

高斯光束对标准硅球直径测量的影响分析

康岩辉¹ 郑继贵¹ 罗志勇² 叶声华¹

(¹ 天津大学精密测试技术及仪器国家重点实验室, 天津 300072; ² 中国计量科学研究院, 北京 100013)

摘要 针对高精度硅球直径测量系统的特点, 分析平面波反射光的多光束干涉和双光束干涉, 以及正入射时高斯光束反射光中心的多光束干涉和双光束干涉, 对不同条件下的高斯光束反射光中心的干涉光强进行了数值模拟。对采用五步相移算法时高斯多光束干涉的影响进行了研究, 给出了特定参数条件下不同束腰 ω_0 和传播距离 z 时的最大相位误差, 当 $\omega_0 = 5$ mm, $z = 2000$ mm 时的最大相位误差达 0.08%。

关键词 光学测量; 硅球直径测量; 高斯光束; 多光束干涉

中图分类号 TH744.3 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20082811.2148

Impact Analysis of Gaussian Beam on Measurement of Single Crystal Silicon Sphere Diameter

Kang Yanhui¹ Zhu Jigui¹ Luo Zhiyong² Ye Shenghua¹

(¹ State Key Laboratory of Precision Measuring Technology and Instruments, Tianjin University, Tianjin 300072, China)
² National Institute of Metrology, Beijing 100013, China)

Abstract Aiming at the characteristics of a single crystal silicon sphere diameter measuring system, multiple-beam interference and dual-beam interference of the reflected light of a plane wave and those of the central reflected light of a Gaussian beam with normal incidence are analyzed. Also numerical simulations for the reflected interferential intensity of a Gaussian beam center in different situations are presented. Furthermore, the influence of five-step phase-shifting algorithm on Gaussian multiple-beam interference is studied, and the maximal phase errors are shown with some specific parameters. The maximal phase error is 0.08% for beam waist $\omega_0 = 5$ mm and propagation distance $z = 2000$ mm.

Key words optical measurement; silicon sphere diameter measurement; Gaussian beam; multiple-beam interference

1 引 言

目前,正在进行的阿伏伽德罗常数测量是实现质量基准由“实物基准”更新为“自然基准”的关键,而单晶硅球直径的精密测量是阿伏伽德罗常数测量中一项重要内容,并决定着最终的测量不确定度^[1,2]。高精度硅球直径测量系统利用标准板和球面反射光两束光相干产生干涉条纹,并通过相移算法精确确定干涉条纹的小数部分^[3~5]。

在硅球直径测量系统中,光源采用高稳频 He-

Ne 激光器,其发出的光束具有高斯分布的特性^[6]。在一般的干涉测量中,可直接将扩束后的激光束作为平面波进行处理而不会带来较大误差。但对于高精度测量,高斯光束的影响不可忽略。彭君等^[7]研究了激光高斯光束对大角度干涉测量的影响,可知,高斯光束干涉后的合成振动有一个附加的相位。对于最终测量精度为 1 nm 的硅球直径测量系统,这一附加相位对光强影响而导致的测量误差可能已达到 $10^{-10} \sim 10^{-9}$ m 级。因此,应该根据高斯光束的特

收稿日期: 2008-02-22; 收到修改稿日期: 2008-05-16

基金项目: 国家科技支撑计划(2006BAF06B06)资助课题。

作者简介: 康岩辉(1981—),男,博士研究生,主要从事激光及光电测试技术,视觉检测技术等方面的研究。

E-mail: yanhuikang@tju.edu.cn

导师简介: 叶声华(1934—),男,中国工程院院士,主要从事激光及光电测试、视觉检测技术等方面的研究。E-mail: shhuaye@tju.edu.cn

点,考虑其在硅球直径测量系统中的影响^[8]。本文分析了平面波反射光的多光束干涉和双光束干涉,以及正入射时高斯光束反射光中心的多光束干涉和双光束干涉,对不同条件下的高斯光束反射光中心的干涉光强进行了数值模拟。

2 高精度单晶硅球直径测量的原理

图 1 为硅球直径测量的基本原理图。首先对 L 、 L_1 及 L_2 进行初测,然后精确计算总干涉级次 N ,并确定干涉级小数部分 ϵ ,最后即可由公式计算得到硅球直径 $D=L-L_1-L_2=(N+\epsilon)\lambda/2$,其中 λ 为激光波长。

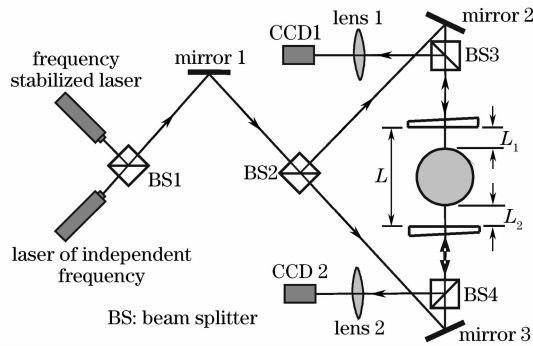


图 1 硅球直径测量原理图

Fig. 1 Schematic diagram for measuring the diameter of silicon sphere

该直径测量系统利用标准板和硅球表面反射的两束光相干产生干涉条纹,其光强由 12 位灰度的 CCD 图像传感器记录下来。采用“小数重合”原理测量干涉条纹级次的整数部分,通过相移算法精确确定干涉条纹的小数部分。目前采用的相移方法有:机械扫描法^[9]、激光变频法^[10]、压力扫描法等。

3 理论分析

3.1 平面波干涉

一平面入射光束经标准板和待测平面多次反射和透射。设标准板和待测平面的反射率分别为 ρ 和 ρ' ,考虑半波损失后,计算得到平面波反射光的多光束干涉和双光束干涉光强分别为^[3]

$$I = A_0^2 \left[1 - \frac{(1-\rho)(1-\rho')}{1+\rho\rho'-2\sqrt{\rho\rho'}\cos\varphi} \right], \quad (1)$$

$$I' = A_0^2 [\rho + \rho'(1-\rho)^2 - 2\sqrt{\rho\rho'}(1-\rho)\cos\varphi], \quad (2)$$

式中 A_0 为入射光振幅, φ 为相邻光束的相位差。

设初始入射光振幅 $A_0 = 1$,光学石英材料制成标准板(单面增透)的反射率 $\rho = 0.035$,单晶硅面的反射率 $\rho' = 0.35$,图 2 给出了平面波干涉光强随相位变化曲线,图 2 中的虚线代表多光束干涉的光强,实线代表双光束干涉的光强,点划线代表两者之差。

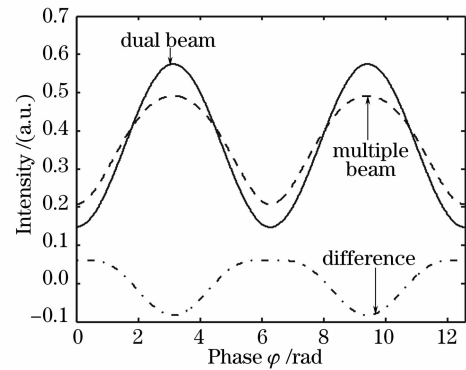


图 2 平面波干涉光强随相位变化曲线

Fig. 2 Interferential intensity as a function of phase φ for a plane wave

3.2 正入射时的高斯光束干涉

在自由空间沿 z 轴传输的高斯光束的电矢量值可表示为^[11]

$$E(x, y, z) = \frac{\omega_0}{\omega(z)} a_0 \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} - \frac{ik}{2R(z)} (x^2 + y^2) - i[kz - \arctan(z/f)] \right\}, \quad (3)$$

式中 a_0 为高斯光束束腰中心的振幅, ω_0 为高斯光束的腰斑半径, $\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + (z/f)^2}$, $R(z) = z + f^2/z$, $f = \pi\omega_0^2/\lambda$, k 为波数, $k = 2\pi/\lambda$ 。

根据实际测量的需要,考虑正入射时高斯光束的干涉,只要提取光束中心的光强即可。简化(3)式得到经标准板内表面第一次反射后的光束中心的电矢量值表示为

$$E_1(0, 0, z_1) = \sqrt{\rho} \frac{\omega_0}{\omega(z_1)} a_0 \exp \{ -i[kz_1 - \arctan(z_1/f)] \}, \quad (4)$$

第 m 次 ($m > 1$) 经标准板和单晶硅面反射后的光束中心的电矢量值表示为

$$E_m(0, 0, z_m) = (\rho\rho')^{(m-2)/2} \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} \frac{\omega_0}{\omega(z_m)} a_0 \exp \{ -i[kz_m - \arctan(z_m/f) + \pi] \}. \quad (5)$$

发生多光束干涉时,光束中心的光强为各次光束所产生的光强之和,即

$$I_t = \left[\sum_{m=1}^{\infty} E_m(0,0,z_m) \right] \left[\sum_{m=1}^{\infty} E_m^*(0,0,z_m) \right]. \quad (6)$$

4 数值模拟与分析

4.1 不同条件下的高斯光束中心干涉光强

由于 $\arctan(z/f)$ 项的存在, 会使得干涉后的高斯光束中心的相位不随光束传播距离线性变化, 从而导致与平面波干涉产生差别。根据前述的公式得出

$$\arctan\left(\frac{z}{f}\right) = \arctan\left(\frac{z\lambda}{\pi\omega_0^2}\right), \quad (7)$$

可见, $\arctan(z/f)$ 与 z/ω_0^2 值密切相关的。本文取 $a_0 = 632.8 \text{ nm}$, $\rho = 0.035$, $\rho' = 0.35$, $a_0 = 1$, 下面分不同情况进行比较分析。

当 z/ω_0^2 很大 (不小于 10^7 mm^{-1} 数量级) 时,

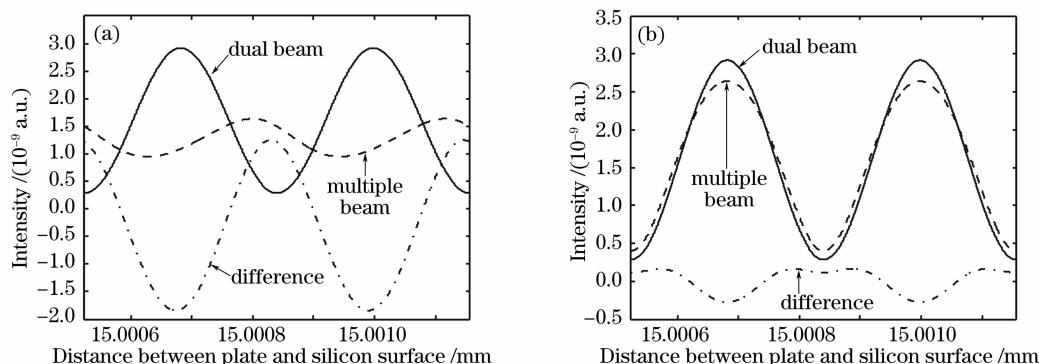


图 3 $\omega_0 = 0.001 \text{ mm}$, $z = 50 \text{ mm}$ (z/ω_0^2 很大) 时干涉光强曲线。(a) 有 $\arctan(z/f)$ 影响, (b) 无 $\arctan(z/f)$ 影响

Fig. 3 Interferential intensity with $\omega_0 = 0.001 \text{ mm}$ and $z = 50 \text{ mm}$ (z/ω_0^2 is very large). (a) With the effect of $\arctan(z/f)$ term, (b) without the effect of $\arctan(z/f)$ term

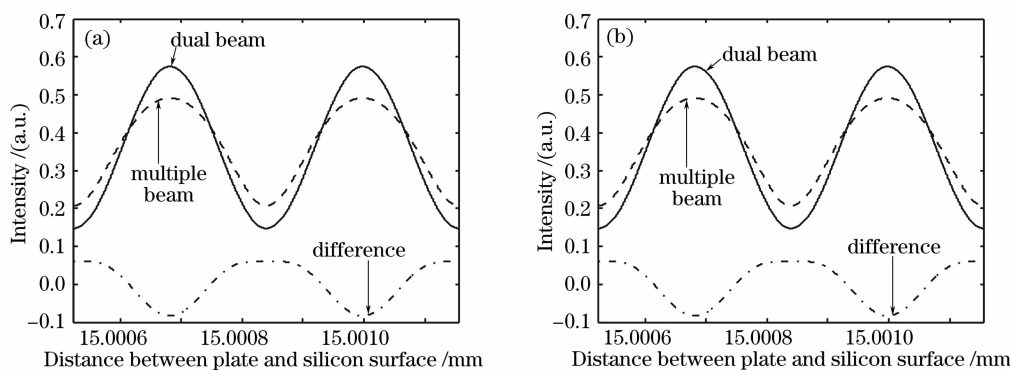


图 4 $\omega_0 = 10 \text{ mm}$, $z = 50 \text{ mm}$ (z/ω_0^2 很小) 时干涉光强曲线。(a) 有 $\arctan(z/f)$ 影响, (b) 无 $\arctan(z/f)$ 影响

Fig. 4 Interferential intensity with $\omega_0 = 10 \text{ mm}$, $z = 50 \text{ mm}$ (z/ω_0^2 is very small). (a) With the effect of $\arctan(z/f)$ term, (b) without the effect of $\arctan(z/f)$ term

当 z/ω_0^2 介于上述二者中间时, $\arctan(z/f)$ 的值随 z 的变化而产生非线性变化, 如图 5(a) 所示。这时, 高斯光束的影响十分显著。

因此, 为了使高斯光束干涉简化为平面波干涉,

$\arctan(z/f)$ 的值极为接近 $\pi/2$ (与 90° 之差小于 0.035°), 使得相邻两反射光因 $\arctan(z/f)$ 项引起的相移基本为 0, 同时也导致多光束干涉的相位相对于双光束干涉产生了一固定大小的相移, 如图 3(a) 所示。图 3(b) 为没有 $\arctan(z/f)$ 影响时的干涉光强曲线。

值得注意的是, 当 ω_0 较小且激光束传播距离相对较长时, 光束的发散角较大, 光场的能量分布较广, 导致光束中心的光强较小。显然, 这对于测量是不利的。

当 z/ω_0^2 很小 (不大于 1 mm^{-1}) 时, $\arctan(z/f)$ 的值极为接近 0 (小于 0.015°), 且随 z 作线性变化。比较图 2 和图 4(a)、图 4(b) 可以看出, $\arctan(z/f)$ 项的影响完全可以忽略, 高斯光束干涉可近似看作平面波干涉。

应使 z/ω_0^2 较小 (满足不大于 1 mm^{-1} 的条件)。因此在可能的情况下, 尽量将激光束的束腰扩大, 但这导致中心处光强的减弱。而在扩束倍数一定的前提下, 则要尽量缩短光路的长度。

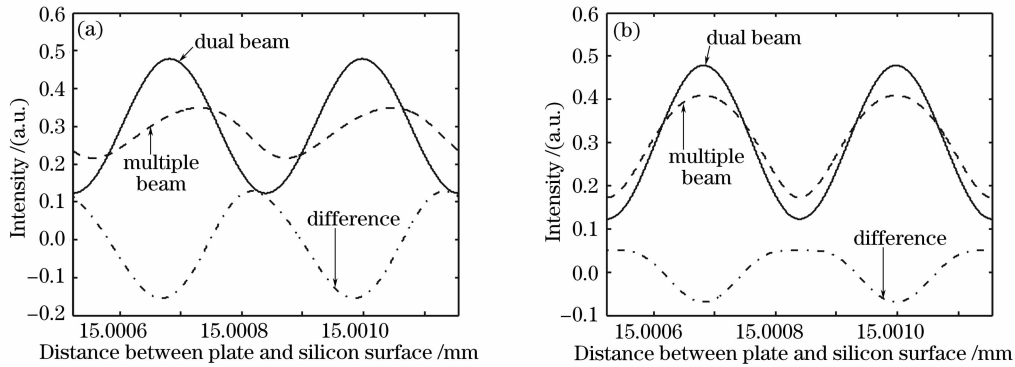


图 5 $\omega_0=3\text{ mm}, z=2\times 10^4\text{ mm}$ 时的干涉光强曲线。(a)有 $\arctan(z/f)$ 影响,(b)无 $\arctan(z/f)$ 影响
 Fig. 5 Interferential intensity with $\omega_0=3\text{ mm}, z=2\times 10^4\text{ mm}$. (a) With the effect of $\arctan(z/f)$ term, (b) without the effect of $\arctan(z/f)$ term

4.2 高斯光束对余弦依赖五步相移算法的误差分析

五步相移干涉算法对背景光强的不均匀性不敏感,并能抑制移相误差的影响^[12]。在平面波照射下且标准板反射率较低的情况下,对于硅球直径测量,多光束干涉(多次反射)的影响可忽略,可以采用基于余弦依赖的五步相移算法进行计算^[13,14]。但当入射光为高斯光束时,五步相移算法对光束中心的多光束干涉会引入较大的相位误差,从而给硅球直

径测量带来较大影响。

设五步相移获得的高斯光束中心干涉信号光强依次为 I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 , 对应的相位分别为 $\varphi - 2\beta, \varphi - \beta, \varphi, \varphi + \beta, \varphi + 2\beta$, 其中 $\beta = \pi/2$ 为相移步长。将其分别代入(2)式,解方程组可得

$$\tan \varphi = \frac{2(I_2 - I_4)}{2I_3 - I_5 - I_1} \tag{8}$$

将(8)式分别对光强求偏导,得

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial\varphi}{\partial I_i} \Delta I_i = \frac{2\cos^2\varphi}{2I_3 - I_5 - I_1} \left[\frac{I_2 - I_4}{2I_3 - I_5 - I_1} (\Delta I_1 - 2\Delta I_3 + \Delta I_5) + \Delta I_2 - \Delta I_4 \right] \tag{9}$$

式中 ΔI_i 由 $I_i - I'$ 给出。考虑到 $\beta = \pi/2$, 进一步化简(9)式,得

$$\Delta\varphi = \frac{\sin\varphi}{4} (\Delta I_1 - 2\Delta I_3 + \Delta I_5) + \frac{\cos\varphi}{2} (\Delta I_2 - \Delta I_4) \tag{10}$$

图 6 是最大相位误差随腰斑半径 ω_0 (0.1~10 mm) 和 z 值(100~5000 mm)变化的曲线图。可见,当 ω_0 和 z 取值不当时带来的最大相位误差可达 0.8%, 即对于直径测量误差接近 2.6 nm, 这与前面的分析一致,须避免。图 7 是当 $z=2000\text{ mm}$ 时的

截面图。取 $\omega_0=5\text{ mm}, z=2000\text{ mm}$, 可得五步算法对高斯光束的多光束干涉引入的相位误差关系,如图 8 所示,可见由高斯光束引入的最大相位误差约为 0.08%, 从而相当于给直径测量带来的误差最大不超过 0.26 nm。

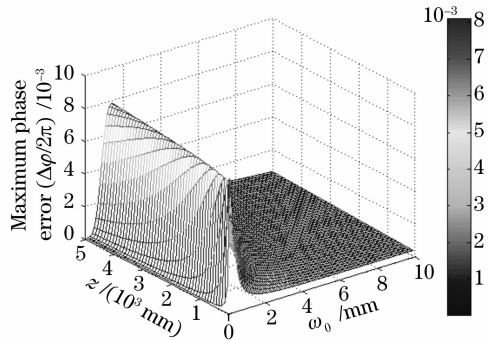


图 6 最大相位误差随束腰 ω_0 和 z 值变化曲线图
 Fig. 6 The maximum phase error versus beam waist ω_0 and z

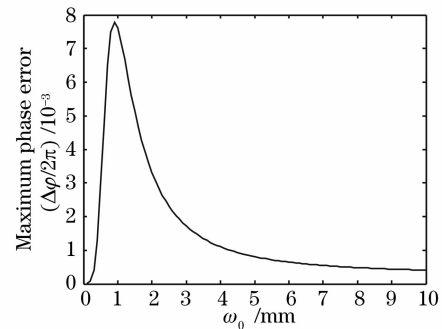


图 7 $z=2000\text{ mm}$ 时最大相位误差随束腰变化曲线图
 Fig. 7 Relationship between the maximum phase error and beam waist ω_0 ($z=2000\text{ mm}$)

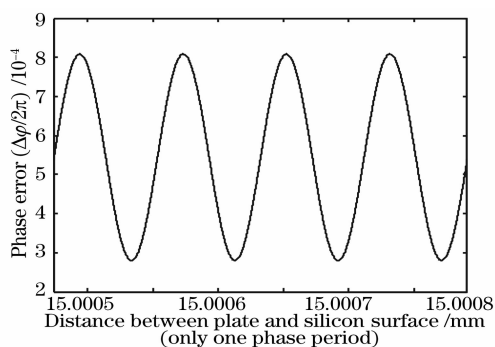


图 8 五步算法中高斯光束引入的相位误差

Fig. 8 Phase error in five-step algorithm caused by Gaussian beam

5 结 论

根据高精度单晶硅球直径测量精度分析的需要,对不同情况下高斯光束正入射标准板时的中心光强进行了分析。结果表明,仅在满足一定的条件下,高斯光束的干涉可以简化为平面波干涉,其对相位及直径测量影响可忽略不计。对采用五步相移算法时高斯多光束干涉的影响进行了研究。当 $\omega_0 = 5 \text{ mm}$, $z = 2000 \text{ mm}$ 时,由高斯光束引入的最大相位误差约为 0.08% ,对直径测量带来的误差最大不超过 0.26 nm ,这对测量系统最终的精度分析、误差修正及系统结构的进一步优化有一定的借鉴意义。

参 考 文 献

- 1 Naoki Kuramoto, Kenichi Fujii, Yasushi Azuma *et al.*. Density determination of silicon spheres using an interferometer with optical frequency tuning[J]. *IEEE Trans. Instrum. Measure.*, 2007, **56**(2): 476~480
- 2 Luo Zhiyong. The progress and development trend of mass natural standard[J]. *Acta Metrologica Sinica*, 2004, **25**(2): 138~141
罗志勇. 质量自然基准的研究进展及发展方向[J]. *计量学报*, 2004, **25**(2): 138~141
- 3 Luo Zhiyong, Yang Lifeng, Chen Yunchang. Error evaluation of cosine dependent algorithm in precision interference measurement [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(12): 1629~1633

- 罗志勇, 杨丽峰, 陈允昌. 精密干涉测量中余弦依赖算法的误差研究[J]. *光学学报*, 2005, **25**(12): 1629~1633
- 4 Lü Xiaoxu, Zhong Liyun, Zhang Yimo. A method of phase-shifting measurement by the difference of phase-shifting interferograms[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(4): 603~608
吕晓旭, 钟丽云, 张以谟. 通过相移条纹图差分测定相移量的方法[J]. *光学学报*, 2007, **27**(4): 603~608
- 5 Zuo Fen, Chen Lei, Xu Chen. Measurement performance of simultaneous phase-shifting interferometer[J]. *Chin. J. Lasers*, 2007, **34**(12): 1682~1687
左 芬, 陈 磊, 徐 晨. 同步移相干涉的测量性能[J]. *中国激光*, 2007, **34**(12): 1682~1687
- 6 Liu Mulin, Wu Zhengmao, Xia Guangqiong. Transmitting characteristics of a Gaussian beam striking obliquely on a nonparallel Fabry-Pérot interferometer[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(1): 109~114
刘木林, 吴正茂, 夏光琼. 高斯光束斜入射非平行法布里-珀罗干涉仪后的透射光强分布[J]. *光学学报*, 2005, **25**(1): 109~114
- 7 Peng Jun, Shi Yongchao. Influence of Gauss characteristics of laser on angle interferometry of large range [J]. *J. Beijing Institute of Machinery*, 1999, **14**(2): 42~46
彭 君, 施涌潮. 激光高斯光束对大角度干涉测量的影响[J]. *北京机械工业学院学报*, 1999, **14**(2): 42~46
- 8 H. Abu-Safia, R. Al-Tahtamouni, I. Abu-Aljarayesh *et al.*. Transmission of a Gaussian beam through a Fabry-Perot interferometer[J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(18): 3805~3811
- 9 K. Fujii, M. Tanaka, Y. New *et al.*. Interferometric measurements of the diameters of a single-crystal silicon sphere [J]. *Rev. Sci. Instrum.*, 1992, **63**(11): 5320~5325
- 10 Naoki Kuramoto, Kenichi Fujii. Interferometric determination of the diameter of a silicon sphere using a direct optical frequency tuning system [J]. *IEEE Trans. Instrum. Measure.*, 2003, **52**(2): 631~635
- 11 Sun Changku, Ye Shenghua. *Laser Measuring Technology* [M]. Tianjin: Tianjin University Press, 2001. 12~15
孙长库, 叶声华. *激光测量技术* [M]. 天津: 天津大学出版社, 2001. 12~15
- 12 P. Hariharan, B. F. Oreb, T. Eiju. Digital phase-shifting interferometry: a simple error-compensating phase calculation algorithm[J]. *Appl. Opt.*, 1987, **26**(13): 2504~2506
- 13 Luo Zhiyong, Chen Zhaohui, Gu Yingzi *et al.*. Five-bucket phase-shifting algorithm based on numerical simulation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(11): 1687~1690
罗志勇, 陈朝晖, 顾英姿 等. 基于数值模拟的高准确度五步相移算法研究[J]. *光学学报*, 2006, **26**(11): 1687~1690
- 14 Luo Zhiyong, Yang Lifeng, Chen Yunchang. Phase-shift algorithm research based on multiple-beam interference principle [J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(7): 3051~3057
罗志勇, 杨丽峰, 陈允昌. 基于多光束干涉原理的相移算法研究 [J]. *物理学报*, 2005, **54**(7): 3051~3057