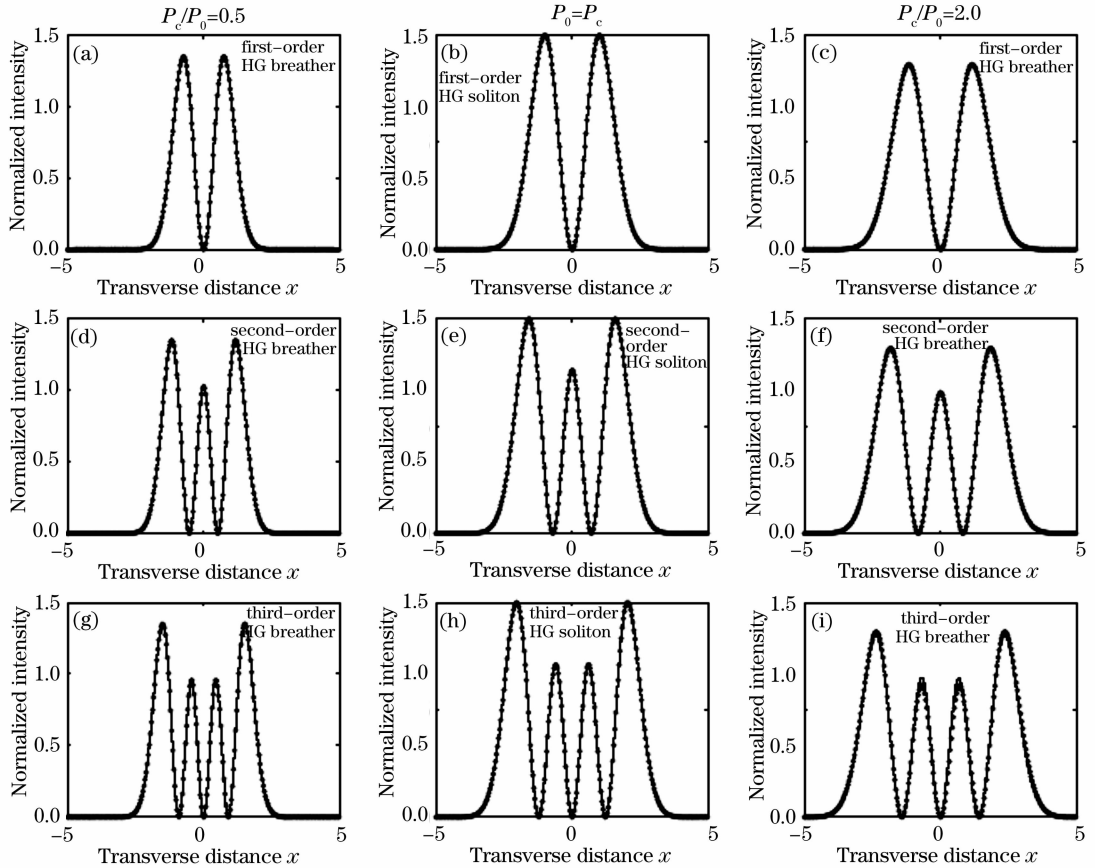


图 3 厄米-高斯光束传输到  $Z=8$  处的归一化光强比较图。点线、实线分别代表(1+1)维厄米-高斯呼吸子和孤子在高斯型响应介质中的解析解和数值解

Fig. 3 Comparison of analytical solution (dotted line) with numerical (solid line) for the (1+1)-dimensional HG breather and soliton propagation in the Gaussian-shaped response material, and the propagation  $Z=8$

## 4 结 论

讨论了强非局域空间厄米-高斯光束的演化规律。基于强非局域非线性介质中的 Snyder-Mitchell 模型,利用分离变量法分别得到了(1+1)维光束传输的厄米-高斯呼吸子解。通过比较发现,在强非局域的条件下,该厄米-高斯型解析解和非局域非线性薛定谔方程的数值解符合得相当好。还得到了实现厄米-高斯光束稳定传输的临界功率,临界功率与厄米-高斯光束的阶数无关,但传输常量随阶数的增加而增加。高斯呼吸子和高斯孤子就是基模厄米-高斯呼吸子和基模厄米-高斯孤子。

## 参 考 文 献

1 Allan W. Snyder, D. John Mitcher. Accessible solitons[J]. *Science*, 1997, **276**(6): 1538~1541

2 M. Peccianti, A. D. Rossi, G. Assanto *et al.*. Electrically assisted self-confinement and waveguiding in planar nematic liquid crystal cells[J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2000, **77**(1): 7~9

3 X. Hutsebaut, C. Cambournac, M. Haelterman *et al.*. Single-component higher-order mode solitons in liquid crystals[J]. *Opt. Commun.*, 2004, **233**: 211~217

4 Qi. Guo, Boren Luo, Fahuai Yi *et al.*. Large phase shift of nonlocal spatial solitons[J]. *Phys. Rev. E*, 2004, **69**(1): 016602-1~9

5 Zhang Xiapiang, Guo Qi. Analytical solution in the Hermite-Gaussian form of the beam propagating in the strong nonlocal media[J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(7): 3178~3182

张霞萍,郭 旗. 强非局域非线性介质中光束传输的厄米-高斯解[J]. *物理学报*, 2005, **54**(7): 3178~3182

6 Zhang Tao, Hu Wei, Long Xuewen *et al.*. Experimental observation of strong nonlocal optical spatial solitons in nematic liquid crystals[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(1): 143~147

张 涛,胡 巍,龙学文等. 向列相液晶中强非局域空间光孤子的实验观察[J]. *光学学报*, 2007, **27**(1): 143~147

7 Liu Jinlong, Chen Jinhua, Li Hai *et al.*. Family of super-Gaussian beams spatial optical solitons in strong non-local nonlinear media[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(7): 1261~1266

- 1265  
刘金龙, 陈金华, 李 海 等. 强非局域非线性介质中的超高斯空间光孤子族[J]. 光学学报, 2007, **27**(7): 1261~1265
- 8 Wang Xinghua, Guo Qi. Propagation properties of hyperbolic secant shaped optical beam in strongly nonlocal media[J]. *Chin. J. Lasers*, 2006, **33**(5): 645~649  
王形华, 郭 旗. 双曲正割型光束在强非局域介质中的传输特性[J]. 中国激光, 2006, **33**(5): 645~649
- 9 Wang Xinghua, Guo Qi, Xie Xiqun. Analysis of Gaussian beam parameters evolution law in strongly nonlocal media[J]. *Chin. J. Lasers*, 2005, **32**(8): 1059~1062  
王形华, 郭 旗, 谢逸群. 强非局域介质中高斯光束参量演化规律的分析[J]. 中国激光, 2005, **32**(8): 1059~1062
- 10 Wang Xinghua, Guo Qi, Xie Yiqun. Propagation properties the paraxial Gaussian beam in strongly nonlocal media [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(6): 848~854  
王形华, 郭 旗, 谢逸群. 傍轴高斯光束在强非局域介质中的传输特性[J]. 光学学报, 2005, **25**(6): 848~854
- 11 Zhang Keqian, Li Dejie. *Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics* [M]. 2nd ed., Beijing: Publishing company of Electronics Industry, 2001. 587~590  
张克潜, 李德杰. 微波与光电子学中的电磁理论[M]. 第二版, 北京: 电子工业出版社, 2001. 587~590
- 12 Anthony A. Tovar. Production and propagation of cylindrically polarized Laguerre-Gaussian laser beams[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1998, **15**(10): 2705~2711
- 13 Zeng Jinyan. *Introduction to Quantum Mechanics* [M]. 2nd ed., Beijing: Peking University Press, 1999. 76~78  
曾谨言. 量子力学导论[M]. 第二版, 北京: 北京大学出版社, 1999. 76~78