

文章编号: 0253-2239(2008)03-0442-05

光衍射数值模拟中不同抽样方法的适用性分析

国承山 李传涛 洪正平 刘婷婷

(山东师范大学物理系, 山东 济南 250014)

摘要 基于标量衍射理论和快速傅里叶变换,分析了光衍射的数值模拟时可以采用的不同抽样方法及其适用性。理论分析表明,按照抽样对象的不同,存在三种适用范围不同的算法:传递函数抽样法、点扩展函数抽样法和加权函数抽样法。其适用范围分别为衍射距离小于、大于和等于特征距离的情况。在 Matlab 软件环境下给出了三种算法的模拟计算实例,并与相应的实验结果进行了比较,证明了理论分析的正确性。最后还给出了一种无需改变抽样点数和抽样间隔就可计算任意距离衍射过程的自适应抽样算法及其在数字全息再现中的应用实例。

关键词 傅里叶光学; 衍射; 抽样; 传递函数; 点扩展函数; 加权函数

中图分类号 O722 **文献标识码** A

Suitability of Different Sampling Methods for Digital Simulations of the Optical Diffraction

Guo Chengshan Li Chuantao Hong Zhengping Liu Tingting

(Department of Physics, Shandong Normal University, Jinan, Shandong 250014, China)

Abstract Sampling methods for digital simulations of the optical diffraction based on scalar diffraction theory and fast Fourier transform are analyzed. There exist three sampling methods according to the sampling objects; the transfer function sampling, the point-spread function sampling and the weighting function sampling. Theoretical analysis reveals that these sampling methods hold true in different ranges of diffractive distances, which can be distinguished by a feature diffraction distance. Under definite sampling space and sampling number, the sampling methods hold true only when the diffraction distance is smaller than, larger than and equal to the feature distance, respectively. For demonstration of the correctness of the theoretical analysis, a digital simulation based on Matlab software and an experimental result are given and discussed. Finally, an adaptive sampling algorithm is proposed for reconstruction of a digital hologram, which could be suitable for any diffraction distances.

Key words Fourier optics; diffraction; sampling; transfer function; point-spread function; weighting function

1 引言

在数字全息^[1-3]、数字干涉测量^[4,5]、衍射光学元件的设计^[6-8]等研究领域,经常涉及在计算机中对光学衍射过程进行数值计算或模拟的工作。因此,选择能够准确、快速地模拟光学衍射过程的算法在数字衍射光学领域有重要的实际意义。目前,比较常用的算法主要是利用标量衍射理论和快速傅里叶变换来实现的^[9,10]。由于这些算法中都要涉及与衍射距离有关的相位因子的抽样,为了满足抽样定理,需要根据衍射距离的变化减小抽样间隔和增加抽样点数。

本文基于标量衍射理论和离散傅里叶变换,理论分析了采用不同抽样对象的三种算法,比较了它们在抽样间隔和抽样点数一定的情况下在适用范围方面的差别;并在 Matlab 软件环境下对这三种算法进行了定量的计算机模拟,并给出了有关的实验结果。最后,进一步给出了一种无需改变抽样点数和抽样间隔就可计算任意距离衍射过程的自适应抽样算法。

2 衍射过程的数值模拟算法

自由空间光场衍射过程的计算机模拟算法虽然

收稿日期: 2007-05-30; 收到修改稿日期: 2007-08-09

基金项目: 国家自然科学基金(60678027)和山东省自然科学基金(Y2006A20)资助课题。

作者简介: 国承山(1958-),男,山东济南人,教授,博士,主要从事信息光学方面的研究。

E-mail: guochsh@sndu.edu.cn

从原理上都是基于标量衍射理论,但是在具体计算过程中抽样对象可以有不同的选择。在抽样点数目一定的情况下,按照抽样对象的不同,可以将衍射过程的计算机模拟算法分成三种:传递函数抽样法、点

扩展函数抽样法和加权函数抽样法。

2.1 传递函数抽样法

传递函数抽样法的基本抽样对象是输入光场 $u_i(x, y)$ 和衍射的角谱传递函数 $H(\xi, \eta)$, 即

$$\begin{cases} u_i(x, y) \rightarrow u_i(m\delta x, n\delta y), \\ H(\xi, \eta) = \exp[j2\pi z \sqrt{1/\lambda^2 - \xi^2 - \eta^2}] \rightarrow \exp[j2\pi z \sqrt{1/\lambda^2 - (p\delta\xi)^2 - (q\delta\eta)^2}], \end{cases} \quad (1)$$

式中 δx 和 δy 为入射平面上空间坐标 x, y 方向的抽样间隔, $\delta\xi$ 和 $\delta\eta$ 分别为相应的空间频谱面上空间频率坐标 ξ, η 方向的抽样间隔, λ 为入射光的波长, z 为入射面到输出面的距离, 即衍射距离, m, n 和 p, q 分别为空间和频率域上抽样点的顺序, 均为整数。根据抽样定理和离散傅里叶变换的性质, 空间坐标和空间频率坐标的抽样间隔应满足

$$\delta\xi = \frac{1}{M\delta x}, \quad \delta\eta = \frac{1}{N\delta y}, \quad (2)$$

式中 M 和 N 为抽样点数。入射光场经衍射距离 z 后在输出面上的光场分布为

$$u_z(m\delta x, n\delta y) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} [u_i(m\delta x, n\delta y)] H(p\delta\xi, q\delta\eta) \}. \quad (3)$$

式中 \mathcal{F} 和 \mathcal{F}^{-1} 分别为离散傅里叶变换和逆离散傅里叶变换符号。

2.2 点扩展函数抽样法

点扩展函数抽样法的基本抽样对象是输入光场 $u_i(x, y)$ 和衍射的点扩展函数 $h(x, y)$, 即

$$\begin{cases} u_i(x, y) \rightarrow u_i(m\delta x, n\delta y), \\ h(x, y) = \frac{\exp[jkz \sqrt{1 + (x/z)^2 + (y/z)^2}]}{j\lambda z [1 + (x/z)^2 + (y/z)^2]} \rightarrow \frac{1}{j\lambda z} \frac{\exp[jkz \sqrt{1 + (m\delta x/z)^2 + (n\delta y/z)^2}]}{[1 + (m\delta x/z)^2 + (n\delta y/z)^2]}. \end{cases} \quad (4)$$

在非涅耳近似条件下, (4) 式中的点扩展函数可简化为

$$h(x, y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left\{j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)\right\} \rightarrow \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left\{j \frac{k}{2z} [(m\delta x)^2 + (n\delta y)^2]\right\}. \quad (5)$$

此时, 输出光场的数值计算公式为

$$u_o(m\delta x, n\delta y) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} [u_i(m\delta x, n\delta y)] \mathcal{F} [h(m\delta x, n\delta y)] \}. \quad (6)$$

2.3 加权函数抽样法

加权函数抽样法的基本抽样对象是输入光场 $u_i(x, y)$ 和非涅耳衍射变换的加权因子, 即

$$\begin{cases} u_i(x, y) \rightarrow u_i(m\delta x, n\delta y), \\ \exp\left[j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)\right] \rightarrow \exp\left[j \frac{k}{2z} (m^2 \delta x^2 + n^2 \delta y^2)\right], \\ \exp[j\pi\lambda z (\xi^2 + \eta^2)] \rightarrow \exp[j\pi\lambda z (m^2 \delta\xi^2 + n^2 \delta\eta^2)]. \end{cases} \quad (7)$$

在距离 z 处的衍射光场的数值计算公式为

$$\begin{aligned} u_o(p\delta\xi, q\delta\eta) &= \frac{\delta x \delta y \exp(jkz)}{j\lambda z} \exp[j\pi\lambda z (p^2 \delta\xi^2 + q^2 \delta\eta^2)] \\ &\quad \mathcal{F} \left\{ u_i(m\delta x, n\delta y) \exp\left[j \frac{k}{2z} (m^2 \delta x^2 + n^2 \delta y^2)\right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

由于(7)式和(8)式中涉及的空间坐标和空间频率坐标的抽样间隔同样应满足(2)式的关系, 因此衍射光场实际空间坐标的抽样间隔须由如下公式确定:

$$\delta x' = \delta\xi \lambda z = \frac{\lambda z}{M\delta x}, \quad \delta y' = \delta\eta \lambda z = \frac{\lambda z}{N\delta y}. \quad (9)$$

显然, 此时衍射光场(或输出平面上)离散数据的抽

样间隔一般不等于输入光场(或入射面上)的抽样间隔。要想使入射光场和出射光场的抽样间隔保持一致, 对输入光场的抽样间隔必须作限定:

$$\delta x = \sqrt{\lambda z / M}, \quad \delta y = \sqrt{\lambda z / N}, \quad (10)$$

即此时输入光场的抽样间隔必须随衍射距离的改变而改变。

3 三种算法的适用范围分析

三种抽样算法虽然从原理上并没有本质差别,但在实际计算中却具有截然不同的适用范围。这主要是因为存在一个其相位因子与衍射距离有关的抽样函数,并且不同的抽样算法所对应的抽样函数的最大局域空间频率是不同的。根据一般相位因子的局域空间频率的定义:

$$\xi_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y), \quad \eta_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y), \quad (11)$$

点扩展函数抽样法和加权函数抽样法所对应的与衍射距离有关的抽样函数的局域空间频率可近似表示为

$$\xi_1 = \frac{x}{\lambda z} \text{rect}\left(\frac{x}{2L}\right), \quad \eta_1 = \frac{y}{\lambda z} \text{rect}\left(\frac{y}{2L}\right). \quad (12)$$

式中 L 为正方形的边长, rect 为矩形函数。假设输入面的抽样区域为一个边长为 L 的正方形区域,且 x 方向和 y 方向的抽样间隔相等,其上的最大局域空间频率为

$$\xi_{1m} = \eta_{1m} = L/(\lambda z) = B. \quad (13)$$

再根据抽样条件

$$\delta x = \delta y \leq \frac{1}{2B} = \frac{\lambda z}{2L}, \quad (14)$$

就可推出点扩展函数抽样法和加权函数抽样法的适用条件为

$$z \geq \frac{2\delta x L}{\lambda} = \frac{M\delta x^2}{\lambda}. \quad (15)$$

需要说明的是,对于加权函数抽样法,适用条件只是考虑了抽样函数中涉及空间域抽样的相位因子。由于(7)式中涉及频率域抽样的相位因子在(8)式中只是作为一个纯相位系数出现,并不涉及傅里叶变换运算,因此在讨论中可以不予考虑。

而对于传递函数抽样法,由于其与衍射距离有关的抽样函数的“局域空间频率”可近似表示为

$$\xi_1 = \lambda z \xi \text{rect}\left(\frac{\xi}{2L_s}\right), \quad \eta_1 = \lambda z \eta \text{rect}\left(\frac{\eta}{2L_s}\right), \quad (16)$$

式中 L_s 为空间频率域抽样区域的边长。给(16)式所示的“局域空间频率”加了引号,这是由于对传递函数的抽样是在空间频率域上进行的,(16)式给出的该抽样函数的“局域空间频率”实际上是一个具有长度单位的量。但在形式上,(14)式所示的抽样条件仍然成立。因此,通过与空间域抽样类似的分析可以得出传递函数抽样法的适用范围为

$$z \leq \frac{M\delta x}{2\lambda L_s} = \frac{M\delta x^2}{\lambda} = Z_c. \quad (17)$$

由(15)式和(17)式可见,对上述抽样算法,存在一个

可以作为适用判据的特征距离 Z_c 。当衍射距离 z 小于 Z_c 时,应采用传递函数抽样算法;而当衍射距离 z 大于 Z_c 时,采用点扩展函数抽样法则更为合适。对于加权函数抽样法,考虑到要使入射光场和出射光场的空间抽样间隔保持一致需满足(10)式,它只能适用于衍射距离 z 等于 Z_c 的特殊情况。

4 模拟与实验结果

在 Matlab 软件环境下利用上述三种抽样算法分别模拟了一个环形孔径衍射屏(如图 1 所示)在不同衍射距离处的衍射图样。具体模拟参量为:入射光为波长 $0.6328 \mu\text{m}$ 的垂直平面波,环形孔径的内外直径分别为 0.576 mm 和 1.152 mm ;抽样点数 $M = N = 256$,抽样间隔 $\delta x = \delta y = 18 \mu\text{m}$ 。由理论分析可知,在模拟参量条件下特征距离 Z_c 约为 131 mm 。图 2 分别给出了当实际衍射距离小于 Z_c 、等于 Z_c 和大于 Z_c 情况下采用不同抽样方法模拟得到的衍射图样。其中,图 2(a1)、(b1)和(c1)为分别采用传递函数抽样法、点扩展函数抽样法和加权函数抽样法模拟得到的衍射距离为 20 mm 时衍射光场的强度分布,图 2(a2)、(b2)和(c2)为衍射距离取 131 mm 时的衍射光强分布,而图 2(a3)、(b3)和(c3)则为衍射距离取 650 mm 时的衍射光强分布。作为比较,图 3 给出了图 1 所示的环形孔径衍射屏在 20 mm 、 131 mm 和 650 mm 处的衍射图样的实验结果,是将图 1 所示的环形孔径图案直接显示到一个程控高分辨液晶空间光调制器(LC-SLM)上,然后用准直激光束照明后在给定距离处用 CCD 面阵记录得到的。所用液晶空间光调制器的像素大小刚好也为 $18 \mu\text{m} \times 18 \mu\text{m}$ 。由于所用液晶空间光调制器像素的复振幅透射率存在一定的不均匀性和相干噪声,实际记录的衍射图样与理想的环形孔径的衍射图样相比也存在一定的相干噪声和不均性,但其衍射图样的强度分布规律还是很清楚的。



图 1 环形孔径衍射屏

Fig. 1 Annular aperture

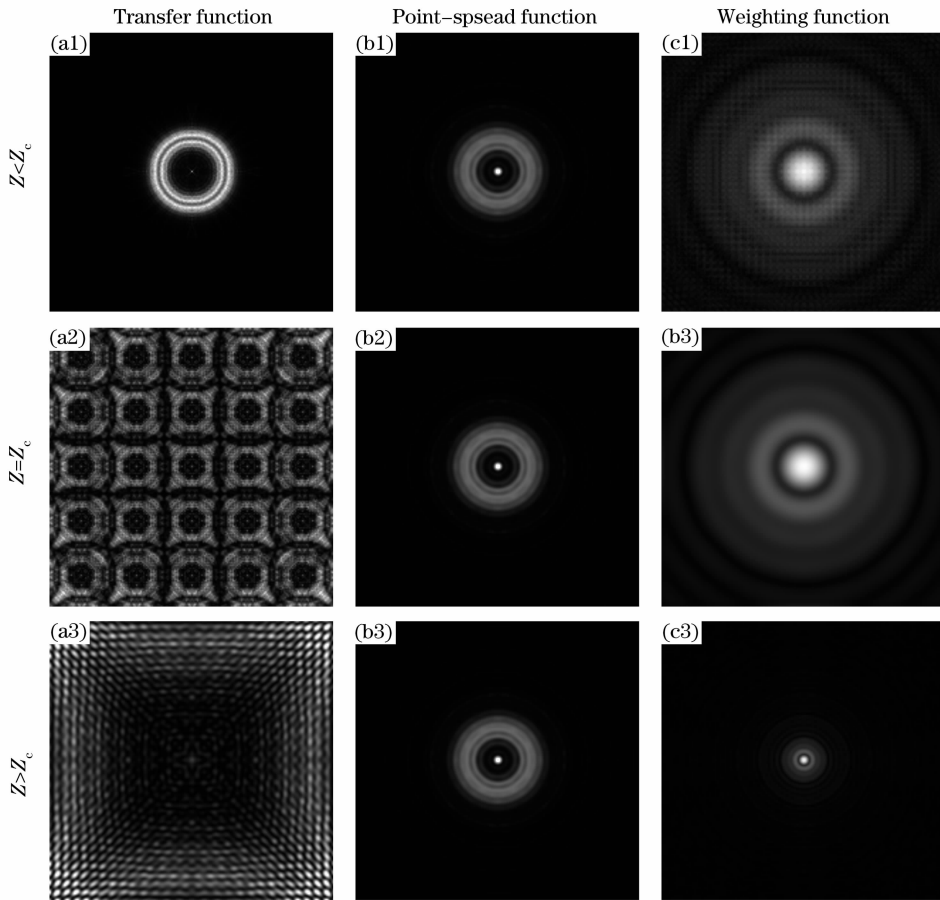


图 2 实际衍射距离小于 Z_c 、等于 Z_c 和大于 Z_c 情况下采用不同抽样方法模拟得到的衍射图样
 Fig. 2 Diffraction patterns simulated by use of the above sampling methods when the diffractive distance is less than Z_c , equal to Z_c and larger than Z_c , respectively

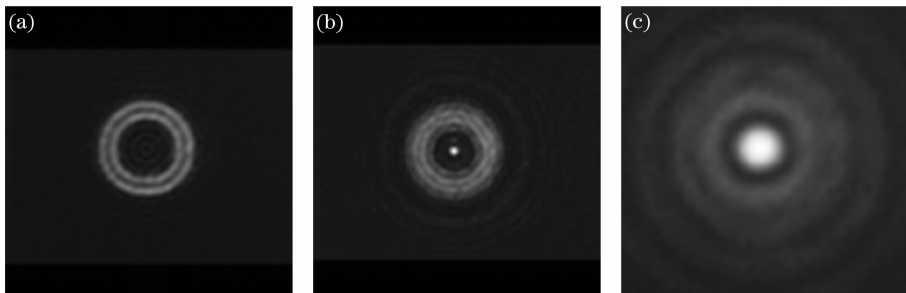


图 3 环形孔径衍射屏在衍射距离为 20 mm(a), 131 mm (b)和 650 mm (c)处实验得到的衍射图样
 Fig. 3 Diffraction patterns of the annular aperture when the diffractive distance is equal to 20 mm (a), 131 mm (b) and 650 mm (c)

比较实验和计算机模拟结果,可以看到,当衍射距离等于特征距离 Z_c 时,三种抽样方法得到的计算机模拟结果是相同的,并且与实验结果相一致。但是,当衍射距离向大于 Z_c 的方向增加时,用传递函数抽样法的模拟结果会出现一种越来越严重的网格“噪声”,而加权函数抽样法的模拟图样则会出现越来越严重的尺度压缩,只有点扩展函数抽样法的模拟结果一直与实验结果保持一致。当衍射距离向小

于 Z_c 的方向减小时,点扩展函数抽样法和加权函数抽样法的模拟结果与实验结果的偏差越来越明显,直至出现完全不同的强度分布图样,此时只有传递函数抽样法的模拟结果还能一直与实验结果保持一致。

利用三种抽样算法的适用范围存在的互补关系,可以以特征距离 Z_c 为判据建立一个适用于任意衍射距离的自适应抽样算法。其具体实现步骤如下:

- 1) 输入衍射屏或入射光场的离散数据。

2) 设定模拟参量,如波长 λ 、衍射距离 z 、抽样间隔 $(\delta x, \delta y)$ 、抽样点数 (M, N) 等。

3) 由(17)式计算特征距离 Z_c 。

4) 选择抽样方式。如果 $z \leq Z_c$,取传递函数抽样法;如果 $z > Z_c$,选择点扩展函数抽样法。

5) 利用快速傅里叶变换算法计算衍射输出光场。

在 Matlab 软件环境下通过 Matlab 编程证实了上述自适应抽样算法的实用性。作为应用实例,利用该算法设计了可以实现全空间扫描的数字全息再现程序。图 4 给出了基于该程序的数字全息再现实例,图 4(a)为用像素大小为 $6 \mu\text{m}$ 的互补性金属氧化物半导体(CMOS)面阵得到的离轴数字全息图,图 4(b)则为在物距未知的情况下通过全空间扫描得到的数字全息再现像。将该方法与自动聚焦算法^[11,12]相结合,可以进一步实现数字全息图的全自动聚焦成像。

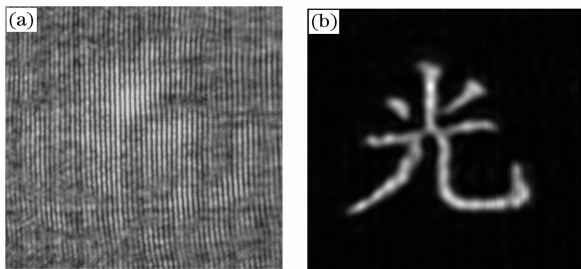


图 4 基于自适应抽样算法的数字全息再现实例。

(a) 数字全息图, (b) 数字全息再现像

Fig. 4 Example of a digital holographic reconstruction by use of the adaptive sampling algorithm, (a) digital hologram, (b) reconstructed image of digital hologram

5 结 论

基于标量衍射理论和快速傅里叶变换进行光衍射过程的数值模拟是数字衍射光学及其应用中比较常用的方法。在抽样间隔和抽样点数目一定的情况下,该数值模拟算法有三种不同的抽样方法,即传递函数抽样法、点扩展函数抽样法和加权函数抽样法。不同的抽样方法具有不同的适用范围。通过对抽样函数的局域空间频率分析,定义了一个用于判定上述几种抽样方法适用范围的衍射的特征距离。理论分析表明,传递函数抽样法适用于衍射距离小于特征距离的情况;点扩展函数抽样法适用于衍射距离大于特征距离的情况,而加权函数抽样法只适用于衍射距离等于特征距离的情况。在 Matlab 软件环境下利用三种抽样方法对一个环形孔径衍射屏的衍射光场进行了模拟计算,同时还利用程控高分辨液

晶空间光调制器和 CCD 数码相机实验记录了环形孔径衍射屏的衍射图样。通过数值模拟和实验结果的比较,证明了理论分析结果的正确性。还给出了一种无需改变抽样点数和抽样间隔就可计算任意距离衍射过程的自适应抽样算法及其在数字全息再现中的应用实例。

参 考 文 献

- Zhong Liyun, Zhang Yimo, Lü Xiaoxu *et al.*. The reconstruction of diffractive object digital hologram at a short distance[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2004, **2**(5): 265~267
- Zheng Chujun, Han Peng, Li Rong *et al.*. Theoretical analysis for numerical reconstruction of off-axis digital hologram based on angular spectrum diffraction[J]. *Laser J.*, 2006, **27**(1): 44~45
郑楚君, 韩鹏, 李榕等. 基于角谱衍射的离轴数字全息数值重建理论分析[J]. *激光杂志*, 2006, **27**(1): 44~45
- Cai Xiaou, Wang Hui, Li Yong. Study on digital hologram of frequency-change sampling[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(4): 481~484
蔡晓鸥, 王辉, 李勇. 数字全息图变频采样研究[J]. *光子学报*, 2004, **33**(4): 481~484
- Zhou Canlin, Kang Yilan. Deformation measurement by digital holography[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2004, **33**(2): 171~173
周灿林, 亢一澜. 数字全息干涉法用于变形测量[J]. *光子学报*, 2004, **33**(2): 171~173
- Ma Lihong, Wang Hui, Li Yong *et al.*. 3-D rebuilding based on numerical reconstruction of the hologram[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2006, **35**(4): 595~598
马利红, 王辉, 李勇等. 全息模拟再现像的三维重构[J]. *光子学报*, 2006, **35**(4): 595~598
- Qu Weijuan, Yan Aimin, Liu Yiren *et al.*. Fractional Talbot effect of 2D skewed periodic array[J]. *Chin. J. Lasers*, 2006, **33**(3): 356~360
曲伟娟, 闫爱民, 刘立人等. 二维斜周期阵列的分数泰伯效应[J]. *中国激光*, 2006, **33**(3): 356~360
- Zu Jifeng, Zhou Changhe, Xi Peng *et al.*. Wave-length-division and beam splitting element based on the Talbot effect[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(4): 431~433
祖继峰, 周常河, 席鹏等. 基于塔尔博特效应的分波器和分束器[J]. *光学学报*, 2003, **23**(4): 431~433
- Xue Dongmei, Liu Tingting, Guo Chengshan. Localized hollow beams generated through interference of double zero-order Bessel beams[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(5): 771~775
薛冬梅, 刘婷婷, 国承山. 基于零级贝塞尔光束干涉产生的局域空心光束[J]. *光学学报*, 2007, **27**(5): 771~775
- Xie Jianping, Fang Hui, Wang Shoutao *et al.*. Approach of near-field diffraction patterns by the sampling theorem[J]. *Acta Optica Sinica*, 1999, **19**(6): 785~790
谢建平, 方晖, 王守涛等. 近场衍射图样的抽样定理处理方法[J]. *光学学报*, 1999, **19**(6): 785~790
- Zheng Zhimin, Ding Tianhuai, Zhang Jianfu. Characteristics of aperture array diffraction and its application[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(2): 294~299
郑志敏, 丁天怀, 张建福. 小孔阵列衍射特性与应用[J]. *光学学报*, 2006, **26**(2): 294~299
- Zong Guanghua, Sun Minglei, Bi Shusheng *et al.*. Research on autofocus technique in micro-vision[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(9): 1225~1232
宗光华, 孙明磊, 毕树生等. 显微视觉自动聚焦研究[J]. *光学学报*, 2005, **25**(9): 1225~1232
- Sun Jie, Yuan Yuehui, Wang Chuanyong. Comparison and analysis of algorithms for digital image processing in autofocusing criterion[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(1): 35~39
孙杰, 袁跃辉, 王传永. 数字图像处理自动图像聚焦算法的分析和比较[J]. *光学学报*, 2007, **27**(1): 35~39