

文章编号: 0253-2239(2008)03-0487-05

# 精确确定光路中四分之一波片光轴方位的新方法

赵廷生 李国华

(曲阜师范大学激光研究所, 山东 曲阜 273165)

**摘要** 为了准确安装四分之一波片,介绍了一种精确确定光路中四分之一波片光轴方位的新方法,并利用米勒矩阵理论分析了影响测量结果的误差因素。测试方法所用的主要理论有米勒矩阵理论、傅里叶分析方法和最小二乘法。该方法利用最小二乘法得到了最优傅里叶系数,利用消光比测试原理实现了检偏棱镜的精确安装,利用反馈环控制系统对步进电机的步进角进行了控制。误差分析表明该方法的测量误差与四分之一波片光轴方位角本身的大小有关。实验结果表明该方法的标准不确定度为 0.03。

**关键词** 光学测量; 光轴方位角; 傅里叶分析法; 消光比; 最小二乘法

**中图分类号** O439 **文献标识码** A

## A New Method to Measure the Optical-Axis Azimuth of Quarter-Wave Plate in Light Path Accurately

Zhao Tingsheng Li Guohua

(Laser Research Institute, Qufu Normal University, Qufu, Shandong 273165, China)

**Abstract** In order to fix quarter-wave plate accurately, a new method is presented to measure the optical-axis azimuth of quarter-wave plate. The errors influencing test results are analyzed by Müller matrix theory. The main theories were used including Müller matrix theory, Fourier analysis and least squares method, and the optimized Fourier coefficients of the signal are obtained by the least squares method. By the principle of extinction-ratio measuring system, the analyzing prism is fixed accurately. A high-accuracy step motor is used to control the rotation angle by the feedback loop system. The theoretical analysis of error proves that measurement error is related to the azimuth angle itself, and the experimental results have proved that the normal uncertainty in the measurement was 0.03.

**Key words** optical measurement; optical -axis azimuth angle; Fourier analysis; extinction ratio; least squares method

### 1 引 言

波片是光学调制系统中的重要器件,它已被广泛安装到各类精密仪器中,其中波片光轴安装精度是影响仪器性能的重要因素<sup>[1~5]</sup>。测量光路中波片的安装方位角一般有两种方法,一类方法是采用有刻度的转盘安装并测量光轴的方位角。这种方法操作方便、直观,其安装和测量误差由安装波片的转盘最小刻度决定,一般精度不高。但很多情况下需要知道波片光轴的安装方位相对于入射光的偏振面的夹角,此时须考虑起偏棱镜的安装误差,因此这种转盘安装方法的实际误差更大。另外一类方法是利用光相位测试系统同时测出器件的光相位延迟量和光

轴方位角<sup>[1,2]</sup>,这类方法的实际测量精度不高,一方面光轴方位发生微小变化时出射光强变化很小不易被精确探测,另一方面无法被彻底清除的噪声在光强为极小值时将严重影响有用信号探测精度,且测量系统存在随机测量误差。因此研究波片光轴方位的精确测量对于提高波片的安装精度有重要意义。

本文利用矩阵理论分析了影响测量精度的误差因素,借助高消光比测试原理减小了各个器件的安装误差,提高了信噪比,并通过优化傅里叶系数减小了随机测量误差的影响,提出了一种能够对波片光轴方位精确测量的新方法并进行了实验。

收稿日期: 2007-06-21; 收到修改稿日期: 2007-09-12

作者简介: 赵廷生(1973—),男,山东在平县人,硕士研究生,主要从事偏光物理学及偏光器件设计等方面的研究。

E-mail: zts-123@163.com

导师简介: 李国华(1937—),男,山东乳山人,博士生导师,主要从事激光偏光工程方面的研究。E-mail: ghli@163169.net

## 2 系统设计及测量原理

这套测试装置包括起偏振棱镜、检偏棱镜、日本滨松光电子公司生产的 R7378 双碱阴极光电倍增管、美国 Stanford Research Systems 公司的 SR850 锁相放大器和 SR540 斩光器,以及高消光比测试软件系统<sup>[6]</sup>。规定水平方向为  $x$  方向,垂直方向为  $y$  方向,光束沿  $z$  方向传播。起偏振棱镜的光轴沿  $y$  方向,令待测的四分之一波片的快轴与  $x$  轴正方向成  $\alpha$  角,各个元件的主轴方位如图 1 所示。检偏棱镜被安装在配有反馈环控制系统的步进电机上,令其从  $x$  轴逆时针转起,设检偏棱镜转动时其光轴与  $x$  正方向成  $\theta$  角。伴随着检偏棱镜的转动出射光强被调制,然后送给光电倍增管再送入锁相放大器的

信号通道<sup>[7]</sup>。选频放大器对混有噪声的调制信号进行选频放大和窄带滤波,使大量白噪声不能通过。来自信号通道的信号与来自参考通道的信号在相敏检波器中混频,经低通滤波器后得到与输入信号幅值成正比的直流输出分量。最后由微机将电信号进行模-数转换,并由分析软件利用最小二乘算法对测量结果进行数值分析得到波片的光相位延迟量。其测量原理如图 2 所示。起偏棱镜的米勒矩阵为

$$P_y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

四分之一波片的米勒矩阵为

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\alpha) & \sin(2\alpha)\cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ 0 & \sin(2\alpha)\cos(2\alpha) & \sin^2(2\alpha) & \cos(2\alpha) \\ 0 & \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

实验中让检偏棱镜的光轴从  $x$  轴开始转起(因为  $x$  轴是消光位置,易于精确确定其方位<sup>[8]</sup>)。此时,检偏棱镜的米勒矩阵为

$$P_\theta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 \\ \cos(2\theta) & \cos^2(2\theta) & \sin(2\theta)\cos(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & \sin(2\theta)\cos(2\theta) & \sin^2(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

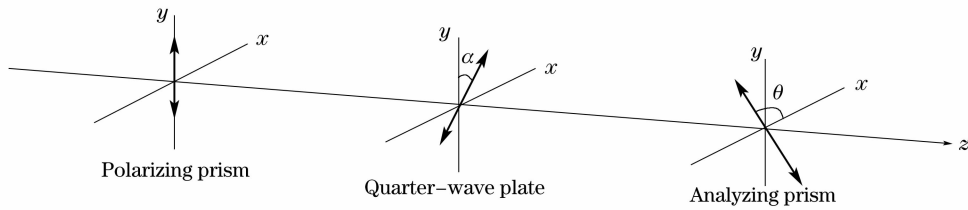


图 1 起偏振棱镜、波片和检偏棱镜的主轴方位

Fig. 1 Principal-axis azimuth of polarizing prism, wave plate and analyzing prism

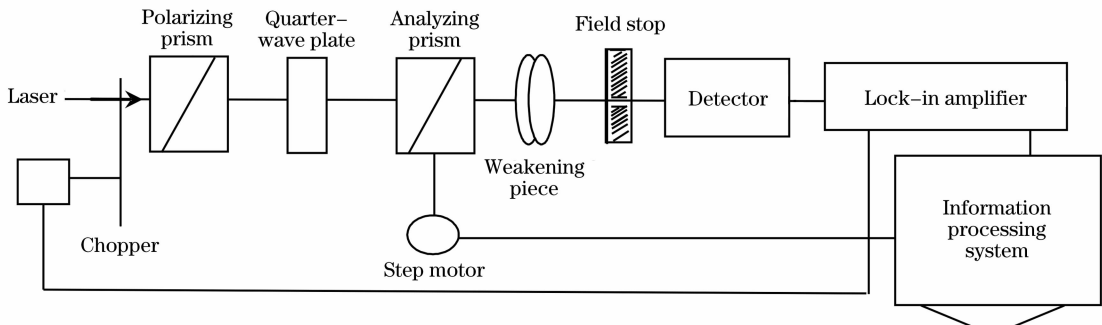


图 2 测量波片光轴方位的实验装置

Fig. 2 Experimental setup to measure the optical-axis azimuth of wave plate

激光束经过起偏振棱镜后的斯托克斯矢量为

$$\mathbf{S}_1 = \frac{I_0}{2} [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]^T. \quad (4)$$

式中  $I_0$  为光源入射光强(不考虑外界干扰和系统噪声)。由矩阵运算可知入射到探测器的光束其斯托克斯矢量为

$$\mathbf{S}_{\text{out}} = \mathbf{G} \mathbf{P}_\theta \mathbf{W} \mathbf{S}_1, \quad (5)$$

式中  $G$  为系统增益系数。由(5)式可得

$$\mathbf{S}_{\text{out}} = \frac{GI_0}{4} [1 - \cos(2\theta)\cos^2(2\alpha) - \sin(2\theta)\cos(2\alpha)\sin(2\alpha)] [1 \quad \cos(2\theta) \quad \sin(2\theta) \quad 0]^T. \quad (6)$$

显然进入探测器的光强可为以检偏棱镜转角  $\theta$  的二倍为变量的有限项傅里叶级数,

$$I_{(2\theta)} = \frac{GI_0}{4} - \frac{GI_0}{4} \cos(2\theta)\cos^2(2\alpha) - \frac{GI_0}{4} \sin(2\theta)\cos(2\alpha)\sin(2\alpha). \quad (7)$$

由于与斩光器同频的窄带噪声仍能通过锁相放大器, 实际探测到的光强为

$$I'_{(2\theta)} = a_0 + a_1 \cos(2\theta) + b_1 \sin(2\theta). \quad (8)$$

式中  $a_0, a_1, b_1$  均为傅里叶系数。(8)式对比(7)式不难得出

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right). \quad (9)$$

另外, 为了减小随机测量误差, 本文利用了最小二乘算法进行数据分析<sup>[9]</sup>。设检偏器旋转一个周期有  $N$  个调制点, 将  $N$  个光强值分别代入(8)式得到  $N$  个方程, 其中 3 个傅里叶系数是未知数。只要  $N$  大于 3 就可得到一个线性超定方程组, 利用了最小二乘算法对线性超定方程组进行求解即得到最优傅里叶系数  $a_1$  和  $b_1$ 。

### 3 误差分析

#### 3.1 四分之一波片相位延迟误差

造成波片相位延迟误差的因素较多, 一方面是波片在制作时存在一定的误差, 另一方面使用波片时光线不能严格垂直入射也会引起相位延迟误差, 还有是若波片非常薄, 例如云母波片的厚度仅  $35 \mu\text{m}$ , 两透射面间的光束干涉对其光相位延迟量也有影响<sup>[8]</sup>。设波片的相位延迟误差为  $\epsilon_1$ , 则此四分之一波片的延迟量为  $\pi/2 - \epsilon_1$ 。因其快轴与  $y$  轴方向重合, 其米勒矩阵将为

$$\mathbf{W}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \epsilon_1 & \sin \epsilon_1 \\ 0 & 0 & -\sin \epsilon_1 & \cos \epsilon_1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

以  $\mathbf{W}'$  代替  $\mathbf{W}$  带入(5)式可得

$$I_{(2\theta)} = \frac{GI_0}{4} + \frac{GI_0}{4} \cos(2\theta) [\cos^2(2\alpha) + \sin \epsilon_1 \sin^2(2\alpha)] + \frac{GI_0}{4} \sin(2\theta) (1 - \sin \epsilon_1) \cos(2\alpha) \sin(2\alpha). \quad (11)$$

(11)式对比(8)式, 得

$$\begin{cases} a_1 = \frac{GI_0}{4} [\cos^2(2\alpha) + \sin \epsilon_1 \sin^2(2\alpha)], \\ b_1 = \frac{GI_0}{4} (1 - \sin \epsilon_1) \cos(2\alpha) \sin(2\alpha). \end{cases} \quad (12)$$

设由  $\epsilon_1$  引入的测量误差为  $\Delta 2\alpha_1$ , 则

$$\Delta 2\alpha_1 = \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) - 2\alpha = \arctan\left[\frac{(1 - \sin \epsilon_1) \sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}\right] - 2\alpha. \quad (13)$$

将  $\sin \epsilon_1$  作级数展开并保留到前两个级数项, 得

$$\Delta \alpha_1 \approx \frac{1}{2} \tan(\Delta 2\alpha_1) = -\frac{\epsilon_1}{2} \frac{\tan(2\alpha)}{1 + \tan^2(2\alpha)}. \quad (14)$$

一般的标准波片的相位延迟误差在  $1^\circ$  左右, 当待测波片的相位延迟量在  $90^\circ \pm 1^\circ$  范围内, 且  $\tan(2\alpha) = 1$  时,  $\Delta 2\alpha_1$  存在极大值  $\epsilon_1/4$ 。波片相位延迟误差对测量结果产生的影响如图 3 所示。

从图 3 可以看出, 当安装方位角  $\alpha$  约为  $22.5^\circ$  的奇数倍时存在测量误差  $\Delta \alpha_1 \leq 0.25^\circ$ 。

当安装方位角  $\alpha$  约为  $45^\circ$  的整数倍时, 测量误差

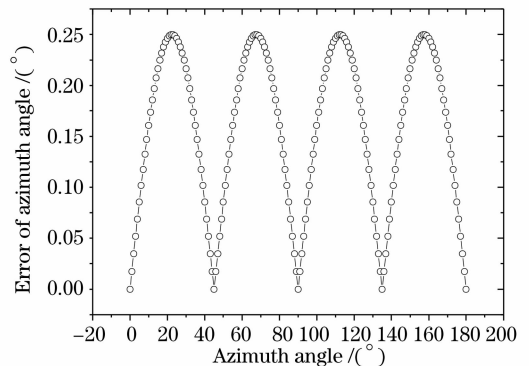


图 3 方位角误差  $\Delta \alpha_1$  随方位角  $\alpha$  变化的理论曲线  
Fig. 3 The theoretical curve of  $\Delta \alpha$  with the change of  $\alpha$

$\Delta\alpha_1 \approx 0^\circ$ 。

也就是说,此时波片相位延迟误差对测量结果基本不产生影响。

### 3.2 检偏棱镜消光方位的确定误差

$$\mathbf{P}'_\theta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2(\theta - \varepsilon_2) & \sin 2(\theta - \varepsilon_2) & 0 \\ \cos 2(\theta - \varepsilon_2) & \cos^2 2(\theta - \varepsilon_2) & \sin 2(\theta - \varepsilon_2) \cos 2(\theta - \varepsilon_2) & 0 \\ \sin 2(\theta - \varepsilon_2) & \sin 2(\theta - \varepsilon_2) \cos 2(\theta - \varepsilon_2) & \sin^2 2(\theta - \varepsilon_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$I_{(2\theta)} = \frac{GI_0}{4} - \frac{GI_0}{4} \cos 2(\theta - \varepsilon_2) \cos^2(2\alpha) - \frac{GI_0}{4} \sin 2(\theta - \varepsilon_2) \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) =$$

$$\frac{GI_0}{4} - \frac{GI_0}{4} \cos(2\theta) \cos(2\alpha) \cos(2\varepsilon_2 - 2\alpha) - \frac{GI_0}{4} \sin(2\theta) \cos(2\alpha) \sin(2\varepsilon_2 - 2\alpha), \quad (16)$$

$$2\alpha' = \arctan \left[ \frac{\sin(2\varepsilon_2 - 2\alpha)}{\cos(2\varepsilon_2 - 2\alpha)} \right], \quad (17)$$

$$\Delta\alpha_2 = \varepsilon_2. \quad (18)$$

由于该系统所使用的偏光棱镜的偏光性能较好,其消光比达  $10^{-9}$ ,利用高消光比测试原理,调整检偏棱镜使消光比达最大值可精确找到检偏棱镜的消光方位<sup>[10]</sup>,因此  $\varepsilon_2$  可近似为步进电机的最小步进角。若步进电机的最小步进角  $0.05^\circ$ ,则  $\Delta\alpha_2 \leq 0.05^\circ$ 。

### 3.3 锁相放大器引起的测量误差

锁相放大器的工作原理实质上是利用了通信理论中的同步检测技术,设  $S$  为仪器的信噪比,则由于其噪声引起的波片方位角测量误差为<sup>[5]</sup>

$$\Delta\alpha = \frac{1}{\sqrt{NS}}. \quad (19)$$

其中  $N$  为调制点的个数,电路滤波器的信噪比优于  $10^4$ ,由锁相放大器引起的测量误差

$$\Delta\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{N} \times 10^4} < (10^{-4})^\circ. \quad (20)$$

可知由它引入的误差甚小,可以忽略。

除上述各种因素外,测量精度还与实验环境、条件等误差因素有关。

## 4 实 验

实验在室温为  $25^\circ\text{C}$  的实验室内进行。第一步,分别打开激光器、斩光器、锁相放大器的电源。由于使用了光电倍增管,锁相放大器采用高阻抗输入。考虑到本测试系统探测器响应时间小于  $5\text{ ms}$ ,所以斩光器的斩光频率选用  $190\text{ Hz}$  左右,根据测试程序中设定的  $0\sim 190\text{ mV}$  的测量范围,选取锁相放大器的放大倍数为  $100$ ,灵敏度为  $1000\text{ mV}$ ,预热

检偏棱镜的开始转动时其光轴应在  $x$  方向,因安装误差, $\theta$  变为  $\theta - \varepsilon_2$ ,由此引入的测量误差设为  $\Delta\alpha_2$ 。将  $\theta - \varepsilon_2$  代替(4)式中的  $\theta$ ,得到新矩阵  $\mathbf{P}'_\theta$  后将其代入(5)式可得

$10\text{ min}$ 。调整起偏棱镜,使其光轴平行于测试平台。第二步,打开步进电机的电源,设定步进电机的步进角为  $0.025^\circ$ ,利用高消光比测试软件系统驱动步进电机转动,确定检偏棱镜的消光位置。使消光比达到最大值,则此时检偏棱镜较好地处于消光位置。第三步,利用最小刻度为  $0.5^\circ$  的转盘安装待测波片,使其快轴在  $90^\circ$ ,重新设定步进电机的步进角后启动步进电机开始测量。测量结果如图 4,其中实线为实验曲线,虚线为利用最小二乘算法得出的拟合曲线。得出的拟合函数表达式为

$$I'_{(2\theta)} = 0.7401 - 0.9999 \cos(2\theta) + 0.0094 \sin(2\theta), \quad (26)$$

利用(9)式可以得出它们的快轴方位角为  $89.65^\circ$ 。多次测量的结果见表 1,实验值的方差为  $0.0057$ ,标准不确定度为  $0.03$ 。

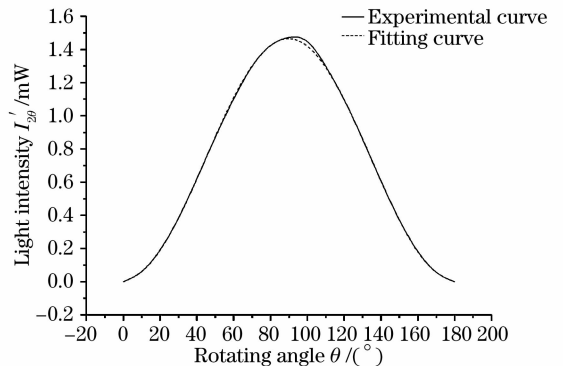


图 4 光强  $I'_{(2\theta)}$  随旋转角  $\theta$  的变化曲线

Fig. 4 Curves of light intensity  $I'_{(2\theta)}$  with the change of rotating angle  $\theta$

表 1 四分之一波片光轴方位的重复测量结果

Table 1 Repetitive measurement results of the optical-axis azimuth of the quarter-wave plate

Test number	$a_1$	$b_1$	Azimuth angle /( $^{\circ}$ )	Average of azimuth angle /( $^{\circ}$ )	Error of azimuth angle /( $^{\circ}$ )
1	0.9991	0.0426	89.65		0.09
2	0.9989	0.0471	89.78		0.04
3	0.9989	0.0478	89.80	89.74	0.06
4	0.9991	0.0423	89.64		0.10
5	0.9989	0.0471	89.78		0.04
6	0.9989	0.0477	89.80		0.06

## 5 结 论

通过减小器件安装误差、使用锁相放大器、提高步进电机转角精度和优化傅里叶系数得到了精确测量波片光轴方位的新方法。并利用米勒矩阵理论进行了理论推导和误差分析。误差分析表明该系统对四分之一波片光轴方位角的最大测量误差与光轴方位角本身的大小有关，当光轴方位角约为  $22.5^{\circ}$  的偶数倍时测量误差最小。实验结果证明该方法的标准不确定度为 0.03，这为实现波片的高精度安装提供了一把“尺子”。

## 参 考 文 献

- 1 Badr-Eddine Benkelfat, El-Houssine Horache, Qin Zou *et al.*. An electro-optic modulation technique for direct and accurate measurement of birefringence[J]. *Opt. Commun.*, 2003, (221): 271~278
- 2 Wang Wei, Li Guohua, Wu Fuquan *et al.*. A new method of measuring wave plate phase delay and fast axis azimuth[J]. *Chin. J. Lasers*, 2003, **30**(12): 1121~1123  
王 伟, 李国华, 吴福全 等. 测量波片延迟量和快轴方位的新方法[J]. *中国激光*, 2003, **30**(12): 1121~1123
- 3 Zhao Pei, Wu Fuquan, Hao Dianzhong *et al.*. Measurement of the delay of the quarter-wave plate by phase-modulated ellipsometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(3): 379~382  
赵 培, 吴福全, 郝殿中 等. 1/4 波片延迟量的相位调制椭圆偏测量法[J]. *光学学报*, 2006, **26**(3): 379~382
- 4 Xu Wengdong, Li Xishan. A new method for measuring phase delay of wave plate[J]. *Acta Optica Sinica*, 1994, **14**(10): 1096~1101  
徐文东, 李锡善. 波片相位延迟量精密测量新方法[J]. *光学学报*, 1994, **14**(10): 1096~1101
- 5 Gao Hong, Li Qingxiang, Xue Shifu *et al.*. Principles and error analysis of phase shifted laser polarimeter [J]. *Chin. J. Scientific Instrument*, 1992, **13**(3): 240~245  
高 宏, 李庆祥, 薛实福 等. 移相式激光偏振仪的原理及误差分析[J]. *仪器仪表学报*, 1992, **13**(3): 240~245
- 6 Li Jingzhen, Su Shixue, Zhao Junmin *et al.*. *Optics Handbook* [M]. Xi'an: Shaanxi Science and Technology Press, 1984. 568~569  
李景镇, 苏世学, 赵俊民 等. *光学手册*[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1984. 560~592
- 7 Luo Xianhe, Zhang Guangjun, Luo Fei *et al.*. *Photoelectric Testing Technique* [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 1994. 46~80  
罗先和, 张广军, 骆 飞 等. *光电检测技术*[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1994. 46~80
- 8 Soe-Mie F. Nee. Depolarization and principal Mueller matrix measured by null ellipsometry[J]. *Appl. Opt.*, 2001, **40**(28): 4933~4939
- 9 Mircea Mujat, Aristide Dogariu. Real-time measurement of the polarization transfer function[J]. *Appl. Opt.*, 2001, **40**(1): 34~44
- 10 Wang Zhaobing, Li Guohua, Lu Shulong *et al.*. Experimental study of the extinction ratio auto-measuring system[J]. *Chin. J. Lasers*, 2000, **A27**(5): 415~418  
王召兵, 李国华, 陆书龙 等. 消光比自动测试系统的试验研究[J]. *中国激光*, 2000, **A27**(5): 415~418