

文章编号: 0253-2239(2008)03-0549-07

# 奇偶对相干态的维格纳函数和层析图函数

孟祥国 王继锁 梁宝龙

(聊城大学物理系, 山东 聊城 252059)

**摘要** 利用纠缠态  $|\eta\rangle$  表象下的维格纳算符, 重构了奇偶对相干态的维格纳函数。根据维格纳函数在相空间中随变量  $\rho$  和  $\gamma$  的变化规律, 讨论了奇偶对相干态的非经典性质和量子干涉效应。研究发现, 奇偶对相干态总呈现非经典性质, 并且当  $q$  取奇数时, 奇偶对相干态更容易出现非经典性质。奇偶对相干态的量子干涉效应的显著程度与  $q$  取值有关, 但对于  $q$  的同一取值, 奇偶对相干态的量子干涉效应更为显著。利用纠缠态  $|\eta\rangle$  表象下的维格纳算符  $\Delta_{1,2}(\rho, \gamma)$  和纠缠态  $|\eta, \tau_1, \tau_2\rangle$  的投影算符之间满足的拉东变换, 获得了奇偶对相干态的量子层析图函数。

**关键词** 量子光学; 奇偶对相干态; 纠缠态表象; 维格纳函数; 层析图函数

中图分类号 O431.2 文献标识码 A

## Wigner Functions and Tomogram Functions of Even and Odd Pair Coherent States

Meng Xiangguo Wang Jisuo Liang Baolong

(Department of Physics, Liaocheng University, Liaocheng, Shandong 252059, China)

**Abstract** With the entangled state  $|\eta\rangle$  representation of the Wigner operator, Wigner functions for even and odd pair coherent states (EOPCs) are reconstructed. In terms of variations of Wigner functions with the parameters  $\rho$  and  $\gamma$  in the phase space, nonclassical properties and quantum interference effects of EOPCs are discussed. It is found that EOPCs always exhibit nonclassical properties, especially when  $q$  is odd. Quantum interference effects of EOPCs depend on the value of  $q$ , but for a fixed  $q$  quantum interference effects of the odd pair coherent state are more prominent. Based on the Radon transform between the entangled state  $|\eta\rangle$  representation and the project operator of the entangled state  $|\eta, \tau_1, \tau_2\rangle$ , the quantum tomogram functions for the EOPCs are obtained.

**Key words** quantum optics; even and odd pair coherent state; entangled state representation; Wigner function; tomogram function

### 1 引 言

众所周知, 一个量子态的演化可以用它的维格纳函数来描述, 因为它包含了量子态在整个相空间演化过程中的全部信息。但由于量子态的维格纳函数一般不能被直接测量, 因此希望通过一些可观测量来重构各种量子态的维格纳函数, 从而实现对它们的有效测量。量子态维格纳函数的重构和测量对研究量子体系的演化过程有着重要的意义。目前, 已经提出了

多种重构和测量量子态维格纳函数的方法<sup>[1~6]</sup>。在理论上, 对于行波场, 典型的重构方案有光学零拍层析法<sup>[1]</sup>和光子计数法<sup>[2]</sup>; 对于腔场, 典型的重构方案有原子偏转技术<sup>[3]</sup>和微脉腔方案<sup>[4]</sup>。在实验上, Smithey 等<sup>[5]</sup>利用光学零拍层析法重构电磁场真空态和压缩态的维格纳函数, Banaszek 等<sup>[6]</sup>利用光子计数法测量了真空态和相干态的维格纳函数; 对于腔场, Nogues 等<sup>[7]</sup>利用原子偏转技术测量了单光子福克态

收稿日期: 2007-05-22; 收到修改稿日期: 2007-09-06

基金项目: 国家自然科学基金(10574060)和山东省自然科学基金(Y2004A09)资助的课题。

作者简介: 孟祥国(1978—), 男, 山东青州人, 聊城大学物理系讲师, 硕士, 主要从事理论物理教学和量子光学等方面的研究。E-mail: xgmeng@lcu.edu.cn

导师简介: 王继锁(1960—), 男, 山东阳谷人, 教授, 博士后, 主要从事量子光学和量子信息等方面的研究。

E-mail: jswang@lcu.edu.cn

的维格纳函数。这些重构和测量量子态维格纳函数方案的提出极大地激发了物理学工作者们的研究兴趣。

由于奇偶对相干态可以在原子干涉过程,或通过非线性多光子参量过程与非连续的多光子吸收过程之间的竞争来实现<sup>[9]</sup>。因此重构它的维格纳函数具有重要的实验价值,有助于找到一些可观测量在实验上实现对它的测量,从而获得此量子态在演化过程中的信息。本文利用纠缠态 $|\eta\rangle$ 表象下的维格纳算符,重构了奇偶对相干态的维格纳函数。并根据此维格纳函数在相空间中随变量 $\rho$ 和 $\gamma$ 的变化规律,讨论了奇偶对相干态的非经典性质和量子干涉效应。然后,根据奇偶对相干态的维格纳函数的边缘分布,阐明了此维格纳函数的物理意义。最后,利用纠缠态 $|\eta\rangle$ 表象下的维格纳算符 $\Delta_{1,2}(\rho, \gamma)$ 和纠缠态的投影算符 $|\eta, \tau_1, \tau_2\rangle\langle\eta, \tau_1, \tau_2|$ 之间满足的拉东变换,获得了奇偶对相干态的量子层析图函数。

## 2 奇偶对相干态的定义

由文献[9,10]可知,在粒子数表象中对相干态可表示为

$$|\xi, q\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N(q)\xi^n}{\sqrt{n!(n+q)!}} |n+q, n\rangle, \quad (1)$$

式中 $\xi = r\exp(i\varphi)$ 为复参量, $r$ 和 $\varphi$ 分别是参量 $\xi$ 的模和相位角, $N(q)$ 是归一化系数

$$N(q) = [(i|\xi|)^{-q} J_q(i2|\xi|)]^{-1/2}. \quad (2)$$

其中 $J_q(x)$ 是 $q$ 阶的贝塞尔函数。实际上,对相干态是对湮灭算符 $(a_1 a_2)$ 和数差算符 $(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2)$ 的本征态,即

$$\begin{cases} a_1 a_2 |\xi, q\rangle = \xi |\xi, q\rangle, \\ (a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2) |\xi, q\rangle = q |\xi, q\rangle. \end{cases} \quad (3)$$

若把对相干态进行对称或反对称叠加,可获得归一化的奇偶对相干态

$$|\xi, q\rangle_{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\pm}(n, q) |n+q, n\rangle, \quad (4)$$

式中

$$C_{\pm}(n, q) = \frac{N_{\pm}(n, q)\xi^n}{\sqrt{n!(n+q)!}} [1 \pm (-1)^n],$$

$$N_{\pm}(n, q) = \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^2}{n!(n+q)!} [1 \pm (-1)^n] \right\}^{-1/2}. \quad (5)$$

经过简单的计算,可知奇偶对相干态满足本征方程

$$\begin{aligned} (a_1 a_2)^2 |\xi, q\rangle_{\pm} &= \xi^2 |\xi, q\rangle_{\pm}, \\ (a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2) |\xi, q\rangle_{\pm} &= q |\xi, q\rangle_{\pm} \end{aligned} \quad (6)$$

和正交关系

$${}_{+(-)}\langle\xi, q|\xi, q\rangle_{- (+)} = 0. \quad (7)$$

## 3 奇偶对相干态的维格纳函数

为了求出奇偶对相干态的维格纳函数,让我们先回顾一下纠缠态 $|\eta\rangle$ 表象。在双模的福克表象中,引入纠缠态<sup>[11]</sup>

$$|\eta\rangle = \exp\left[-\frac{|\eta|^2}{2} + \eta a_1^\dagger - \eta^* a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2^\dagger\right] |00\rangle,$$

$$\eta = \eta_1 + i\eta_2, \quad (8)$$

把算符 $a_1, a_2$ 分别作用于态 $|\eta\rangle$ ,有

$$\begin{aligned} a_1 |\eta\rangle &= (\eta + a_2) |\eta\rangle, \\ a_2 |\eta\rangle &= -(\eta^* - a_1^\dagger) |\eta\rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

由(9)式可导出下面的本征方程:

$$\begin{aligned} (Q_1 - Q_2) |\eta\rangle &= \sqrt{2}\eta_1 |\eta\rangle, \\ (P_1 + P_2) |\eta\rangle &= \sqrt{2}\eta_2 |\eta\rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

由此可见,纠缠态 $|\eta\rangle$ 是处于纠缠的两个粒子的相对坐标 $(Q_1 - Q_2)$ 和总动量 $(P_1 + P_2)$ 的共同本征态。借助于两模真空态投影算符的正规乘积形式<sup>[11]</sup>

$$|00\rangle\langle 00| = : \exp(-a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2) : , \quad (11)$$

式中符号 $::$ 表示正规乘积,可得到纠缠态 $|\eta\rangle$ 具有完备性

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi} |\eta\rangle\langle\eta| = 1 \quad (12)$$

和“正交归一性”

$$\langle\eta|\eta'\rangle = \pi\delta(\eta - \eta')\delta(\eta^* - \eta'^*) = \pi\delta^{(2)}(\eta - \eta'). \quad (13)$$

为了得到奇偶对相干态的维格纳函数,引入一个称为双变量厄米多项式的特殊函数 $H_{m,n}(\eta, \eta^*)$ ,其定义为<sup>[11]</sup>

$$H_{m,n}(\eta, \eta^*) = \sum_{l=0}^{\min(m,n)} \frac{(-)^l m! n!}{l!(m-l)!(n-l)!} \eta^{m-l} \eta^{*n-l} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial t'^n} \exp(-t\eta' + t\eta + t'\eta^*) \Big|_{t=t'=0}, \quad (14)$$

满足

$$H_{m,n}^*(\eta, \eta^*) = H_{n,m}(\eta, \eta^*). \quad (15)$$

此厄米多项式 $H_{m,n}(\eta, \eta^*)$ 的生成函数公式为

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{t^m t'^n}{m!n!} H_{m,n}(\eta, \eta^*) = \exp(-tt' + t\eta + t'\eta^*). \quad (16)$$

根据纠缠态  $|\eta\rangle$  的指数形式, 在双模福克空间中, 可把态  $|\eta\rangle$  表示为

$$|\eta\rangle = \exp(-|\eta|^2/2) \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{\sqrt{m!n!}} H_{m,n}(\eta, \eta^*) |m, n\rangle, \quad (17)$$

式中  $|m, n\rangle = \frac{a_1^{+m} a_2^{+n}}{\sqrt{m!n!}} |00\rangle$  是双模福克态. 由(4)式、(15)式和(17)式, 可导出内积

$$\begin{aligned} \langle \eta | \xi, q \rangle_{\pm} &= \langle \eta | \sum_{n=0}^{\infty} C_{\pm}(n, q) |n+q, n\rangle = \\ & \exp(-|\eta|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_{\pm}(n, q)}{n!(n+q)!} (-\xi)^n [1 \pm (-1)^n] H_{n, n+q}(\eta, \eta^*). \end{aligned} \quad (18)$$

在纠缠态  $|\eta\rangle$  表象下, 双模维格纳算符  $\Delta_{1,2}(\rho, \gamma)$  表示为<sup>[11]</sup>

$$\Delta_{1,2}(\rho, \gamma) = \int \frac{d^2\eta}{\pi^3} |\gamma - \eta\rangle \langle \gamma + \eta| \exp(\eta\rho^* - \eta^*\rho), \quad (19)$$

式中  $\gamma = \alpha - \beta^*$ ,  $\rho = \alpha + \beta^*$ ,  $\alpha = (x_1 + ip_1)/\sqrt{2}$ ,  $\beta = (x_2 + ip_2)/\sqrt{2}$ , 而  $x_1, x_2, p_1, p_2$  分别为处于纠缠态  $|\eta\rangle$  下两粒子的坐标和动量.

利用(14)式和(19)式, 可得到由(4)式所给出的奇偶对相干态的维格纳函数

$$\begin{aligned} W_{\pm}(\rho, \gamma) &= \pm \langle \xi, q | \Delta_{1,2}(\rho, \gamma) | \xi, q \rangle_{\pm} = \int \frac{d^2\eta}{\pi^3} \pm \langle \xi, q | \gamma - \eta \rangle \langle \gamma + \eta | \xi, q \rangle_{\pm} \exp(\eta\rho^* - \eta^*\rho) = \\ & \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{N_{\pm}(n, q) N_{\pm}(m, q) (-)^{n+m} \xi^{*n} \xi^m}{n!m!(n+q)!(m+q)!} [1 \pm (-1)^m][1 \pm (-1)^n] \times \\ & \int \frac{d^2\eta}{\pi^3} H_{n+q, n}[(\gamma - \eta), (\gamma - \eta)^*] H_{m, m+q}[(\gamma + \eta), (\gamma + \eta)^*] \exp(-|\gamma|^2 - |\eta|^2 + \eta\rho^* - \eta^*\rho) = \\ & \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{N_{\pm}(n, q) N_{\pm}(m, q) (-)^{n+m}}{n!m!(n+q)!(m+q)!} \xi^{*n} \xi^m [1 \pm (-1)^m][1 \pm (-1)^n] \frac{\partial^{q+2n}}{\partial t^{q+n} \partial t^n} \frac{\partial^{q+2m}}{\partial r^{q+m} \partial r^m} \times \\ & \int \frac{d^2\eta}{\pi^3} \exp(-|\gamma|^2 - |\eta|^2 + \eta\rho^* - \eta^*\rho - tt' + t(\gamma - \eta) + t'(\gamma - \eta)^* - rr' + \\ & r(\gamma + \eta) + r'(\gamma + \eta)^*) |_{t=t'=r=r'=0}. \end{aligned} \quad (20)$$

使用下面的积分公式<sup>[11]</sup>

$$\int \frac{d^2z}{\pi} \exp(\zeta|z|^2 + \xi z + \eta z^* + fz^2 + gz^{*2}) = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}} \exp\left[\frac{-\zeta\xi\eta + \xi^2g + \eta^2f}{\zeta^2 - 4fg}\right], \quad (21)$$

此公式的成立条件为

$$\operatorname{Re}(\zeta \pm f \pm g) < 0, \quad \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta^2 - 4fg}{\zeta \pm f \pm g}\right) < 0. \quad (22)$$

因此, 奇偶对相干态的维格纳函数变成

$$\begin{aligned} W_{\pm}(\rho, \gamma) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{N_{\pm}^*(n, q) N_{\pm}(m, q) (-)^{n+m}}{n!m!(n+q)!(m+q)!} \xi^{*n} \xi^m [1 \pm (-1)^m][1 \pm (-1)^n] \frac{\partial^{q+2n}}{\partial t^{q+n} \partial t^n} \frac{\partial^{q+2m}}{\partial r^{q+m} \partial r^m} \times \\ & \exp[(\rho - r' + \gamma)t + (\gamma^* - \rho^* - r)t' + (\gamma - \rho)r + (\gamma^* + \rho^*)r' - |\gamma|^2 - |\rho|^2] |_{t=t'=r=r'=0}. \end{aligned} \quad (23)$$

经过计算, 可知奇偶对相干态的维格纳函数可写成非干涉项  $W_{\pm}^M(\rho, \gamma)$  和干涉项  $W_{\pm}^I(\rho, \gamma)$  之和的形式

$$W_{\pm}(\rho, \gamma) = W_{\pm}^M(\rho, \gamma) + W_{\pm}^I(\rho, \gamma), \quad (24)$$

其中, 非干涉项和干涉项分别为

$$\begin{aligned} W_{\pm}^M(\rho, \gamma) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{q+m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q+m \\ l \end{bmatrix} \frac{|N_{\pm}(m, q)|^2 (-)^{l+k} |\xi|^{2m}}{m!(q+m)!(m-k)!(q+m-l)!} [1 \pm (-1)^m]^2 \times \\ & |\gamma - \rho|^{2(m-k)} |\gamma + \rho|^{2(q+m-l)} \exp(-|\gamma|^2 - |\rho|^2), \end{aligned} \quad (25)$$

$$W_{\pm}^l(\rho, \gamma) = \left( \sum_{n>m} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^{q+m} + \sum_{m>n} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{q+n} \right) \frac{N_{\pm}(m, q) N_{\pm}^*(n, q) [1 \pm (-1)^m] [1 \pm (-1)^n] (-1)^{n+m+l+k} \xi^m \xi^{*n}}{\pi^2 k! l! (m-k)! (q+m-l)! (n-k)! (q+n-l)!} \times (\gamma^* - \rho^*)^{n-k} (\gamma - \rho)^{m-k} (\gamma^* + \rho^*)^{q+m-l} (\gamma + \rho)^{q+n-l} \exp(-|\gamma|^2 - |\rho|^2). \tag{26}$$

式中  $N_{\pm}(m, q)$  和  $N_{\pm}^*(n, q)$  由(5)式给出。将(5)式代入(25)式和(26)式,在  $q, \xi$  取不同值时,借助于数值计算,可以分别得到奇偶对相干态的维格纳函数随变量  $\rho$  和  $\gamma$  的变化曲线如图 1 至图 3 所示。

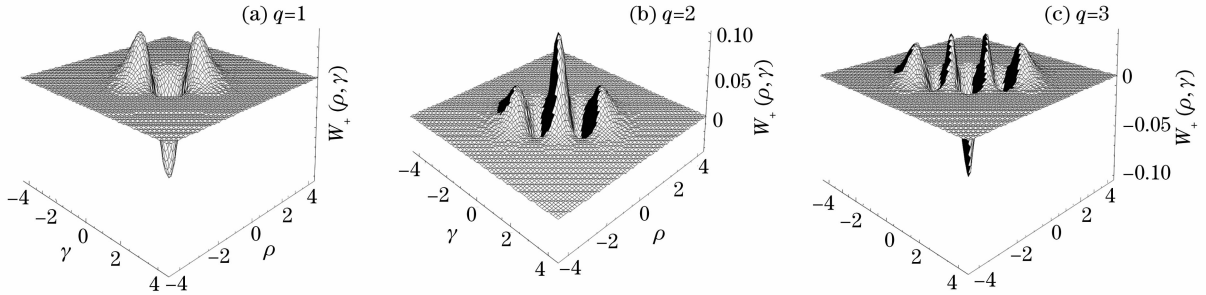


图 1 当  $\xi=0.5$  时,偶对相干态的维格纳函数随  $\rho$  和  $\gamma$  的变化曲线

Fig. 1 Variations of the Wigner functions for the even-pair coherent states with  $\rho$  and  $\gamma$  when  $\xi=0.5$

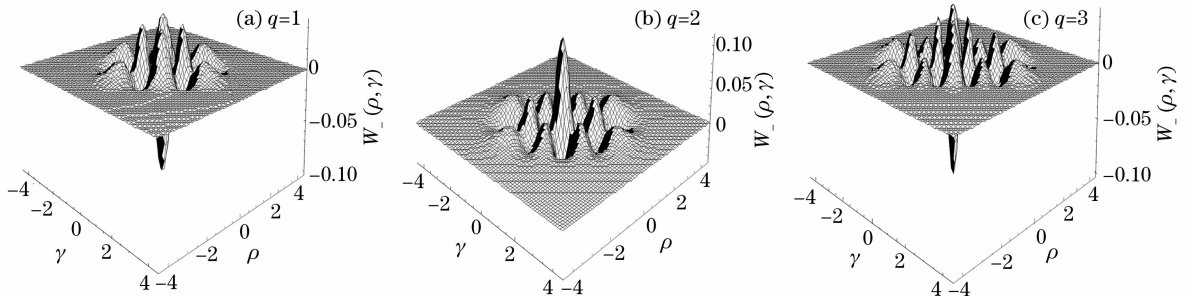


图 2 当  $\xi=0.5$  时,奇对相干态的维格纳函数随  $\rho$  和  $\gamma$  的变化曲线

Fig. 2 Variations of the Wigner functions for the odd-pair coherent states with  $\rho$  and  $\gamma$  when  $\xi=0.5$

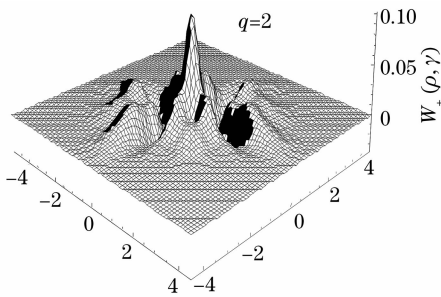


图 3 当  $\xi=2$  时,偶对相干态的维格纳函数随  $\rho$  和  $\gamma$  的变化曲线

Fig. 3 Variations of the Wigner functions for the even-pair coherent states with  $\rho$  and  $\gamma$  when  $\xi=2$

由图 1 和图 2 可以看出,对于奇偶对相干态,当  $q$  为奇数时,维格纳函数具有向下的主峰;而当  $q$  为偶数时,维格纳函数具有向上的主峰。这说明  $q$  为偶数的偶(奇)相干态与  $q$  为奇数的偶(奇)相干态是互相正交的。例如,当分别取  $q=1$  和  $q=2$  时,两个取向相反的主峰的半峰全宽和峰高相同。在相空间中,若把这两个维格纳函数分布进行叠加,其和必为零,此时对应的两个偶(奇)相干态是正交的。这个

规律对  $q$  取任意值都成立,奇偶对相干态的正交关系也可以从(4)式直接得到。

当  $q$  取不同值时,奇偶对相干态的维格纳函数除了都存在一个主峰外,还有许多峰值较小的波峰。并且随着远离主峰,这些波峰的峰值逐渐减小。可见,随着  $q$  取值的变化,奇偶对相干态的维格纳函数分布始终呈现多峰结构。当  $q$  较小时,波峰的个数较少;随着  $q$  值逐渐增大,波峰的个数逐渐增加,即波峰的数目与  $q$  有关。由此可见, $q$  取值越大,奇偶对相干态的量子干涉效应越显著。这个结论也可从(25)式和(26)式得到。由于在奇偶对相干态的维格纳函数  $W_{\pm}(\rho, \gamma)$  中,其干涉项  $W_{\pm}^I(\rho, \gamma)$  占主要地位,当  $q$  取值增大时,对干涉项  $W_{\pm}^I(\rho, \gamma)$  的影响要远远大于对非干涉项  $W_{\pm}^M(\rho, \gamma)$  的影响。另外,当  $q$  为奇数时,由于奇偶对相干态在相空间中出现更多的负值区域,因此它们更容易展现出其非经典性。而对于  $q$  的同一取值(例如  $q=2$ ),奇对相干态的维格纳函数波峰的个数比偶对相干态明显增多,即当  $q$  取同一值时,奇对相干态的量子干涉效应要比偶对相干态显著。随着  $q$  取值的增大,奇对相干态的

维格纳函数波峰的个数增加的要比偶对相干态快。可见,  $q$  取值的变化对奇对相干态的量子干涉效应的影响更为显著。

比较图 3 和图 1(b) 可见, 随着  $\xi$  取值的不断增大, 偶对相干态的维格纳函数在相空间中发生显著变化, 有规律分布的多峰结构被破坏。即随着  $\xi$  值的增大, 偶对相干态的干涉效应明显增强, 这是由于偶对相干态的维格纳函数的干涉项  $W_{\pm}^1(\rho, \gamma)$  发生较大改变造成的。对于奇对相干态, 其维格纳函数在相空间中也有类似的变化。

下面给出奇偶对相干态维格纳函数的边缘分

布。对于奇偶对相干态, 由于它是双模态且处于此态的两粒子具有很强的纠缠性, 因此可以利用纠缠态来获得它的边缘分布函数。

在  $\rho-\gamma$  相位空间中, 对维格纳算符  $\Delta_{1,2}(\rho, \gamma)$  中变量  $\rho$  进行积分, 可得到此积分与纠缠态  $|\eta\rangle$  的投影算符的关系<sup>[11]</sup>

$$\int d^2\rho \Delta_{1,2}(\rho, \gamma) = \frac{1}{\pi} |\eta\rangle\langle\eta|_{\eta=\gamma}. \quad (27)$$

因此, 奇偶对相干态的维格纳函数  $W_{\pm}(\rho, \gamma)$  在  $\gamma$  方向的边缘分布函数为

$$P_{\pm}(\gamma) = \int d^2\rho W_{\pm}(\rho, \gamma) = \frac{1}{\pi} |\langle\eta|\xi, q\rangle|_{\eta=\gamma}^2 = \frac{\exp(-|\gamma|^2) |N_{\pm}(n, q)|^2}{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n [1 \pm (-1)^n]}{n!(n+q)!} H_{n, n+q}(\gamma, \gamma^*) \right|^2. \quad (28)$$

由此可见,  $P_{\pm}(\gamma)$  表示具有相对坐标  $\sqrt{2}\gamma_1$ , 同时具有总动量  $\sqrt{2}\gamma_2$  的纠缠双粒子在奇偶对相干态中找到的几率。

在纠缠态  $|\zeta\rangle$  表象下, 双模的维格纳算符  $\Delta_{1,2}(\rho, \gamma)$  可表示为<sup>[11]</sup>

$$\Delta_{1,2}(\rho, \gamma) = \int \frac{d^2\xi}{\pi^3} |\rho - \xi\rangle\langle\rho + \xi| \exp(\xi^* \gamma - \xi \gamma^*), \quad (29)$$

式中

$$|\zeta\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|\zeta|^2 + \zeta a_1^{\dagger} + \zeta^* a_2^{\dagger} - a_1^{\dagger} a_2^{\dagger}\right] |00\rangle, \quad \zeta = \zeta_1 + i\zeta_2, \quad (30)$$

满足下列方程:

$$(X_1 + X_2) |\zeta\rangle = \sqrt{2}\zeta_1 |\zeta\rangle, \quad (P_1 - P_2) |\zeta\rangle = \sqrt{2}\zeta_2 |\zeta\rangle. \quad (31)$$

可见, 纠缠态  $|\zeta\rangle$  是处于纠缠的两粒子的质心坐标  $(X_1 + X_2)$  和相对动量  $(P_1 - P_2)$  的共同本征态。在  $\rho-\gamma$  相位空间中, 若对维格纳算符  $\Delta_{1,2}(\rho, \gamma)$  中变量  $\gamma$  进行积分, 可得到此积分与纠缠态  $|\zeta\rangle$  的投影算符的关系<sup>[11]</sup>

$$\int d^2\gamma \Delta_{1,2}(\rho, \gamma) = \frac{1}{\pi} |\zeta\rangle\langle\zeta|_{\zeta=\rho}. \quad (32)$$

同样, 奇偶对相干态的维格纳函数  $W_{\pm}(\rho, \gamma)$  在  $\rho$  方向的边缘分布函数为

$$P_{\pm}(\rho) = \int d^2\gamma W_{\pm}(\rho, \gamma) = \frac{1}{\pi} |\langle\zeta|\xi, q\rangle|_{\zeta=\rho}^2 = \frac{\exp(-|\rho|^2) |N_{\pm}(n, q)|^2}{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n [1 \pm (-1)^n]}{n!(n+q)!} H_{n, n+q}(\rho, \rho^*) \right|^2. \quad (33)$$

由此可见,  $P_{\pm}(\rho)$  表示具有质心坐标  $\sqrt{2}\rho_1$ , 同时具有相对动量  $\sqrt{2}\rho_2$  的纠缠双粒子在奇偶对相干态中找到的几率。因此, 奇偶对相干态的维格纳函数  $W_{\pm}(\rho, \gamma)$  的物理意义就在于它的边缘分布函数给出具有相对坐标  $\sqrt{2}\gamma_1$  (质心坐标  $\sqrt{2}\rho_1$ ) 而同时具有总动量  $\sqrt{2}\gamma_2$  (相对动量  $\sqrt{2}\rho_2$ ) 的纠缠双粒子在奇偶对相干态中出现的概率。

#### 4 奇偶对相干态的层析图函数

在量子力学的框架内, 体系的状态可由希尔伯特(Hilbert)空间中的态矢量及其在相空间的各种概率分布函数来描述, 但它们一般不能被直接测量; 而层析照相法技术则是利用可被直接测量的正定的概率分布函数即层析图函数, 来实现对量子态进行直接测量的一种方法。由于层析图函数能够被直接测量且可以重构量子态的密度算符, 因此在量子光学和量子统计中经常被用来描述量子体系状态及其

演化行为。在实验上,只要能够在可观测量所在表象下测得波函数的模方,就能够获得该量子态的层析图函数,从而实现对该量子态的有效测量。

对于给定的单模态的密度矩阵  $\rho(p, q)$ , 其对应的维格纳函数为<sup>[12]</sup>

$$W(p, q) = \int d\mu \rho\left(q + \frac{\mu}{2}, q - \frac{\mu}{2}\right) \exp\left(-i \frac{p\mu}{\hbar}\right), \quad (34)$$

则其拉东(Radon)变换是

$$|\eta, \tau_1, \tau_2\rangle \langle \eta, \tau_1, \tau_2| = \pi \iint d^2\gamma d^2\rho \delta(\eta_1 - \mu_1\gamma_1 - \nu_1\rho_2) \delta(\eta_2 - \mu_2\rho_1 - \nu_2\gamma_2) \Delta_{1,2}(\rho, \gamma), \quad (36)$$

式中纠缠态  $|\eta, \tau_1, \tau_2\rangle$  是算符  $[\mu_1(X_1 - X_2) + \nu_1(P_1 - P_2)]$  和  $[\mu_2(X_1 + X_2) + \nu_2(P_1 + P_2)]$  的共同本征态。在福克表象下, 纠缠态  $|\eta, \tau_1, \tau_2\rangle$  可表示为

$$|\eta, \tau_1, \tau_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\tau_1 \tau_2|}} \exp\left\{-\frac{\eta_1^2}{2|\tau_1|^2} - \frac{\eta_2^2}{2|\tau_2|^2} + \left(\frac{\eta_1}{\tau_1^*} + \frac{\eta_2}{\tau_2^*}\right)a^+ + \left(-\frac{\eta_1}{\tau_1^*} + \frac{\eta_2}{\tau_2^*}\right)b^+ + \frac{1}{2}[\exp(i2\theta_1) - \exp(i2\theta_2)]a^+ b^+ - \frac{1}{4}[\exp(i2\theta_1) + \exp(i2\theta_2)](a^{+2} + b^{+2})\right\} |00\rangle, \quad (37)$$

$$\eta = \eta_1 + i\eta_2,$$

式中  $\tau_1, \tau_2, \rho, \gamma$  为复参量,  $\tau_i = |\tau_i| \exp(i\theta) = \mu_i + i\nu_i, \rho = \rho_1 + i\rho_2, \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2, i = 1, 2$ 。因此, 对于具有纠缠特性的双模态  $|\psi\rangle$ , 其量子层析图函数可被定义为

$$T(\eta, \tau_1, \tau_2) = \pi \iint d^2\gamma d^2\rho \delta(\eta_1 - \mu_1\gamma_1 - \nu_1\rho_2) \delta(\eta_2 - \mu_2\rho_1 - \nu_2\gamma_2) \langle \psi | \Delta_{1,2}(\rho, \gamma) | \psi \rangle. \quad (38)$$

这意味着处于纠缠的双模态  $|\psi\rangle$  的量子层析图函数恰好是在纠缠态  $|\eta, \tau_1, \tau_2\rangle$  表象下波函数的模方形式, 这是获得纠缠量子态的层析图函数的一种新的方法。因此, 奇偶对相干态  $|\xi, q\rangle_{\pm}$  的层析图函数为

$$T(\eta, \tau_1, \tau_2) = \pi \iint d^2\gamma d^2\rho \delta(\eta_1 - \mu_1\gamma_1 - \nu_1\rho_2) \delta(\eta_2 - \mu_2\rho_1 - \nu_2\gamma_2)_{\pm} \langle \xi, q | \Delta_{1,2}(\rho, \gamma) | \xi, q \rangle_{\pm} = |\langle \eta, \tau_1, \tau_2 | \xi, q \rangle_{\pm}|^2. \quad (39)$$

由于态  $|\xi, q\rangle_{\pm}$  的层析图函数的振幅为

$$\begin{aligned} \pm \langle \xi, q | \eta, \tau_1, \tau_2 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[(n+q)/2]} \sum_{l=0}^{n+q-2k} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-)^{k+m} N_{\pm}(n, q) \xi^{*n} [1 \pm (-1)^n]}{2^{l+2k+2m} m! k! l! (n+q-2k-l)! (n-2m-l)! \sqrt{|\tau_1 \tau_2|}} \times \\ &\left(\frac{\eta_1}{\tau_1^*} + \frac{\eta_2}{\tau_2^*}\right)^{n+q-2k-l} \left(-\frac{\eta_1}{\tau_1^*} + \frac{\eta_2}{\tau_2^*}\right)^{n-2m-l} [\exp(i2\theta_1) - \exp(i2\theta_2)]^l [\exp(i2\theta_1) + \exp(i2\theta_2)]^{k+m} \times \\ &\exp\left(-\frac{\eta_1^2}{2|\tau_1|^2} - \frac{\eta_2^2}{2|\tau_2|^2}\right). \end{aligned} \quad (40)$$

式中利用了积分公式<sup>[13]</sup>

$$\int \frac{d^2z}{\pi} z^n \exp(\zeta|z|^2 + \xi z + \eta z^* + g z^{*2}) = -\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{2n+1} \exp\left[\frac{1}{\zeta}(g\xi^2 - \zeta\xi\eta)\right] \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2\xi g - \zeta\eta)^{n-2k} (g\xi^2)^k, \quad (41)$$

则奇偶对相干态  $|\xi, q\rangle_{\pm}$  的层析图函数为

$$\begin{aligned} T(\eta, \tau_1, \tau_2) &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[(n+q)/2]} \sum_{l=0}^{n+q-2k} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{N_{\pm}(n, q) \xi^{*n} [1 \pm (-1)^n]}{2^{l+2k+2m} m! k! l! (n+q-2k-l)! (n-2m-l)! \sqrt{|\tau_1 \tau_2|}} \times \right. \\ &\left. \left(\frac{\eta_1}{\tau_1^*} + \frac{\eta_2}{\tau_2^*}\right)^{n+q-2k-l} \left(-\frac{\eta_1}{\tau_1^*} + \frac{\eta_2}{\tau_2^*}\right)^{n-2m-l} [\exp(i2\theta_1) - \exp(i2\theta_2)]^l [\exp(i2\theta_1) + \exp(i2\theta_2)]^{k+m} \times \right. \\ &\left. \exp\left(-\frac{\eta_1^2}{2|\tau_1|^2} - \frac{\eta_2^2}{2|\tau_2|^2}\right) \right|^2. \end{aligned} \quad (42)$$

可见, 在实验上只要能够在纠缠态  $|\eta, \tau_1, \tau_2\rangle$  表象下测得  $|\langle \eta, \tau_1, \tau_2 | \xi, q \rangle_{\pm}|^2$ , 即可获得奇偶对相干态

$|\xi, q\rangle_{\pm}$  的层析图函数, 从而实现了对双模态  $|\xi, q\rangle_{\pm}$  的测量。

## 5 结 论

利用纠缠态表象下的维格纳算符, 重构了奇偶对相干态的维格纳函数。并根据此维格纳函数在相空间随变量  $\rho$  和  $\gamma$  的变化关系, 讨论了奇偶对相干态的非经典性质和量子干涉效应。结果表明, 奇偶对相干态总呈现非经典性质, 且在  $q$  取奇数时, 奇偶对相干态更容易出现非经典性质。同时, 对于  $q$  的不同取值, 奇偶对相干态的维格纳函数分布始终呈现多峰结构, 且波峰的数目与  $q$  有关, 即奇偶对相干态的量子干涉效应的显著程度与  $q$  取值有关。对于  $q$  的同一取值, 奇对相干态的量子干涉效应更为显著。根据奇偶对相干态的维格纳函数的边缘分布, 阐明此维格纳函数的物理意义在于它的边缘分布给出了处于纠缠态的两粒子在该奇偶对相干态中找到的几率。最后, 利用纠缠态  $|\eta\rangle$  表象下维格纳算符  $\Delta_{1,2}(\rho, \gamma)$  和纠缠态  $|\eta, \tau_1, \tau_2\rangle$  的投影算符之间满足的拉东变换, 获得了奇偶对相干态的量子层析图函数。这是获得纠缠量子态的层析图函数的一种新的方法。同时, 由于它是可以被直接测量的正定的概率分布函数, 且经常用来描述量子态的演化行为。因此, 获得奇偶对相干态的量子层析图函数具有较高的理论学术价值和一定的实践意义。

## 参 考 文 献

1 G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, M. G. A. Paris. Detection of the density matrix through optical homodyne tomography without filtered back projection[J]. *Phys. Rev. A*, 1994, **50**(5): 4298~4302

2 S. Wallentowitz, W. Vogel. Unbalanced homodyning for quantum state measurements[J]. *Phys. Rev. A*, 1996, **53**(6): 4528~4533

3 M. Franca Santos, E. Solano, R. L. de Matos Filho. Conditional large fock state preparation and field state reconstruction in cavity QED[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**(9): 093601-4

4 Zhang Zhiming. Recent progress of quantum-state reconstruction of electromagnetic fields[J]. *Mod. Phys. Lett. B*, 2004, **18**(10): 393~409

5 D. T. Smithey, M. Beck, J. Cooper *et al.*. Measurement of number-phase uncertainty relations of optical fields[J]. *Phys. Rev. A*, 1993, **48**(4): 3159~3167

6 K. Banaszek, C. Radzewicz, K. Wodkiewicz *et al.*. Direct measurement of the Wigner function by photon counting[J]. *Phys. Rev. A*, 1999, **60**(1): 674~677

7 G. Nogués, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi *et al.*. Measurement of a negative value for the Wigner function of radiation[J]. *Phys. Rev. A*, 2000, **62**(5): 054101-3

8 Meng Xiangguo, Wang Jisuo, Liang Baolong. Phase properties for the photon-added even and odd coherent states[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(4): 721~726  
孟祥国, 王继锁, 梁宝龙. 增光子奇偶相干态的相位特性[J]. 光学学报, 2007, **27**(4): 721~726

9 Faisal A. A. El-Orany Faisal, J. Peřina. Phase properties of superposition of pair-coherent states[J]. *Opt. Commun.*, 2001, **197**(10): 363~373

10 Song Tongqiang, Zhu Yuejin. Nonlinear effects of the nonlinear pair coherent state[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(8): 906~909  
宋同强, 诸跃进. 非线性李对相干态的光子统计性质[J]. 光学学报, 2003, **23**(8): 906~909

11 Fan Hongyi. *Entangled State Representations in Quantum Mechanics and Their Applications* [M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2001. 37, 45~52, 88  
范洪义. 量子力学纠缠态表象及应用[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2001. 37, 45~52, 88

12 V. I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni *et al.*. Tomograms in the quantum-classical transition[J]. *Phys. Lett. A*, 2005, **343**(4): 251~266

13 Fan Hongyi. *Representation and Transformation Theory in Quantum Mechanics* [M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1997. 117  
范洪义. 量子力学表象与变换论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1997. 117