

文章编号: 0253-2239(2008)05-0870-06

# 波前编码成像系统景深延拓扩展率的研究

潘 超<sup>1,2</sup> 陈家璧<sup>1</sup> 张荣福<sup>1</sup> 庄松林<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 上海理工大学光学与电子信息工程学院, 上海 200093  
<sup>2</sup> 黄石理工学院电气与电子信息工程学院, 湖北 黄石 435003)

**摘要** 研究三次相位板的波前编码光学系统,发现在一定的条件下系统调制传递函数(MTF)对波前编码系统的离焦不敏感,才能得到波前编码系统的景深。对比传统光学系统的景深,得到波前编码系统的景深延拓扩展率的表达式。分析空间频率取值范围和三次相位板系数 $\alpha$ ,发现当 $\alpha=20\pi$ 时,波前编码系统可以将传统光学系统的景深扩大 60 倍以上。

**关键词** 信息光学; 景深延拓; 波前编码; 三次相位掩膜; 光学传递函数; 调制传递函数

中图分类号 O438 文献标识码: A

## Extension Ratio of the Depth of Field for Wavefront Coding Imaging System

Pan Chao<sup>1,2</sup> Chen Jiabi<sup>1</sup> Zhang Rongfu<sup>1</sup> Zhuang Songlin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> College of Optics and Electronics Information Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China  
<sup>2</sup> School of Electric and Electronic Information Engineering, Huangshi Institute of Technology, Huangshi, Hubei 435003, China

**Abstract** By studying the optical transfer function (OTF) of wavefront coding (WFC) imaging system with cubic phase mask, we find that modulation transfer function (MTF) of WFC system is defocus-independent under a special condition. Compared with the traditional optical system, a formula of extension ratio of the depth of field (DoF) for WFC imaging system is obtained. Through analyzing the range of spatial frequency and the coefficient of phase term  $\alpha$ , the conclusion is drawn that the DoF of WFC imaging system can be extended more than 60 times when  $\alpha=20\pi$ .

**Key words** information optics; field depth extending; wavefront coding; cubic phase mask; optical transfer function; modulation transfer function

## 1 引 言

成像光学系统的分辨力和景深都与系统的出瞳有关,出瞳变大,分辨力能提高而景深减小。光学工作者一直在研究通过确定出瞳的大小提高成像光学系统景深的方法。1995 年 Dowski 等<sup>[1]</sup>提出了波前

编码(WFC)成像技术<sup>[1]</sup>,不仅能在不降低分辨力的条件下扩大光学系统的景深,而且在一定程度上可抑制各种像差,并且减小由温度变化和安装引起的误差<sup>[2,3]</sup>,从而减少光学系统中元件的个数,使系统尺寸变小、重量变轻、成本降低。目前,该技术已在多个领域得到了广泛的应用<sup>[4~14]</sup>。

收稿日期: 2007-09-14; 收到修改稿日期: 2007-11-02

基金项目: 国家 973 计划(2007CB935303, 2005CB724304)、国家自然科学基金(60778031)和高等学校博士学科点专项科研基金(20050252004)资助课题。

作者简介: 潘 超(1967—),男,湖北鄂州人,博士研究生,主要从事信息光学方面的研究。

E-mail: panchao6350665@126.com

导师简介: 庄松林(1940—),男,江苏溧阳人,中国工程院院士,教授,主要从事光学工程方面的研究。

E-mail: slzhuang@yahoo.com

波前编码实现景深延拓的基本思想是:在光学系统出瞳上引入相位掩膜,改变出瞳处的波面形状,使光学系统的调制传递函数对离焦量不敏感。尽管由于相位掩膜的引入使得原来不离焦时的点扩展函数偏离  $\delta$  函数,导致不离焦时的成像性能变差,但是相位掩膜的引入同时也使得离焦时的点扩散函数与不离焦时的点扩散函数近似相同。使得成像过程中,在相当大的一个景深范围内,所成的像有相同的模糊特性。只要接收器具有足够的分辨力,能够把模糊的图象信号,包括原图像的所有信息全部接收并转化为数字图像信号,利用先验的相位掩膜知识,可以通过数字信号处理的方法解调出原信号。也就是说,无论原来不离焦时的图像,还是离焦时的图像,都可以通过适当的数字滤波恢复出原清晰图像,从而扩大系统的景深。

波前编码成像系统将模拟编码方法与数字解码技术相结合,解决了传统光学成像系统存在的内在矛盾。但是,该技术能在多大程度上延拓系统的景深呢? Dowski 等<sup>[1,2]</sup>从数值模拟和实验研究的角度提到,该项技术可以使光学系统的景深增加一个数量级。然而,由于对于该技术所建立的数理模型不十分完善,还没有能够从理论上解决这个问题。

本文通过分析三次相位板的波前编码光学系统,发现波前编码系统在一定的条件下,才能使调制传递函数对离焦不敏感,基于这个条件能够得到波前编码系统的景深。和传统光学系统的景深进行比较,得到了波前编码系统的景深延拓扩展率的表达式。通过分析空间频率取值范围和相位项系数  $\alpha$ ,发现当  $\alpha=20\pi$  时,波前编码系统能够将传统光学系统的景深扩大 60 倍。在提高自由曲面加工精度后,进一步提高  $\alpha$  值,景深延拓扩展率还可更大。计算机模拟结果说明了本文理论分析的正确性。

## 2 景深延拓扩展率的理论分析

### 2.1 波前编码系统的基本原理

传统光学系统对离焦比较敏感,离焦很小时,光学调制传递函数(MTF)值变化较小,能够在像面上得到质量良好的像;但是,离焦稍微变大,系统的调制传递函数值明显下降,并很快降至零点。调制传递函数零值会使该空间频率的信息丢失,从而无法传递该频率所对应的图像信息,使得系统成像质量变得极差。波前编码光学系统在光学成像系统的出射光瞳上增加一个非球面相位掩模板,常用的相位掩模板是三次相位板。当光瞳是边长为  $L$  的正方

形时,三次相位掩模板的光瞳相位调制函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp[j\alpha(x^3 + y^3)] & |x| \leq 1, |y| \leq 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases} \quad (1)$$

式中  $x, y$  是归一化光瞳坐标。

如图 1 所示<sup>[9]</sup>,用虚线表示的传统光学系统的调制传递函数在对焦和离焦两种情况下相差很大,对焦时调制传递函数缓慢减小,离焦时调制传递函数在空间频率到达 25 lp/mm 时就降到了零点。在对出瞳波前编码以后,用实线表示的调制传递函数在对焦和离焦两种情况下,无论是在滤波前(细实线)还是滤波后(粗实线),调制传递函数都很接近。而且在数字滤波图像还原后,离焦截止频率超过了传统光学系统的一倍以上。

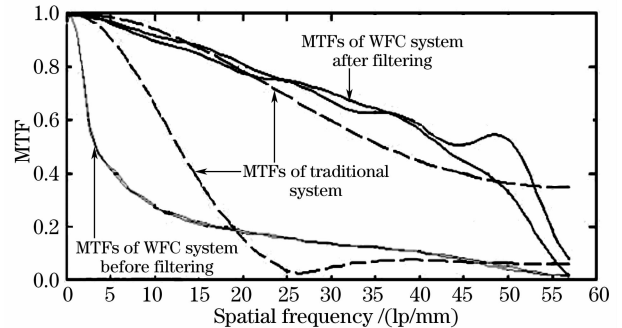


图 1 传统光学系统和波前编码系统的调制传递函数  
Fig. 1 Modulation transfer functions of traditional and wavefront coding optical system

### 2.2 传统光学系统的景深

对于传统光学系统,离焦时广义光瞳函数可以表示为

$$P(x, y) = \begin{cases} \exp\left[j \frac{k\epsilon}{2} (x^2 + y^2)\right], & \text{in pupil} \\ 0, & \text{out of pupil} \end{cases}$$

式中  $\epsilon$  表示离焦程度的物理量

$$\epsilon = \left| \frac{1}{d_i + \Delta} - \frac{1}{d_i} \right| \approx \frac{\Delta}{d_i^2}, \quad (2)$$

式中  $d_i$  为从出瞳到像平面的距离,  $\Delta$  为离焦像面离开像平面的距离,即离焦量。

根据瑞利判据,清晰成像时孔径边缘上的最大光程差不应大于波长的四分之一,对于边长为  $L$  的正方形光瞳,孔径边缘上的最大光程差  $W_{20}$  为

$$W_{20} = \epsilon L^2 / 8, \quad (3)$$

能够清晰成像要求的离焦量必须满足

$$\Delta \leq 2\lambda d_i^2 / L^2. \quad (4)$$

因为可以向前后两个方向离焦,习惯上把  $2\Delta$  作为传

统光学系统的景深。

### 2.3 波前编码光学系统的景深

从(1)式可以看出,三次相位板的解析表达式是可分离函数。在计算系统的光学传递函数(OTF)时可以将  $x$  分量和  $y$  分量分开,作为一维情况进行分析。由于在  $x$  和  $y$  两坐标方向上光学传递函数形式完全一样,结果很容易推广到二维情况。

一维情况下,离焦系统的光学传递函数为

$$H(f_x) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(x + \frac{\lambda d_i f_x}{2}\right) P^*\left(x - \frac{\lambda d_i f_x}{2}\right) \times \exp\left(j2\pi \frac{8d_i f_x W_{20}}{L^2} x\right) dx, \quad (5)$$

(5)式中的空间坐标  $x$  和空间频率  $f_x$  都是实际值而不是用归一化值。若以实际坐标代替(1)式中的归一化坐标,则光瞳相位调制函数的一维形式为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(j\alpha' x^3), & |x| \leq L/2 \\ 0, & \text{other} \end{cases} \quad (6)$$

式中

$$\alpha' = 8\alpha/L^3. \quad (7)$$

根据(5)式和(6)式,加入三次相位板的光学传递函数为

$$H(f_x) = \frac{1}{2L} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x}{L - \lambda d_i |f_x|}\right) \times \exp\left\{j\left[\alpha' \lambda d_i f_x \left(3x^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 d_i^2 f_x^2\right) + 2\pi \frac{8d_i f_x W_{20}}{L^2} x\right]\right\} dx, \quad (8)$$

为计算方便,设

$$f(x) = \alpha' \lambda d_i f_x \left(3x^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 d_i^2 f_x^2\right) + 2\pi \frac{8d_i f_x W_{20}}{L^2} x, \quad (9)$$

$$g(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{L - \lambda d_i |f_x|}\right). \quad (10)$$

为了简化指数函数中的  $f(x)$ ,将满足  $df(x)/dx = 0$  的点记作  $x_0$ ,则有

$$x_0 = -\frac{8\pi W_{20}}{3\alpha' \lambda L^2}, \quad (11)$$

将  $f(x)$  在  $x_0$  处展开成级数,由于  $f(x)$  的三次及以上的导数都为零,所以展开式只有两项。故化简成为

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) (x - x_0)^2. \quad (12)$$

而根据(10)式,只要  $x$  在光瞳重叠区内  $g(x)$  的值就为 1,否则为 0。因此,只要  $x$  在光瞳重叠区内,就可

以用  $g(x_0)$  的代替  $g(x)$ 。将(12)式代入(8)式得到

$$H(f_x) = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{2\pi}{k f''(x_0)}} g(x_0) \times \exp\left\{j\left[k f(x_0) + \frac{\pi}{4}\right]\right\}, \quad (13)$$

忽略常数相位因子  $\exp\left(\frac{\pi}{4}j\right)$ 。加入三次相位板后的系统的光学传递函数变为

$$H(f_x) = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{\pi}{3\alpha' \lambda d_i f_x}} \exp\left(j \frac{\alpha' \lambda^3 d_i^3 f_x^3}{4}\right) \times \exp\left(j \frac{64\pi^2 d_i f_x W_{20}^2}{9\alpha' \lambda L^4}\right). \quad (14)$$

在(14)式中,光学传递函数的模与离焦参量  $W_{20}$  无关。它有两个相位项,其中第一个相位项与离焦参量  $W_{20}$  无关,只有第二个相位项与  $W_{20}$  有关。而且,当  $\alpha' \gg 20$  时,该项也可以认为与离焦量近似无关。 $x$  在光瞳重叠区内,必须满足

$$|x_0| \leq \frac{L - \lambda d_i |f_x|}{2}. \quad (15)$$

结合(7)式、(11)式和(15)式得到最大允许的波象差为

$$W_{20} \leq \frac{3\alpha\lambda}{2\pi} \left(1 - \frac{\lambda d_i |f_x|}{L}\right). \quad (16)$$

因而波前编码系统的景深最大为

$$2\Delta' \leq \frac{d_i^2 24\alpha\lambda (1 - \lambda d_i |f_x|/L)}{\pi L^2}. \quad (17)$$

### 2.4 波前编码光学系统的景深延拓扩展率

比较(17)式和(4)式可以得到波前编码系统相对于传统光学系统的景深延拓扩展率

$$M = \frac{6\alpha(1 - \lambda d_i |f_x|/L)}{\pi}. \quad (18)$$

可以看出,景深延拓扩展率  $M$  的大小取决于空间频率的取值范围和三次相位掩模板中相位项的系数  $\alpha$ 。但空间频率达到或超过非相干截止频率时,景深延拓扩展率  $M$  将降低到零。因为这种情况下,连正确调焦都不能成像,该频率的二维图象完全不能通过光学系统成像,景深为零,任何扩展都是不可能存在的。将(18)式变换得到

$$|f_x| \leq \frac{L}{\lambda d_i} \left(\frac{\pi M}{6\alpha} - 1\right), \quad (19)$$

这也意味着,当系数  $\alpha$  和要求的扩展率  $M$  的大小确定以后,能够得到景深延拓的最大空间频率就被确定下来了,这对于在工程中应用波前编码方法延拓景深的设计是很重要的。为了能够在同样条件下比较景深延拓光学系统的性能,需要选择一个共同的

空间频率作为标准。由图 1 可以看出,在一般可以实现的工艺条件下,当空间频率小于相干截止频率时,波前编码系统在经数字滤波后的调制传递函数值比传统光学系统在对焦情况下的调制传递函数值大很多,但是当空间频率大于相干截止频率时,波前编码系统的调制传递函数值急剧下降。因此,本文确定相干截止频率的空间频率作为评价景深延拓扩展率时需要的频率标准。对于边长为  $L$  的矩型孔径,其相干截止频率为

$$f_c = L/(2\lambda d_i),$$

代入(18)式可以得到

$$M = 3\alpha/\pi, \quad (20)$$

$\alpha$  的取值与相位板的加工技术有关,若将文献[4]中  $\alpha = 20\pi$  代入(20)式可以得到,相对于传统成像系统波前编码系统景深能够扩大 60 倍。

### 3 景深延拓扩展率的计算机模拟

对于一个光学成像系统,(2)式~(4)式定义的几个参量都可以表达系统的景深或离焦,选用其中由于离焦造成的最大波象差来作为计算机模拟的景深参量。但(3)式的定义和波长有关,为了使有关模拟具有可比性,定义与波长无关的离焦参量  $\psi$  和与波长无关的归一化空间频率  $u$  为

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} W_{20}, \quad u = \frac{\lambda d_i f_x}{L}. \quad (21)$$

对景深延拓扩展率的模拟计算用光学系统成像系统的“黑箱”模型<sup>[15]</sup>,在出瞳上进行孔径编码,可以使分析更具普遍性。作为比较的标准,首先计算出传统光学系统不同离焦时光学传递函数(OTF)与归一化空间频率的关系曲线(图 2)。可以看出,在传统光学系统中,当离焦参量  $\psi = \pi$ ,归一化空间频率不到 0.5 时调制传递函数已经出现了零值;当离焦参量  $\psi = 5\pi$ ,归一化空间频率小于 0.1 时,调制传递函数就变成了零。这时的光学系统已经不能对归一化空间频率小于 0.1 时很粗糙的图进行成像,尽管对于不离焦的图来说,这时的调制传递函数高达 90% 以上,成像十分清晰。

对波前编码光学成像系统,进一步计算其滤波前和滤波后的调制传递函数与归一化空间频率的关系曲线。波前编码系统对于所有不同的离焦值可以用同一个滤波器,这里对调制传递函数滤波采用的是简单逆滤波器。所用三次相位掩膜板波前编码的系数为  $\alpha = 20\pi$ 。在不同离焦下的调制传递函数如图 3 所示,当离焦量  $\psi$  分别为  $10\pi$ 、 $20\pi$  和  $30\pi$ ,归一

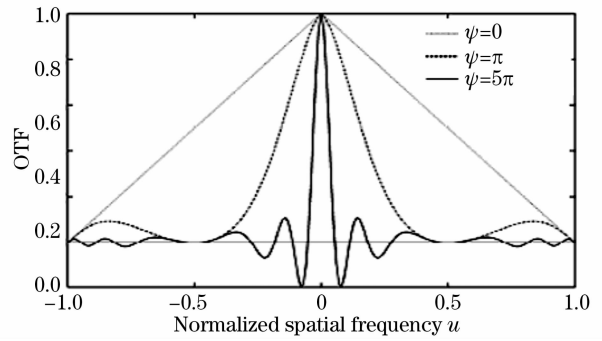


图 2 传统光学系统不同离焦时光学传递函数与归一化空间频率的关系曲线

Fig. 2 Optical transfer functions of traditional optical system with normalized spatial frequency for the three focus positions

化空间频率分别小于约 0.83、0.67 和 0.5 时,调制传递函数值大于 0.03。考虑到对于 0.03 的衬比度,一般探测器都可以探测到,因此在上述所有离焦量情况下,在相干截止频率以下的图像细节均可以被记录下来。当离焦量增大时,调制传递函数值大于 0.03 的空间频率范围逐渐变小是很正常的,但是在相干截止频率(归一化空间频率 0.5)以下的调制传递函数曲线的相似性为波前编码景深延拓技术提供了基础。

在图 4 中,当离焦参量  $\psi = 0$  时,波前编码系统滤波后恢复成像的调制传递函数曲线与理想调制传递函数曲线完全相同,验证了本文计算方法的正确性。当离焦参量  $\psi$  小于  $30\pi$  且归一化空间频率小于 0.5 时,波前编码系统滤波后的调制传递函数值都不低于没有离焦也没有波前编码的理想调制传递函数值。当  $\alpha$  等于  $20\pi$  且景深延拓扩展率  $M$  为 60 时,系统的离焦量  $\psi$  为  $30\pi$ ,波前编码系统滤波后的调制传递函数值稍低于理想调制传递函数值,其原因是稳相点处于光瞳重叠部分的边缘,但也可以较清晰成像。由此可见,模拟计算的结果证明(20)式是正确的。

比较图 4 和图 2 可以看出,滤波后波前编码系统的调制传递函数曲线比传统光学系统的调制传递函数曲线好。在传统光学系统中,当离焦参量  $\psi = \pi$  时,归一化空间频率不到 0.5 时,调制传递函数已经出现了零值。对于相干截止频率以上的图象细节,在波前编码系统中离焦参量  $\psi = 30\pi$  时,滤波后的调制传递函数值比相应的传统光学系统中离焦参量  $\psi = \pi$  的调制传递函数值大得多。波前编码光学成像系统的景深得到了很大的延拓。

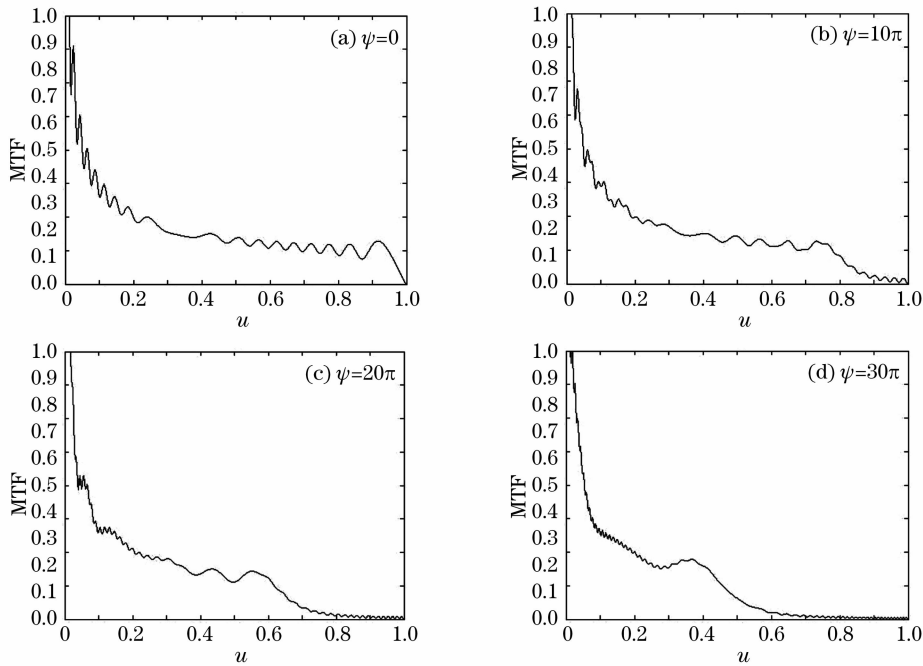


图 3 滤波之前不同离焦时调制传递函数与归一化空间频率的关系曲线

Fig. 3 Modulation transfer functions of wavefront coding optical system with normalized spatial frequency before filtering

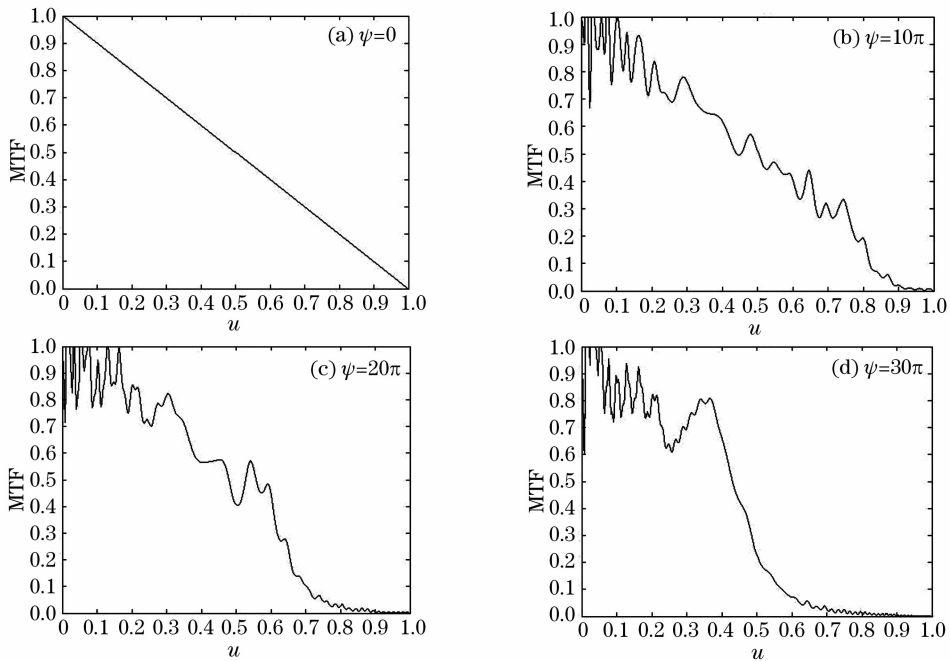


图 4 滤波之后不同离焦时调制传递函数与归一化空间频率的关系曲线

Fig. 4 Modulation transfer functions of wavefront coding optical system with normalized spatial frequency after filtering

## 4 结 论

分析了加入三次相位板的波前编码光学系统的光学传递函数,发现波前编码系统只有在一定的条件下才能使调制传递函数近似与离焦无关。根据这个条件得到波前编码系统的景深公式,并将三次相

位板波前编码系统的景深和传统光学系统的景深进行比较,得到波前编码系统的景深延拓扩展率的表达式。经过对空间频率取值范围和相位项的系数的分析表明,波前编码系统可以将传统光学系统的景深延拓 60 倍以上。计算机模拟三次相位板的波前

编码光学系统景深延拓的结果验证了本文理论分析的正确性。

### 参 考 文 献

- 1 Edward R. Dowski, W. Thomas Cathey. Extended depth of field through wavefront coding[J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(11): 1859~1866
- 2 Sara C. Tucker, W. Thomas Cathey, Edward R. Dowski *et al.*. Extended depth of field and aberration control for inexpensive digital microscope systems[J]. *Opt. Exp.*, 1999, **4**(11): 467~474
- 3 Hans B. Wach, Edward R. Dowski, W. Tomas Cathey. Control of chromatic focal shift through wavefront coding[J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(23): 5359~5367
- 4 Sara Bradburn, Wade Thomas Cathey, Edward R. Dowski *et al.*. Realizations of focus invariance in optical-digital systems with wavefront coding[J]. *Appl. Opt.*, 1997, **36**(35): 9157~9166
- 5 Daniel L. Marks, Ronald A. Stack, David J. Brady *et al.*. Three-dimensional tomography using a cubic-phase plate extended depth-of-field system[J]. *Opt. Lett.*, 1999, **24**: 253~255
- 6 Ramkumar Narayanswamy, Paulo E. X. Silveira, Harsha Setty *et al.*. Extended depth-of-field iris recognition system for a workstation environment[C]. *Proc. SPIE*, 2005, **5779**: 41~50
- 7 Robert Plemmons, Michael Horvath, Emily Leonhardt *et al.*. Computational imaging systems for iris recognition[C]. *Proc. SPIE*, 2004, **5559**: 346~357
- 8 Paulo E. X. Silveira, Ramkumar Narayanswamy. Signal-to-noise analysis of task-based imaging systems with defocus[J]. *Appl. Opt.*, 2006, **45**(13): 2924~2934
- 9 Edward R. Dowski, Gregory E. Johnson. Wavefront coding: a modern method of achieving high performance and/or low-cost imaging systems[C]. *Proc. SPIE*, 1999, **3779**: 137~145
- 10 Zhao Tingyu, Zhang Wenzhi, Ye Zi *et al.*. Design of wavefront coding system based on evaluation function of Fisher information[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(6): 1096~1101  
赵廷玉, 张文字, 叶子等. 应用费希尔信息量评价函数的波前编码系统设计[J]. *光学学报*, 2007, **27**(6): 1096~1101
- 11 Yang Qingguo, Liu Liren, Sun Jianfeng *et al.*. Property of wavefront coding imaging systems for extending the depth of field[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(12): 1807~1812  
阳庆国, 刘立人, 孙建锋等. 扩大景深的波前编码成像系统特性分析[J]. *光学学报*, 2006, **26**(12): 1807~1812
- 12 Chen Yanping, Zhang Wenzhi, Zhao Tingyu *et al.*. Imaging characteristics of wavefront coding system within spatial domain[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(8): 1425~1429  
陈燕平, 张文字, 赵廷玉等. 波前编码系统成像特性的空间域分析[J]. *光学学报*, 2007, **27**(8): 1425~1429
- 13 Chen Yanping, Zhang Wenzhi, Zhao Tingyu *et al.*. Spot diagram analysis for wavefront coding imaging systems with an odd-symmetrical phase plate[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(9): 1621~1627  
陈燕平, 张文字, 赵廷玉等. 奇对称型相位板波前编码成像系统的点列图分析[J]. *光学学报*, 2007, **27**(9): 1621~1627
- 14 Wenzhi Zhang, Yanping Chen, Tingyu Zhao *et al.*. Simple Strehl ratio based method for pupil phase mask's optimization in wavefront coding system[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2006, **4**(9): 515~517
- 15 Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics* [M]. 3rd ed., New York: Roberts and Company Publishers Inc., 2005. 128