

文章编号: 0253-2239(2008)02-0273-06

数字光弹性相移法中全场等倾角和等差线相位

计欣华 张丽娜* 史丽军 陈金龙 秦玉文

(天津大学力学系, 天津 300072)

摘要 以径向受压圆盘为例,从弹性力学的角度详细分析了模型全场等倾角相位的情况,分析第一主应力的方向,在六步相移法的基础上提炼出圆盘全场等倾角相位和等差线的真实相位。采用有限元软件 MARC 与形函数拟合相结合的方法模拟径向受压圆环六步相移图和等差线相位图,可以推广到没有解析解或者解析解复杂的应力模型的光弹性实验模拟。通过径向受压圆盘实验验证了方法的可行性,实现光弹法中自动提取全场等差线的信息。

关键词 光学测量; 光弹性; 相移法; 等差线; 等倾线; 主应力迹线

中图分类号 O348.1 文献标识码 A

Whole-Field Phase of Isochromatic Angle and Isoclinic Line in Digital Photoelastic Phase-Shifting Technique

Ji Xinhua Zhang Lina Shi Lijun Chen Jinlong Qin Yuwen

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract Taking the disk under diametral compression as an example, the whole-field isoclinic-angle phase of the model was analyzed according to elastic mechanics, and the principal-stress direction was put forward. Base on six-step phase shifting technique, the actual phase of whole-field isoclinic angle and whole-field isochromatic of a disk was extracted. Combining finite element software MARC with fitting of shape function, six-step phase shifting and isochromatic phase patterns of a ring under diametral compression were simulated. This method can be generalized to simulate the photoelastic experiment of stress model with complex analytic solution or without analytic solution. The feasibility of this method was proved by the experiments of a disk under diametral compression, and the information of whole-field isochromatic could be extracted automatically.

Key words optical measurement; photoelastic; phase shifting technique; isochromatic line; isoclinic line; trace of the principal stress

1 引言

E. A. Patterson 等^[1]提出的六步相移法是确定光弹性等差线和等倾角的全场方法,将应力模型置于正交圆偏振光场中,采用单色光入射,分别旋转两个 1/4 波片和分析镜,得到六幅具有不同相位差的图像,再通过反正切运算得到需要的等倾角(第一主应力方向)和等差线相位值。由于反正切运算得到的全场等倾角值中耦合了第一和第二主应力方向的信息,如何分离主应力方向,是光弹实验中感兴趣的话题之一,它直接影响了等差线相位的计算。文献[2~6]对等差线与等倾角耦合的情况进行了分析,主要采用直接对全场等差线相位图像进行处理,消除全场等倾角不统一的影响。本文从理论公式上分析了产生影响的原因,利用绘制主应力迹线的方法分析全场等倾角相位,针对一些解析解比较复杂

和没有解析解的应力模型,结合有限元软件模拟六步相移图和等差线相位图。

2 六步相移基本原理

将应力模型置入图 1 的圆偏振光学系统中^[7],应力模型在该系统中从检偏器出射的光矢量表达式为

$$\mathbf{E} = \mathbf{P}_\beta \mathbf{Q}_\phi \mathbf{J}_\phi \mathbf{Q}_\varepsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 为从起偏镜出射的平面偏振光的琼斯向量, \mathbf{P}_β 为检偏器的琼斯矩阵, β 为检偏器与参考系 x 轴的夹角:

$$\mathbf{P}_\beta = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

\mathbf{Q}_ϕ 为第二个 1/4 波片的琼斯矩阵, ϕ 为第二个 1/4 波

收稿日期: 2007-04-25; 收到修改稿日期: 2007-09-01

作者简介: 计欣华(1946—),女,浙江杭州市人,教授,主要从事光学测量方面的研究。E-mail: xhji@tju.edu.cn

* 通信联系人。E-mail: linazh1978@sina.com

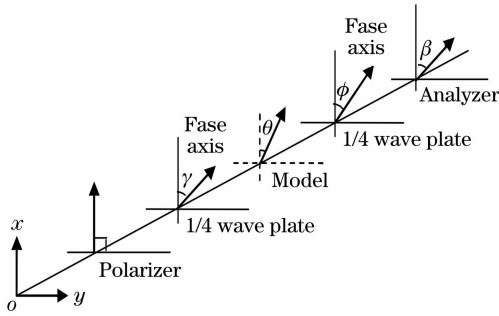


图 1 圆偏振光学系统

Fig. 1 Optical system of circular polariscope

片快轴与参考系 x 轴的夹角:

$$Q_\phi = \begin{bmatrix} i\cos^2\phi + \sin^2\phi & (i-1)\cos\phi\sin\phi \\ (i-1)\cos\phi\sin\phi & i\sin^2\phi + \cos^2\phi \end{bmatrix}, \quad (3a)$$

Q_ξ 为第一个 1/4 波片的琼斯矩阵, ξ 为第一个 1/4 波片快轴与参考系 x 轴的夹角:

$$Q_\xi = \begin{bmatrix} i\cos^2\xi + \sin^2\xi & (i-1)\cos\xi\sin\xi \\ (i-1)\cos\xi\sin\xi & i\sin^2\xi + \cos^2\xi \end{bmatrix}, \quad (3b)$$

J_θ 为介质的琼斯矩阵, θ 为等倾角相位:

$$J_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(i\delta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (4)$$

那么从检偏器出射的光强表达式为

$$I = EE^* = I_b + \frac{I_a}{2} \{1 - \cos\delta \cos 2(\beta - \phi + \xi) + \sin[\delta + 2(\beta + \phi)] \sin 2(\theta + \beta) \sin 2(\beta + \phi - \xi)\}, \quad (5)$$

式中角标 $*$ 为复共轭矩阵符号, I_b 为背景光强, I_a 为经过起偏镜的光的振幅。

当两个 1/4 波片和检偏器按照一定角度旋转时,可得到不同的光强表达式^[8~12](表 1)。

表 1 六步相移光强表达式

Table 1 Light intensity expression for six-step phase shifting technique

Number	ξ	ϕ	β	Intensity
1	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$	$I_1 = I_b + 0.5I_a(1 - \cos\delta)$
1	$3\pi/4$	$\pi/4$	0	$I_2 = I_b + 0.5I_a(1 + \cos\delta)$
3	$3\pi/4$	0	0	$I_3 = I_b + 0.5I_a(1 + \sin\delta\sin 2\theta)$
4	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/4$	$I_4 = I_b + 0.5I_a(1 + \sin\delta\cos 2\theta)$
5	$\pi/4$	0	0	$I_5 = I_b + 0.5I_a(1 - \sin\delta\sin 2\theta)$
6	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$I_6 = I_b + 0.5I_a(1 - \sin\delta\cos 2\theta)$

根据表 1 的六个光强表达式,得到

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{I_3 - I_5}{I_4 - I_6}\right), \quad (6)$$

当 $\sin\delta \neq 0$ 时有

$$\delta = \arctan\left[\frac{(I_5 - I_3)\sin 2\theta + (I_6 - I_4)\cos 2\theta}{I_1 - I_2}\right]. \quad (7)$$

3 径向受压圆盘全场等倾角和等差线相位分析

3.1 六步相移结果

采用有理论精确解的径向压缩圆盘来进行仿真模拟,圆盘直径 50 mm,厚度 6 mm,材料条纹值 11N/(mm·lp),径向压力 832 N,光源波长 715 nm,图像大小 256 pixel×256 pixel。

利用(6)式可得到全场等倾角相位 θ 在 $[0, \pi/2]$ 之间,图 2(a)是模拟圆盘的全场等倾角图,图 2(b)是相对于该等倾角用(6)式计算得到的等差线相位图,范围在 $[-\pi, \pi]$ 之间。两幅图像均用 256 级灰度显示,图 2(a)中 0 对应的灰度值是 0, $\pi/2$ 对应的灰度值是 255,灰度值越高图像颜色越浅,图 2(b)中 $-\pi$ 对应的灰度值是 0, π 对应的灰度值是 255。

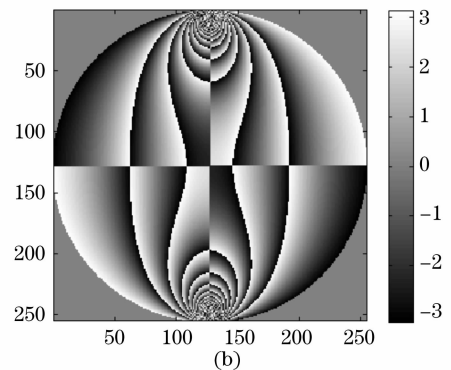
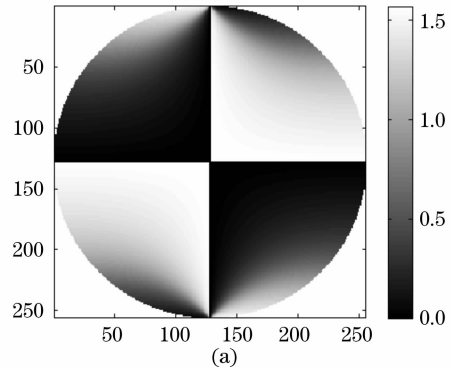


图 2 相移法结果。(a) 等倾角相位图, (b) 等差线相位图
Fig. 2 Results by phase-shift method. (a) Isoclinic-angle phase map, (b) isochromatic phase map

可见,六步相移法直接计算得到的等倾角与等差线相位图都不能反映其真实的主应力方向和差值大小,在等倾线为 0° 时等差线相位出现了反向。

3.2 全场等倾角和等差线真实相位

等倾角相位即主应力的方向,对于平面问题,若

设 σ_1 和 σ_2 为模型上任一点的两个主应力, 其中 $\sigma_1 > \sigma_2$ 。 σ_1 与整体坐标轴 x 的夹角用 θ_1 表示, σ_1 与整体坐标轴 y 的夹角用 θ_2 表示, 则有

$$\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 = 1, \quad \theta_1 = \theta_2 + \pi/2, \quad (8)$$

根据弹性力学理论, σ_2 与整体坐标轴 x 的夹角为 θ_2 , 则 σ_2 与整体坐标轴 y 的夹角为 θ_1 。平面模型中一点的主应力方向可约定为 σ_1 与 x 轴方向的夹角(或者 σ_1 与 y 轴方向的夹角)。

在自由边界上的各点, 仅有一个不为 0 的主应

力, 其方向与边界相切, 所以自由边界上各点的主应力方向为其边界上该点的切线方向。如图 3(a) 所示的径向受压圆盘, 边界上 A, B, A_1, B_1 。四点的主应力方向分别为矢量线 I_A, I_B, I_{A1} 和 I_{B1} 的方向, 约定全场主应力方向均表示为第一主应力 σ_1 与 x 轴的夹角, 则该四点的主应力方向角分别为 $80^\circ, 70^\circ, 100^\circ$ 和 110° 。图 3(b) 是圆盘全场等倾角相位图, 范围 $0 \sim \pi$ 。

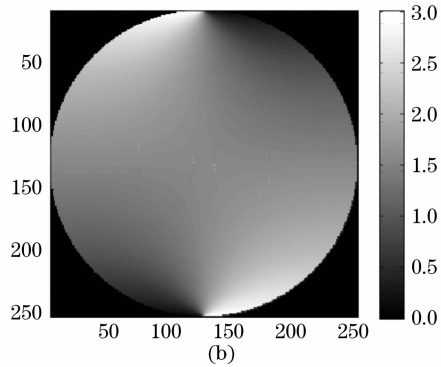
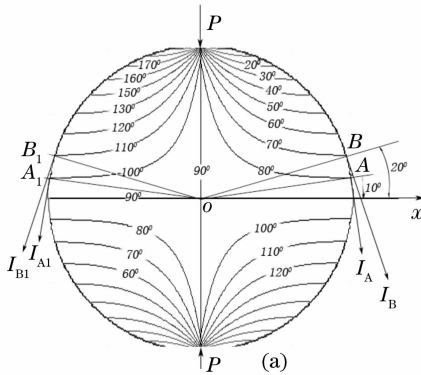


图 3 径向受压圆盘等倾角相位图(a), 全场等倾角相位图(b)

Fig. 3 Isoclinic-angle phase map (a), whole field isoclinic-angle phase map (b) of a disk under diametral compression

3.3 全场等倾角和等差线相位的调整步骤

3.3.1 等倾角相位对应的主应力迹线

利用模型的等倾线图绘制主应力迹线, 主应力迹线是由两族所组成, 在主应力迹线上, 每一点的切线方向即为该点的两个主应力方向。已知模型中等倾线分布, 要求绘制通过点 P 的主应力迹线。首先确定 x 轴 10° ; 以 P 点为起点, 以 P 点处等倾线的值为斜率做一条短的线段 l_1 ; 以 l_1 的终点做起点, 以 P_1 点处等倾线的值为斜率做线段 l_2 , 其终点是 P_2 , 以此类推, 直到点 P_n 超出模型边界; 联结这些小的线段并平滑, 则此线即为通过 P 点的主应力迹线之一。一族主应力迹线求得后, 则另一族可根据正交关系做出。

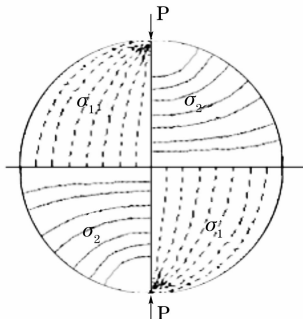


图 4 径向受压圆盘部分主应力迹线

Fig. 4 Trace of principal stress of a disk under diametral compression

主应力迹线的切线方向即是该点的等倾角相位值。图 4 是根据径向受压圆盘等倾线相位图[图 2(a)]绘制的一组主应力迹线的示意图, 其中实线表示 σ_2 的方向, 虚线表示 σ_1 的方向, 另一组可根据正交关系作出。可见图 2(a) 的等倾角相位即包含 σ_1 与 x 轴的夹角又含有 σ_2 与 x 轴的夹角信息, 要得到真实的相位值需要对全场主应力方向进行统一。

3.3.2 等倾角相位的调整

由图 4 可知, 在集中力作用点处, 以 0° 等倾线为界, 两个区域分别表示不同的在主应力方向, 得到全场统一的等倾角真实相位的方法是主应力 σ_2 对应区域的等倾角值加上(或减去) 90° 。根据全场等倾

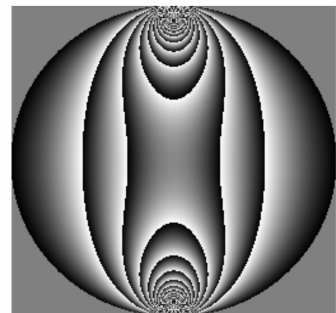


图 5 径向受压圆盘全场等差线相位图

Fig. 5 Whole field isochromatic phase map of a disk under diametral compression

线参量和主应力迹线可以作出全场等倾线相位图 [图 3(b)],图 5 是根据全场等倾角计算得到的等差线相位图。

4 径向受压圆环模拟分析

圆环外半径 50 mm,内半径 30 mm,厚度 5

mm,材料条纹值 $11.8\text{N}/(\text{mm} \cdot \text{lp})$,光源波长 715 nm ,径向受压 300 N 。利用有限元软件 MARC 计算该圆环主应力场,得到的是网格节点的数值,通过对各网格进行函数拟合,计算出全场主应力值,进而得到表 1 表达式中的六幅图,如图 6。

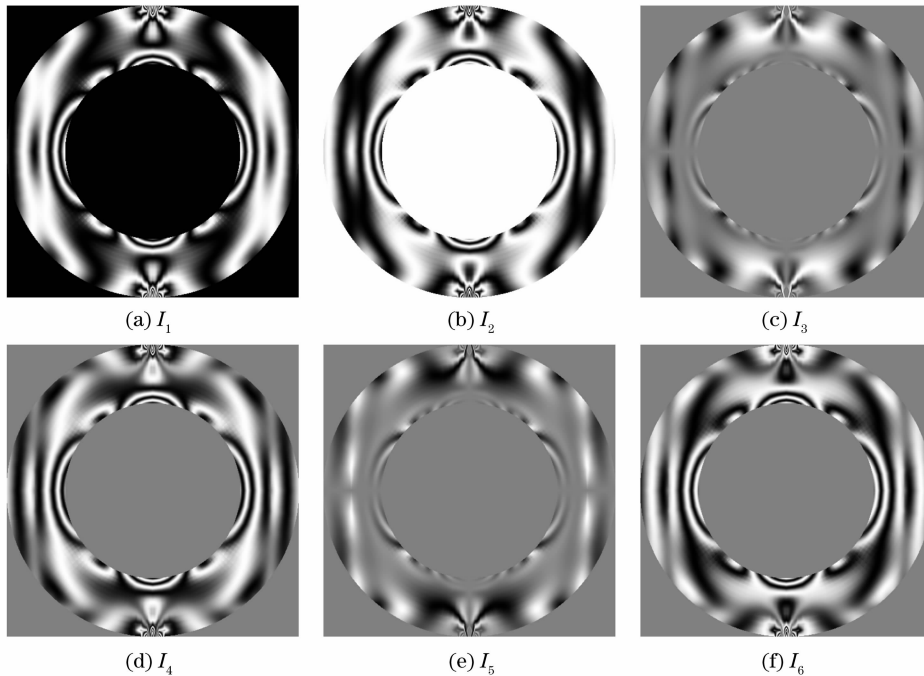


图 6 六步相移法对应的径向压缩圆环模拟图像

Fig. 6 Simulated images of a ring under diametral compression

按照(5)式计算得到的范围 $0 \sim \pi/2$ 的等倾角相位图见图 7(a),图 7(a)中 P 点为主应力作用点, O 点为各向同性点,点 A, B, C, D, E, F, G, H 是奇点;图 7 (b)是根据图 7(a)绘制的部分主应力迹线图。可见,在这些标示点处,以 0° 等倾线为界,模型分为两部分,这两部分的等倾线分别表示不同的主应力方向。

由六步相移法计算得到的受力模型全场等倾角相位在各向同性点、零应力点(奇点和自由方角)附

近有与集中力作用点一致的情况。所以统一全场等倾角相位的必要条件是根据模型范围 $0 \sim \pi/2$ 的全场等倾角相位图中找到这些特殊点和包含这些特殊点的边界与 0° 等倾线形成的区域;结合自动绘制的主应力迹线来判断需要加(减) 90° 的区域。

图 8 为调整好的圆环全场等倾角相位图和根据其计算得到的全场等差线相位图。把计算得到的等差线相图进行去包裹运算即得到真实的等差线相位。

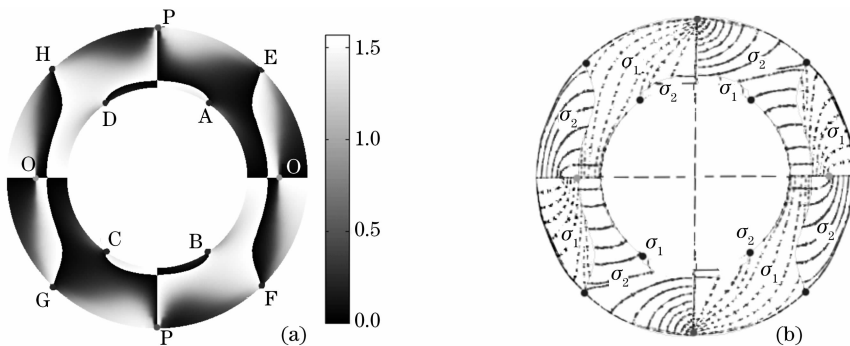


图 7 径向受压圆环全场等倾角相位图(a),部分主应力迹线(b)

Fig. 7 Whole field isoclinic-angle phase map (a), the trace of principal stress (b) of a ring under diametral compression

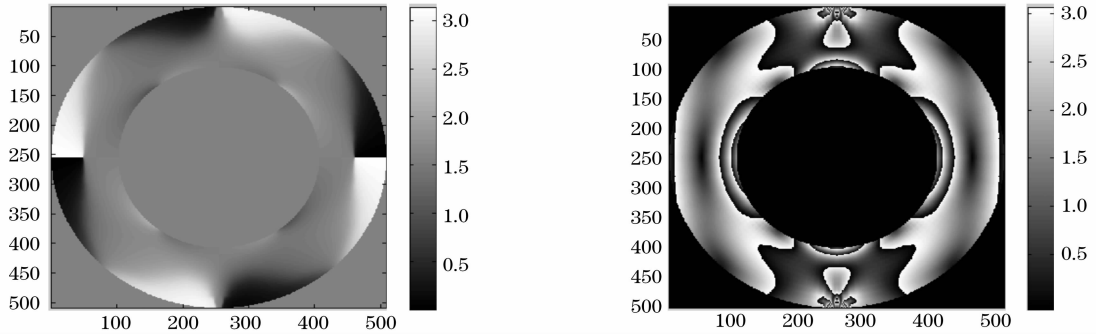


图 8 调整后的圆环全场等倾角相位图(a), 全场等差线相位图(b)

Fig. 8 Whole field isoclinic-angle phase map (a) and whole field isochromatic phase map of ring after adjustment

5 实验验证

将冻结圆盘模型放入平面偏振场中,圆盘直径 40 mm,厚度 6 mm,材料条纹值为 11. 2N/(mm · lp),用 CCD 摄像机分别拍摄其按照表 1 表达式的六幅图像,图 9 为统一前和统一后的圆盘全场等倾角相

位,其对应的等差线相位信息在图 10 中给出。

通过结合受力模型主应力迹线来辨别第一主应力方向,统一全场等倾角相位信息,得到真实的受力模型包裹的等差线相位值,实验结果比较理想,若需得到等差线全局级数,需要进行去包裹处理,如图 10(c)。

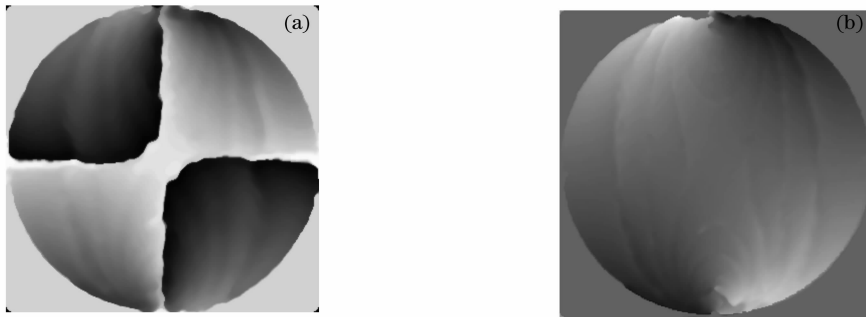


图 9 处理前(a)和处理后(b)的圆盘等倾角相位图

Fig. 9 Isoclinic-angle phase maps of a disk before (a) and after (b) adjustment

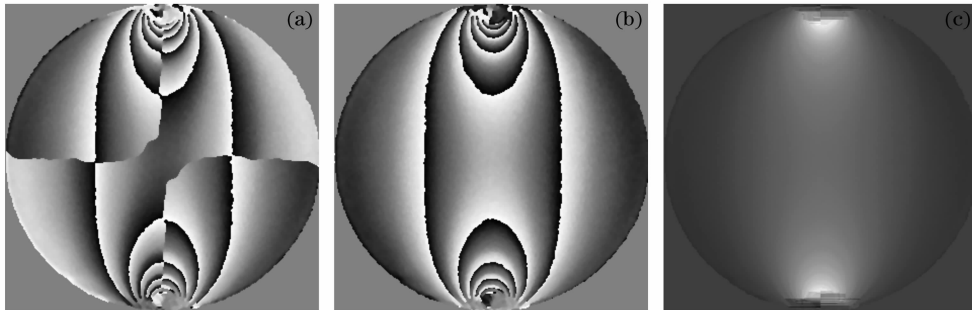


图 10 调整前(a),调整后(b)的圆盘等差线相位图,调整后的去包裹相图(c)

Fig. 10 Isochromatic phase maps of a disk before (a), after (b) adjustment, and unwrapping phase map after adjustment (c)

6 结 论

光弹性相移法所确定的包含主应力信息的相位值对应等倾线和等差线两个参量,分析了六步相移法,以径向受压圆盘为例详细讨论了其等倾角相位的分布情况以及等差线相位与等倾角相互耦合的原

因和分离的方法。提出了利用有限元软件来模拟没有解析解或者解析解复杂的应力模型的全场等差线相位值的方法。径向受压圆盘实验表明,统一全场等倾角相位信息,可得到真实的受力模型包裹的等差线相位值,证实了本文方法的可行性。

参 考 文 献

- 1 E. A. Patterson, Z. F. Wang. Towards full field automated photoelastic analysis of complex components[J]. *Strain*, 1991, **27**(2): 49~56
- 2 V. Sai Prasad, K. R. Madhu, K. Ramesh. Towards effective phase unwrapping in digital photoelasticity[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2004, **42**: 421~436
- 3 Pang Yantao, Li Guohua. Theoretical analysis to accuracy of quarter wave plate to photoelastic effect[J]. *J. Qufu Normal University*, 1999, **25**(2): 48~50
庞岩涛,李国华. 1/4 波片精度对光弹影响的理论分析[J]. 曲阜师范大学学报, 1999, **25**(2): 48~50
- 4 Li Jitao, Su Xianhong, Li Jieli *et al.*. Phase unwrapping in photoelasticity[J]. *Acta Optica Sinica*, 1997, **17**(11): 1538~1541
李继陶,苏显渝,李杰林等. 光弹性测量中的位相展开[J]. 光学学报, 1997, **17**(11): 1538~1541
- 5 Lei Zhenkun, Yun Dazhen. Whole-field digital determination of isoclinic parameter by five-step color phase shifting technique[J]. *Optical Technique*, 2002, **28**(2): 143~144
雷振坤,云大真. 全场数字化测量光弹性等倾角的五步彩色相移法[J]. 光学技术, 2002, **28**(2): 143~144
- 6 A. Ajovalasit, S. Barone, G. Petrucci. A method for reducing the influence of the quarter-wave plate error in phase-shifting photoelasticity[J]. *J. Strain Anal. Engng. Des.*, 1998, **33**(3): 207~216
- 7 K. Ramesh, S. K. Mangal. Phase shifting calculations in 2-D photoelasticity: revisited[J]. *J. Aeronautical Soc. India*, 2000, **52**(2): 121~136
- 8 Ji Xinhua, Deng Zongbai, Lu Yang. *Experimental Mechanics in Engineering* [M]. Beijing: China Machine Press, 2005. 142~148
计欣华,邓宗白,鲁阳. 工程实验力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005. 142~148
- 9 P. Pinit, E. Umezaki. Digitally whole-field analysis of isoclinic parameter in photoelasticity by four-step color phase-shifting technique[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2007, **45**(7): 795~807
- 10 R. Ramji, V. Y. Gadre, K. Ramesh. Comparative study of evaluation of primary isoclinic data by various spatial domain methods in digital photoelasticity[J]. *J. Strain Anal.*, 2006, **41**(5): 333~348
- 11 Hu Jianming, Zeng Aijun, Wang Xiangzhao. New method for measuring retardation of quarter-wave plate [J]. *Chin. J. Lasers*, 2006, **33**(5): 659~662
胡建明,曾爱军,王向朝. 精确测量 1/4 波片相位延迟量的新方法[J]. 中国激光, 2006, **33**(5): 659~662
- 12 Hu Jianming, Zeng Aijun, Wang Xiangzhao. Method to measure phase retardation of wave plate based on photoelastic modulation [J]. *Chin. J. Lasers*, 2006, **26**(11): 1681~1686
胡建明,曾爱军,王向朝. 基于光弹调制技术的波片相位延迟量测量方法[J]. 中国激光, 2006, **26**(11): 1681~1686