

文章编号: 0253-2239(2008)03-0409-05

复折射率光纤传输特性分析的 Davidenko 方法

赵楚军^{1,2} 周 萍² 曾夏辉² 唐志祥¹ 范滇元²

(¹ 湖南大学计算机与通信学院, 湖南 长沙 410082
² 中国科学院上海光学精密机械研究所高功率激光物理国家实验室, 上海 201800)

摘要 增益或损耗对光纤的传输特性影响很大。使用 Davidenko 方法对复折射率光纤的传输特性进行了分析。研究了复折射率纤芯或复折射率包层阶跃光纤, 通过比较发现, 使用 Davidenko 方法得到的解与精确解符合得很好。对于芯区为复折射率介质的光纤, HE_{11} 模与 LP_{01} 模增益值偏差约为 0.6%; 对于包层区为复折射率介质的光纤, HE_{11} 模与 LP_{01} 模增益值偏差约为 2%。实际研究工作中, 为了得到更精确的结果, 应该求解全矢量的复本征方程, 尤其是包层具有增益或损耗的光纤。

关键词 光纤光学; 传输特性; Davidenko 方法; 复折射率光纤

中图分类号 TN252 **文献标识码** A

Propagation Characteristics Analyses of Step-Index Fibers with Gain or Loss Using Davidenko's Method

Zhao Chujun^{1,2} Zhou Ping² Zeng Xiahui² Tang Zhixiang¹ Fan Dianyuan²

(¹ School of Computer and Communication, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China
² Joint Laboratory of High Power Lasers and Physics, Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China)

Abstract Gain and loss characteristics play important roles for the fiber. Davidenko's method is adopted to analyze characteristics of optical fibers with complex refractive index. The step-index fibers with complex refractive index in the core or cladding are discussed. Numerical results are in good agreement with those obtained by exact analysis. For the fibers with complex refractive index in the core, the gain deviation of HE_{11} and LP_{01} modes is about 0.6%. For the fibers with complex refractive index in the cladding, the above deviation is about 2%. In practical work, to get more accurate results, full-vector complex characteristic equation must be considered, especially for fiber with cladding of gain or loss.

Key words fiber optics; propagation characteristics; Davidenko's method; complex refractive-index fiber

1 引 言

当光纤引入增益或吸收, 光纤的传输特性就会变化^[1~4], 这时就要求解复折射率剖面光纤的复本征方程^[5~8]。一般的方法计算都很烦琐, 当光纤折射率虚部比较小时, 可以利用简单的微扰方法进行分析; 当折射率虚部不再是小量时, 需要使用严格

的方法求解。文献[7]报道了复折射率光纤的分析方法, 假定在忽略折射率虚部时求得的模场与真实模场相差甚微, 得到了两个实折射率剖面的标量波动方程, 两个实折射率剖面与复折射率剖面有关, 可用以求得复传播常量, 结果与精确数值计算符合很好, 但计算较为烦琐。文献[8]使用微扰法分析

收稿日期: 2007-05-15; 收到修改稿日期: 2007-10-11

基金项目: 国家自然科学基金(10674045, 10576012, 60538010)资助课题。

作者简介: 赵楚军(1979—), 男, 内蒙古多伦人, 博士研究生, 主要从事光波导理论方面的研究。

E-mail: c_j_zhao@yahoo.com.cn

导师简介: 范滇元(1939—), 男, 江苏常熟人, 博士生导师, 中国工程院院士, 主要从事高功率固体激光技术方面的研究。

E-mail: fandy@smmail.cn

复折射光纤,导出了芯区或包层区为复折射率的损耗或增益的解析关系式,这种方法运算速度快,但在折射率虚部较大时,结果与精确解就有出入。

求复本征方程时,一般使用的方法是 Newton-Raphson 方法、Muller 方法或 Devidenko 方法。同 Newton-Raphson 方法、Muller 方法相比,Devidenko 方法对初始值的设置要求不严格,而且收敛速度快^[9~11]。Devidenko 方法主要的思想是引入一个虚拟变量,把 n 个耦合的非线性代数方程简化成 n 个一阶微分方程。随着虚拟变量趋于无穷,就可以得到相应的解^[11]。不过,Devidenko 方法只适用于解析函数。在许多其他方法不能收敛的时候,这种方法仍能适用。

本文使用 Devidenko 方法对复折射率阶跃光纤的传输特性进行分析。从复本征方程出发,利用 Devidenko 方法,对纤芯或包层为复折射率的阶跃光纤进行了分析和比较,证明了 Devidenko 方法的有效性。而且对基于标量复本征方程和矢量复本征方程得到的结果进行了比较和分析。

2 阶跃折射率光纤的复本征方程及解法

图 1 给出了阶跃折射率光纤的示意图,其中区域 1 ($0 < r < a$) 的磁导率和介电常量分别是 μ_{r1}, ϵ_{r1} , 区域 2 ($r > a$) 的磁导率和介电常量分别是 μ_{r2}, ϵ_{r2} ,

而且电磁场分量可以由下式表达^[12]:

$$\begin{cases} E_{z1} = AJ_m(k_1 r) \exp[j(\omega t - \beta z)], \\ H_{z1} = BJ_m(k_1 r) \exp[j(\omega t - \beta z)], \\ 0 \leq r \leq a \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} E_{z2} = CK_m(k_2 r) \exp[j(\omega t - \beta z)], \\ H_{z2} = DK_m(k_2 r) \exp[j(\omega t - \beta z)], \\ r > a \end{cases} \quad (1b)$$

式中 J_m 和 K_m 分别是 m 阶第一类贝塞尔函数和修正的第二类贝塞尔函数。 A, B, C 和 D 为复系数, k_1 和 k_2 分别为区域 1 和区域 2 的复横向传播常量。复传播常量 $\beta = \beta' + j\beta''$ 和 k_1 和 k_2 关系为

$$k_1^2 = k_0^2 \mu_{r1} \epsilon_{r1} - \beta^2, \quad k_2^2 = \beta^2 - k_0^2 \mu_{r2} \epsilon_{r2},$$

其中 k_0 为自由空间波数, ω 为角频率。

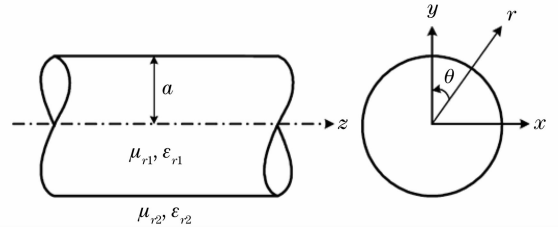


图 1 阶跃折射率光纤构型和坐标系统

Fig. 1 Geometry and cylindrical coordinate system

(r, θ, z) associated with the step-index fiber

通过 $r = a$ 处电磁场的连续条件,可以得到阶跃折射率光纤所满足的超越方程为

$$\left[\frac{\mu_{r1} J'_m(U)}{U J_m(U)} + \frac{\mu_{r2} K'_m(W)}{W K_m(W)} \right] \left[\frac{\epsilon_{r1} J'_m(U)}{U J_m(U)} + \frac{\epsilon_{r2} K'_m(W)}{W K_m(W)} \right] = \left(\frac{m\beta}{k_0} \right)^2 \left(\frac{V}{UW} \right)^4, \quad (2)$$

其中 $U = ak_1, W = ak_2, U, W$ 均为复数。

对于 HE_{11} 模,复本征方程可以写作

$$\left[\frac{\mu_{r1} J'_1(U)}{U J_1(U)} + \frac{\mu_{r2} K'_1(W)}{W K_1(W)} \right] \left[\frac{\epsilon_{r1} J'_1(U)}{U J_1(U)} + \frac{\epsilon_{r2} K'_1(W)}{W K_1(W)} \right] = \left(\frac{\beta}{k_0} \right)^2 \left(\frac{V}{UW} \right)^4. \quad (3)$$

在弱导近似条件下,线性偏振模 LP_{01} 所满足的复本征方程为

$$U \frac{J_1(U)}{J_0(U)} = W \frac{K_1(W)}{K_0(W)}. \quad (4)$$

对于复本征方程 $F(\beta = \beta' + j\beta'') = 0$, 其中 β' , β'' 分别为 β 的实部和虚部, t 为虚拟变量,通过计算, $F(\beta)$ 可以变换为^[11]

$$\begin{aligned} \frac{d\beta'}{dt} &= -\frac{1}{|F_\beta|^2} (\text{Re}[F] \text{Re}[F_\beta] + \text{Im}[F] \text{Im}[F_\beta]), \\ \frac{d\beta''}{dt} &= \frac{1}{|F_\beta|^2} (\text{Re}[F] \text{Re}[F_\beta] - \text{Im}[F] \text{Im}[F_\beta]), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $F_\beta = \partial F / \partial \beta$. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 给定 β' 和 β'' 的初值,

就可以求得相应的解。

3 比较和计算

为了验证 Devidenko 方法的有效性,对芯区为复折射率和包层区为复折射介质的情况进行了分析,并对不同方法得到的结果进行了比较。芯区和包层区的折射率可以分别表示为 $n_{co} = n_{cor} + jn_{coi}$ 和 $n_{cl} = n_{clr} + jn_{cli}$, 其中 n_{cor} 和 n_{clr} 分别为纤芯和包层区折射率的实部, n_{coi} 和 n_{cli} 分别为芯区和包层区折射率的虚部。假设所讨论光纤是各向同性、非磁的。本文计算中只考虑光纤的基模。

对于芯区是复折射率介质的阶跃光纤的线性偏

振模 LP_{01} , 表 1~表 3 给出了精确解、Sader 法、微扰法及 Davidenko 方法所得结果的比较。由表可见, 在折射率虚部较小时, 微扰法, Sader 法及 Davidenko 法与精确解符合得都很好, 但在折射率虚部较大的情

况下, 微扰法与精确解的偏差较大, 而 Davidenko 方法给出的结果仍与精确解符合得很好, 偏差小于 2×10^{-8} , 而且表中给出了 $n_{\text{coi}} = -10^{-2}$ 的增益值和 U 值。

表 1 精确法、Sader 法、微扰法和 Davidenko 法求得增益值的比较

Table 1 Comparison of gain between exact-value method, Sader's method, perturbation method and Davidenko's method

($a = 2.2 \mu\text{m}$, $\lambda = 1550 \text{ nm}$, $n_{\text{cor}} = 1.475$, $n_{\text{clr}} = 1.458$)

n_{coi}	$\alpha / (\text{dB/m})$			
	Accurate value ^[7]	Sader's method ^[7]	Perturbation method ^[8]	Davidenko's method
-10^{-7}	-2.6172	-2.6172	-2.6172	-2.6172
-10^{-5}	-261.7206	-261.7206	-261.7206	-261.7206
-10^{-3}	-26182.8268	-26160.8566	-26172.06	-26182.8263
-10^{-2}	—	—	—	-271072.9004

表 2 精确法、Sader 法、微扰法和 Davidenko 法求得 U 值的比较

Table 2 Comparison of U between exact values, Sader's method, perturbation method and Davidenko's method

($a = 2.2 \mu\text{m}$, $\lambda = 1550 \text{ nm}$, $n_{\text{cor}} = 1.475$, $n_{\text{clr}} = 1.458$)

n_{coi}	$U = U' + jU''$			
	Accurate value ^[7]	Sader's method ^[7]	Perturbation method ^[8]	Davidenko's method
-10^{-7}	$1.5252 - j2.0128 \times 10^{-6}$	$1.5252 - j2.0128 \times 10^{-6}$	$1.5252 - j2.0128 \times 10^{-6}$	$1.5252 - j2.0128 \times 10^{-6}$
-10^{-5}	$1.5252 - j2.0128 \times 10^{-4}$	$1.5252 - j2.0128 \times 10^{-4}$	$1.5252 - j2.0128 \times 10^{-4}$	$1.5252 - j2.0128 \times 10^{-4}$
-10^{-3}	$1.5260 - j2.0095 \times 10^{-2}$	$1.5247 - j2.0159 \times 10^{-2}$	$1.5260 - j2.0128 \times 10^{-2}$	$1.5260 - j2.0095 \times 10^{-2}$
-10^{-2}	—	—	—	$1.58909 - j0.174003$

表 3 精确法、Sader 法、微扰法和 Davidenko 法求得增益值的比较

Table 3 Comparison of gain between exact values, Sader's method, perturbation method and Davidenko's method

($a = 1.5 \mu\text{m}$, $n_{\text{cor}} = 1.477$, $n_{\text{clr}} = 1.466$, $n_{\text{coi}} = -10^{-6}$)

λ / nm	$\alpha / (\text{dB/m})$			
	Accurate value ^[7]	Sader's method ^[7]	Perturbation method ^[8]	Davidenko's method
800	-52.8387	-52.8387	-52.8387	-52.8387
1200	-22.3068	-22.3068	-22.3067	-22.3068
1600	-7.5825	-7.5825	-7.5825	-7.5825

计算量的大小对数值算法是相当关键的, 这里简单地对微扰法和 Davidenko 方法的计算时间进行了比较。当 $a = 2.2 \mu\text{m}$, $\lambda = 1550 \text{ nm}$, $n_{\text{cor}} = 1.475$, $n_{\text{clr}} = 1.458$, $n_{\text{coi}} = -10^{-7}$ 时, 在 CPU 主频为 2.4 GHz, 内存 1 GB 的计算机上计算, 微扰法求得增益值的时间约为 0.33 s, 而 Davidenko 方法所用的时间约为 0.52 s。所以, Davidenko 方法计算稍耗时, 但是得到的精度大大提高。

对于包层区是复折射率介质阶跃光纤的 LP_{01} 模, 表 4~表 6 给出了精确解、Sader 法、微扰法及 Davidenko 方法得到结果的比较。由表可见, 在折射率虚部很小或很大时, Davidenko 方法均能给出和精确解符合得很好的结果, 偏差小于 3×10^{-6} , 能够准确预测复折射率分布介质引起的增益或损耗, 而且给出了 $n_{\text{cli}} = -10^{-2}$ 的增益值和 W 值。

表 4 精确法、Sader 法、微扰法和 Davidenko 法求得增益值的比较

Table 4 Comparison of gain between exact values, perturbation method and Davidenko's method

($a = 2.2 \mu\text{m}$, $\lambda = 1550 \text{ nm}$, $n_{\text{cor}} = 1.475$, $n_{\text{clr}} = 1.458$)

n_{cli}	$\alpha / (\text{dB/m})$		
	Accurate value ^[8]	Perturbation method ^[8]	Davidenko's method
-10^{-7}	-0.9170	-0.9170	-0.9170
-10^{-5}	-91.7028	-91.7028	-91.7029
-10^{-3}	-9159.6958	-9170.2980	-9159.6955
-10^{-2}	—	—	-82514.8806

表 5 精确法、Sader 法、微扰法和 Davidenko 法求得 W 值的比较

Table 5 Comparison of W between exact values, perturbation method and Davidenko's method

($a=2.2 \mu\text{m}$, $\lambda=1550 \text{ nm}$, $n_{\text{cor}}=1.475$, $n_{\text{clr}}=1.458$)

n_{cl}	$W=W'+jW''$		
	Accurate value ^[8]	Perturbation method ^[8]	Davidenko's method
-10^{-7}	$1.2803+j6.6868 \times 10^{-6}$	$1.2803+j6.6818 \times 10^{-6}$	$1.2803+j6.6868 \times 10^{-6}$
-10^{-5}	$1.2803+j6.6868 \times 10^{-4}$	$1.2803+j6.6868 \times 10^{-4}$	$1.2803+j6.6868 \times 10^{-4}$
-10^{-3}	$1.2813+j6.6842 \times 10^{-2}$	$1.2803+j6.6868 \times 10^{-2}$	$1.2813+j6.6842 \times 10^{-2}$
-10^{-2}	—	—	$1.3762+j0.644257$

表 6 精确法、Sader 法、微扰法和 Davidenko 法求得增益值的比较

Table 6 Comparison of gain between exact values, perturbation method and Davidenko's method

($a=1.5 \mu\text{m}$, $n_{\text{cor}}=1.477$, $n_{\text{clr}}=1.466$, $n_{\text{cl}}=-10^{-6}$)

λ / nm	$\alpha / (\text{dB/m})$		
	Accurate value ^[8]	Perturbation method ^[8]	Davidenko's method
800	-15.5426	-15.5426	-15.5426
1200	-23.2731	-22.2731	-23.2731
1600	-26.5688	-26.5688	-26.5689

表 1~表 6 是基于弱导近似得到的 LP_{01} 模的结果,实际上,基于矢量复本征方程的 HE_{11} 模才应该是基模。对纤芯为复折射率介质和包层区为复折射介质的情况进行了分析,并对其基于(4)式和(2)式给出的解做了比较,如表 7、表 8 所示。

表 7 LP_{01} 、 HE_{11} 模增益值和 U 值的比较

Table 7 Comparison of gain and U between LP_{01} and HE_{11} using Davidenko's method

($a=2.2 \mu\text{m}$, $\lambda=1550 \text{ nm}$, $n_{\text{cor}}=1.475$, $n_{\text{clr}}=1.458$)

n_{co}	$\alpha / (\text{dB/m})$		$U=U'+jU''$	
	LP_{01}	HE_{11}	LP_{01}	HE_{11}
-10^{-7}	-2.6172	-2.5994	$1.5252-j2.0128 \times 10^{-6}$	$1.5295-j2.0459 \times 10^{-6}$
-10^{-5}	-261.7206	-259.941	$1.5252-j2.0128 \times 10^{-4}$	$1.5295-j2.0459 \times 10^{-4}$
-10^{-3}	-26182.8263	-26004.7568	$1.5260-j2.0095 \times 10^{-2}$	$1.5302-j2.0426 \times 10^{-2}$
-10^{-2}	-271072.9004	-269242.5695	$1.58909-j0.174003$	$1.5936-j0.1773$

表 8 LP_{01} 、 HE_{11} 模增益值和 W 值的比较

Table 8 Comparison of gain and W between LP_{01} and HE_{11} using Davidenko's method

($a=2.2 \mu\text{m}$, $\lambda=1550 \text{ nm}$, $n_{\text{cor}}=1.475$, $n_{\text{clr}}=1.458$)

n_{cl}	$\alpha / (\text{dB/m})$		$W=W'+jW''$	
	LP_{01}	HE_{11}	LP_{01}	HE_{11}
-10^{-7}	-0.9170	-0.9350	$1.2803+j6.6868 \times 10^{-6}$	$1.2752+j6.6669 \times 10^{-6}$
-10^{-5}	-91.7029	-93.5025	$1.2803+j6.6868 \times 10^{-4}$	$1.2752+j6.6669 \times 10^{-4}$
-10^{-3}	-9159.6955	-9339.7200	$1.2813+j6.6842 \times 10^{-2}$	$1.2762+j6.6643 \times 10^{-2}$
-10^{-2}	-82514.8806	-84363.2121	$1.3762+j0.644257$	$1.3706+j0.6424$

对于芯区为复折射介质的光纤, HE_{11} 模比 LP_{01} 模具有大的增益,增益值偏差约为 0.6%;对于包层区为复折射率介质的光纤, HE_{11} 模比 LP_{01} 模具有小的增益,增益值偏差约为 2%。在一般讨论中,由于光纤纤芯和包层折射率差不大,大多采用弱导近似并对 LP_{01} 模进行分析,这样可以简化分析。但是,基于矢量复本征方程和标量复本征方程得到的解有差异,如果要得到更精确的结果,必须考虑矢量复本征方程。

4 结 论

Davidenko 方法可以用来精确分析复折射率阶跃光纤。通过对纤芯或包层为复折射率介质的阶跃光纤进行分析和比较,证明了 Davidenko 方法的有效性。基于标量复本征方程和矢量复本征方程得到的解有差异,尤其是包层具有增益或吸收时,精确求解应使用矢量复本征方程。

参 考 文 献

- 1 Sunanda, E. K. Sharma. Field variational analysis for modal gain in erbium-doped fiber amplifiers[J]. *J. Opt. Soc. Am. B.*, 1999, **16**(9): 1344~1347
- 2 Jiang Nan, Wang Donglin, Pu Xiaoyun. Whispering-Gallery-mode laser of evanescent wave exciting and coupling dye gain in cylindrical microcavity[J]. *Chin. J. Lasers*, 2007, **34**(7): 920~923
江楠, 王东林, 普小云. 消逝波激励及增益耦合的柱形微腔回音腔模激光辐射[J]. *中国激光*, 2007, **34**(7): 920~923
- 3 Cheng Qinghua, Xu Dahai, Cao Li *et al.*. Influence of net gain on the statistical fluctuation in a single-mode laser system[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2006, **4**(7): 401~403
- 4 Li Shufeng, Li Chengren, Song Changlie. Er-doped and Yb-Er co-doped Al_2O_3 waveguide amplifier[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(5): 928~934
李淑凤, 李成仁, 宋昌烈. 掺 Er 及 Yb-Er 共掺 Al_2O_3 光波导放大器的理论与实验研究[J]. *光学学报*, 2007, **27**(5): 928~934
- 5 R. Singh, Sunanda, E. K. Sharma. Propagation characteristics of single-mode optical fibers with arbitrary complex index profiles: A direct numerical approach[J]. *J. Quant. Electron.*, 2001, **37**(5): 635~640
- 6 She Shouxian. Accurate perturbation analysis of guided modes of planar waveguides with gain and losses[J]. *Acta Optica Sinica*, 1997, **17**(8): 962~967
余守宪. 有增益及损耗的平板波导模的精确微扰分析[J]. *光学学报*, 1997, **17**(8): 962~967
- 7 J. E. Sader. Method for analysis of complex refractive index profile fibers[J]. *Opt. Lett.*, 1990, **15**(2): 105~107
- 8 Wu Liu, Chen Weiliang, She Shouxian. Propagation characteristic analyses of fibers with loss or gain using perturbation method[J]. *J. Optoelectronics • Laser*, 2001, **12**(4): 374~377
吴柳, 陈伟亮, 余守宪. 有增益或损耗的光纤传输特性的微扰法[J]. *光电子 • 激光*, 2001, **12**(4): 374~377
- 9 K. Y. Kim, H. S. Tae, J. H. Lee. Analysis of leaky modes in circular dielectric rod waveguides[J]. *Electron. Lett.*, 2003, **39**(1): 61~62
- 10 A. Reisinger. Characteristics of optical guided modes in lossy waveguides[J]. *Appl. Opt.*, 1973, **12**(5): 1015~1025
- 11 H. A. N. Hejase. On the use of Davidenko's method in complex root search[J]. *IEEE Trans. Microw. Theory Technol.*, 1993, **41**(1): 141~143
- 12 E. Snitzer. Cylindrical dielectric waveguide modes[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1961, **51**(5): 491~498