

对数饱和非线性介质中的自洽多模高斯孤子解

刘雅洁¹ 冯启元²

(¹ 嘉兴学院物理教研室, 浙江 嘉兴 314001; ² 内蒙古大学物理系, 内蒙古 呼和浩特 010021)

摘要 通过解对数饱和非线性介质中光场满足的非线性薛定谔方程, 得到一组厄米-高斯型的自洽多模解。在借鉴了 R. G. Glauber 的相干态理论的基础上, 合理假设这组解在非线形介质中呈泊松分布, 进而得到了在对数饱和非线性介质中存在高斯孤子的结论, 并获得高斯孤子解、非线性系数与泊松参量三者之间的关系。该关系说明, 若在介质中存在高斯孤子解, 其非线性系数必须满足条件 $\alpha \geq 1$ 。当 $\alpha = 1$, 在介质中仅存在单模高斯孤子, 其光斑尺寸必须满足的条件 $w = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}}$ 。在该条件下, 以“束腰”注入介质中的高斯光束才可以在保持其光斑尺寸不变的情况下传输, 否则光斑尺寸会存在一定的振荡。而振荡方式、振荡范围(表示光斑尺寸展宽或压缩及大小)与输入光束光斑尺寸及其一次导数有直接关系。

关键词 高斯光束; 对数饱和非线性; 相干态理论; 振荡特性

中图分类号 O437 文献标识码 A doi: 10.3788/AOS20082810.1989

Self-Consistent Multimode Gaussian Soliton Solution in Logarithmically Saturable Nonlinear Medium

Liu Yajie¹ Feng Qiyuan²

(¹ Physics Teaching & Research Department, Jiaxing University, Zhejiang 314001, China)
(² Department of Physics Inner Mongolia University, Hohhot, Inner Mongolia 010021, China)

Abstract Through solving the nonlinear Schrödinger equation that optical field in logarithmically saturable media satisfies, a set of solutions were founded, which were self-consistent multimode Hermite-Gaussian functions. Because these self-consistent solutions are much like the solutions of one-dimensional harmonic oscillator, it is assumed reasonably that the mode occupation obeys Poisson distribution, just like quantum mechanical Glauber's coherent states. The assumed Poisson distribution self-consistently leads to the conclusion that there is Gaussian soliton in logarithmically saturable nonlinear media, and the relationships among the Gaussian soliton, the nonlinear coefficient and the Poisson parameter are obtained. If the soliton solution exists, the nonlinear coefficient must satisfy a condition of $\alpha \geq 1$. When $\alpha = 1$, there is single mode Gaussian soliton only, and the beam size must be restricted as a fixed value $w = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}}$. Under the condition, the Gaussian beam injected in medium at waist can transmits in the nonlinear medium keeping its beam size constant, otherwise the beam size will oscillate. The oscillating form and amplitude rely directly on the input beam size and its first-order derivative which indicates the beam waist would be expanded or compressed.

Key words Gaussian beam; logarithmically saturable nonlinearity; coherent states theory; oscillating feature

1 引言

光学孤子由于其独特的物理特性和广阔的应用前景, 在光学领域引起了极大的关注^[1~4]。光学孤子的产生机理是光与物质之间的相互作用, 当介质的非线性效应与光束的衍射效应相互平衡时, 光束发生自

陷, 使得光束能够在空间传输很长一段距离, 其横向尺寸不发生变化。由于构成介质的材料不同, 它在光场的作用下的非线性响应也不相同^[2,5~12]。许多介质在光场的作用下, 显示出对数型饱和和非线性特征, 比如, 掺杂铌酸锶钽(SBN)晶体。这种非线性特征使

收稿日期: 2008-01-17; 收到修改稿日期: 2008-02-25

作者简介: 刘雅洁(1962—), 女, 硕士, 副教授, 主要从事光线传输的非线性理论等方面的研究。

E-mail: lyj0919@mail.zjxu.edu.cn

得光束的传输具有独特的性质^[9~14]。

关于对数型饱和非线性介质中空间孤子的研究虽有一些^[11~14],但对孤子的基本形式较少讨论。文献[12,14]在假设高斯光束入射到对数型饱和非线性介质中保持其分布不变的情况下,用不同的方法讨论了高斯光束的光斑尺寸的演化。文献[11]说明对数型饱和非线性介质中支持亮孤子的存在,但缺乏严格的理论论证。文献[13]通过理论分析,说明在对数型非线性介质中支持空间亮孤子,但没有给出具体形式。

本文从对数饱和非线性介质中光场满足的非线性薛定谔(Schrödinger)方程出发,得到了对数饱和非线性 Schrödinger 方程的内洽解,其形式与一维势阱 $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 中的线性谐振子的解一致,呈厄米-高斯型分布。说明厄米-高斯型分布的光束在对数饱和非线性介质中传输保持其分布不变,即存在所谓的自俘获现象。又考虑到光场的量子化是以线性谐振子为基础的,借鉴了 R. G. Glauber 的相干态理论,将得到的非线性 Schrödinger 方程的内洽多模解在非线性介质中的分布合理取做泊松分布,得到了关于该分布的高斯孤子解。同时还发现,在对数饱和非线性介质中存在高斯孤子解时,其非线性系数必须满足的条件和单模高斯孤子传输时对光斑尺寸的约束。接下来,我们还讨论了高斯光束在对数饱和非线性介质中的传输特性,发现只有在满足上面要求的光斑尺寸,高斯光束才可以保持其光斑尺寸不变,否则光斑尺寸存在一定的振荡。

2 基本方程

2.1 对数饱和非线性介质中光束的演化方程

在非线性介质中传输的准单色光束,其电场分量 E 应满足亥姆霍兹(Helmholtz)方程

$$\nabla^2 E + (k_0 n)^2 E = 0, \quad (1)$$

式中 $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, λ_0 是自由空间中的光波长。依赖于光强的折射率写成 $n^2(I) = n_0^2 + \delta n(I)$, n_0 是线性折射率, $\delta n(I)$ 表示光束在非线性介质中传输时引起的折射率的变化。在对数形饱和非线性介质中, $\delta n(I) = n_2 \ln(1 + I/I_{th})$ ^[10,11], n_2 是反映介质非线性特性的无量纲系数, I 是光强, I_{th} 是阈值光强。为了消除对数的奇异特性,假设 $I/I_{th} \gg 1$, 则此时 $n^2(I) = n_0^2 + n_2 \ln(I/I_{th})$ 。

一般性地将光场写作

$$E(x, y, z) = A(x, y, z) \exp(ikz),$$

其中 $k = k_0 n_0$ 。在近轴近似($\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k_0 \frac{\partial A}{\partial z}$)下,可得到关于 $A(x, y, z)$ 的方程

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2k} \nabla_{\perp}^2 A + \frac{kn_2}{2n_0} \ln\left(\frac{I}{I_{th}}\right) A = 0, \quad (2)$$

若(2)式存在孤子解,则光束在传输过程中光斑尺寸保持不变。为了方便起见,引入无量纲量 $\zeta = \frac{z}{k\omega^2}$, $s = \frac{x}{\omega}$, $\eta = \frac{y}{\omega}$, $\alpha^2 = n_2(k\omega)^2/n_0$, $I_N = I/I_{th}$,

(2)式可以写成如下的归一化形式:

$$i \frac{\partial A}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\alpha^2}{2} \ln(I_N) A = 0, \quad (3)$$

ω 是光斑尺寸, A 对 $\sqrt{I_{th}}$ 归一。这就是通常所说的对数饱和介质中的非线性 Schrödinger 方程(NLSE)。

2.2 对数饱和介质中的非线性 Schrödinger 方程的内洽解

为了说明求解过程,考虑一维的情况。若 $A_m(s)$

是(3)式的一个自洽模解,则 $A(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m A_m(s)$,

$I_N = \langle |A(s)|^2 \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \langle |a_m|^2 \rangle |A_m(s)|^2$, 其中 a_m

是 m 阶模的分布函数, $\langle \cdot \rangle$ 运算表示对时间平均。在计算时间平均时,对于不同模间,使用了 $\langle a_i \cdot a_j \rangle = 0$ ($i \neq j$) (时间不相干)。为了计算 $\ln(I_N)$, 可以先假设 $I_N = e \exp(-s^2)$, e 是依赖于分布函数 a_m 的待定中心强度。代入(3)式,得

$$i \frac{\partial A_m}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_m}{\partial s^2} + \frac{\alpha^2}{2} (\ln e - s^2) A_m = 0, \quad (4)$$

(4)式除了 $(\alpha^2/2) \ln e$ 项外,与梯度折射率介质中^[15]光场慢变包络满足的方程极其相似。而 $(\alpha^2/2) \ln e$ 的存在仅影响(4)式的本征值,并不影响本征态,亦即不影响光场的分布。所以,(4)式的解应该具有 $A_m(s) = u_m(s) \exp(i\beta_m \zeta)$ 的形式, β_m 是传输常数。代入(4)式,得

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_m}{\partial s^2} + (\alpha^2 \ln e - \alpha^2 s^2 - 2\beta_m) u_m = 0, \quad (5)$$

令 $\xi = \sqrt{\alpha} s$, $\alpha \lambda_m = \alpha^2 \ln e - 2\beta_m$ 代入(5)式,得

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial \xi^2} + (\lambda_m - \xi^2) u_m = 0, \quad (6)$$

这是一个本征值为 $\lambda_m = 2m + 1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) 的本征方程,其解 $u_m = H_m(\xi) \exp(-\xi^2/2)$ 。因此,

$$A_m(s) = H_m(\sqrt{\alpha} s) \exp(-\alpha s^2/2) \exp(i\beta_m \zeta), \quad (7)$$

$H_m(\sqrt{\alpha} s) \exp(-\alpha s^2/2)$ 在区间 $(-\infty, \infty)$ 上是正交的^[16], (7)式就是要找的 $A_m(s)$ 。可以这样理解这一结果,具有(7)式的模式分布或它们的线性组合的

光束在对数饱和和非线性介质中传输时,可保持其分布不变,即所谓的自俘获现象。

2.3 分布函数 a_m 与参量选取

根据前面的假设和(7)式,

$$I_N = \sum_{m=0}^{\infty} \langle |a_m|^2 \rangle H_m^2(\sqrt{\alpha s}) \exp(-\alpha s^2), \quad (8)$$

若上式仅存在某一个 m , $\langle |a_m|^2 \rangle = 1$, 其余为零,则表示单模情况。对于多模情况,由于 e 值依赖 $\langle |a_m|^2 \rangle$ 的分布,也即 I_N 依赖 $\langle |a_m|^2 \rangle$ 的分布。可以看出,(6)式的解 $u_m = H_m(\xi) \exp(-\xi^2/2)$ 与量子力学的一维势阱 $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ 中的线性谐振子的解是相同的。

一维势阱 $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ 中的线性谐振子,其哈密顿算符为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+ \hat{a}) = \hbar\omega(\hat{n} + 1/2), \quad (9)$$

式中 p 、 m 是振子的经典动量和质量, \hat{a}^+ 、 \hat{a} 是量子化后对应光场的产生、湮灭算符, $\hat{n} = \hat{a}^+ \hat{a}$ 是光子数, n 是对应于 \hat{n} 的本征值,有 $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)。按照 R. G. Glauber 的相干态理论,定义算符 \hat{a}

的本征态 $|v\rangle$ 为相干态,可展开成 $|v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$ 。相干态可由下式重构

$$\hat{a}|v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = v \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad (10)$$

通过比较系数,得到递推关系 $c_n = \frac{v}{\sqrt{n}} c_{n-1}$, 导出 $c_n =$

$\frac{v^n}{\sqrt{n!}} c_0$ 。系数 c_0 对应能量态 $|n=0\rangle$ 的展开系数,由归一化确定

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|v|^{2n}}{n!} |c_0|^2 = \exp(|v|^2) |c_0|^2, \quad (11)$$

结合(11)式,得到

$$|c_n|^2 = \frac{|v|^{2n}}{n!} \exp(-|v|^2), \quad (12)$$

这是泊松分布。

由(4)式,对数饱和和非线性介质中的自洽多模解可以对应地看作在势阱 $V = \frac{\alpha^2}{2}(\ln e - s^2)$ 中的粒子^[17],若将其分布函数 $\langle |a_m|^2 \rangle$ 取做 $\langle |a_m|^2 \rangle = a \exp(-p^2) \frac{p^{2m}}{m!}$, 其中, p 是泊松参量, a 是待定系

数。借助 Mehler 公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{n!} \left(\frac{1}{2}t\right)^n = (1-t^2)^{-1/2} \exp\left[\frac{2xyt - (x^2 + y^2)t^2}{1-t^2}\right],$$

得

$$I_N = e \exp(-s^2) = \frac{a}{\sqrt{1-4p^4}} \exp(-p^2) \exp\left(-\alpha s^2 \frac{1-2p^2}{1+2p^2}\right), \quad (13)$$

显见,对数饱和和非线性介质中的自洽多模解在泊松分布下,可存在时间不相干空间孤子 $I_N = e \exp(-s^2)$, 仅需满足条件

$$\begin{cases} a = e \sqrt{1-4p^4} \exp(p^2), \\ p^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}, \end{cases} \quad (14)$$

由上式,非线性系数 α 对高斯孤子有限定,必须在满足 $\alpha \geq 1$, 否则高斯孤子不存在。当 $\alpha = 1$ 时, $p = 0$, 进而 $a = e$, $I_N = e \exp(-s^2)$, 此时仅存在单模基态孤子,光斑尺寸即为 w , 由于 $\alpha^2 = n_2(kw)^2/n_0$, 此时高斯单模孤子的光斑尺寸得到约束, $w = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}}$ 。

3 对数饱和和非线性对输入高斯光束的影响

以上是在无边界条件的情况下解方程(3)的结果。在求解过程中,对各物理量进行了归一化处理。

假设注入对数饱和和非线性介质中的光束是基模高斯分布的:

$$A(x, z) = a(z) \exp\left[i\eta(z) - i\frac{kx^2}{q(z)}\right], \quad (15)$$

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{1}{k\omega^2(z)},$$

$q(z)$ 是反映高斯分布的 q 参数, $R(z)$ 是光束波面的曲率半径, $\omega(z)$ 是高斯光束的光斑尺寸。根据上面的分析,可以认为在光束传输过程中保持高斯型分布不变。

当将(15)式代入到方程(2),并考虑一维情况,得到

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} - \frac{1}{k^2\omega^3} + \frac{n_2}{n_0\omega} = 0, \quad (16)$$

推导中已经使用 $I = |A|^2 = a^2(z) \exp\left[-\frac{x^2}{\omega^2(z)}\right]$, 且使 I 对 I_{th} 归一。

(16)式说明,注入对数饱和和非线性介质中的高

斯光束,在保持其分布不变的情况下,光斑尺寸是随着位置变化的。将(16)式积分,得

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \frac{2n_2}{n_0} \ln(\sqrt{2}w) + \frac{1}{k^2 w^2} = C_s, \tag{17}$$

$$C_s = \left(\frac{dw}{dz}\right)_s^2 + \frac{2n_2}{n_0} \ln(\sqrt{2}w_s) + \frac{1}{k^2 w_s^2},$$

C_s 是与注入光束的初始条件有关系的常数, w_s 和

$\left(\frac{dw}{dz}\right)_s$ 分别表示介质表面处光束的光斑尺寸及其

对 z 的一次导数。显然,在 $z \geq 0$ 区域,若保持 $\frac{dw}{dz} \equiv$

0,光斑尺寸在整个传输过程中保持不变。按照光在

介质与自由空间边界处连续的条件,光束必须是在

“束腰”注入介质。图1、图2是在 $n_0 = 2, n_2 = 10^{-4}$ 、

$\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ 的条件下,对(17)式进行数值计算模拟

的结果。结果表明, $w(z)$ 会存在一个振荡演化过

程,其中 $w = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \approx 5.627 \text{ }\mu\text{m}$ 是一个临界值。

图1中,第1~3条线表示输入光束的光斑尺寸为

$w(z)_s = 5.627 \text{ }\mu\text{m}$ 时,介质内部($z > 0$)传输情况。

在 $\left[\frac{dw(z)}{dz}\right]_s = 0$ 时,光束在传输过程中光斑尺寸保

持不变(第1条线);当 $\left[\frac{dw(z)}{dz}\right]_s > 0$ 时,光束先展

宽(第2条线);当 $\left(\frac{dw(z)}{dz}\right)_s < 0$ 时,光束先压缩(第

3条线)。在满足 $\left[\frac{dw(z)}{dz}\right]_s = 0$ 的情况下,高于临界

值 $w(z)_s = 5.627 \text{ }\mu\text{m}$ 的输入,光束先展宽(第4条

线),低于临界值的输入,光束先压缩(第5条线)。

图2说明在满足 $\left[\frac{dw(z)}{dz}\right]_s = 0$ 的情况下,高于临界

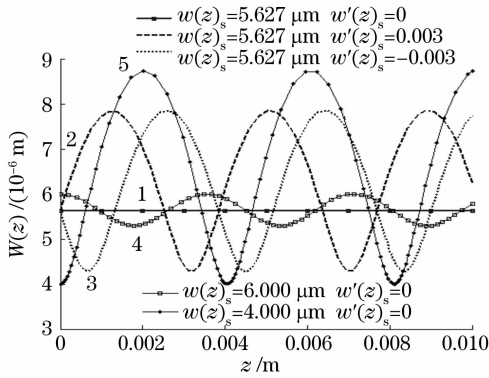


图1 当 $n_0 = 2, n_2 = 10^{-4}, \lambda_0 = 500 \text{ nm}$,不同起始条件的 $w(z)$ 的振荡演化过程

Fig. 1 Evolution of the beam waist $w(z)$ for different input conditions with $n_0 = 2, n_2 = 10^{-4}, \lambda_0 = 500 \text{ nm}$

值的不同输入,其振荡周期、振荡深度也不相同。

$w = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \approx 5.627 \text{ }\mu\text{m}$ 与上节中得到的高斯孤子传输的条件相同。

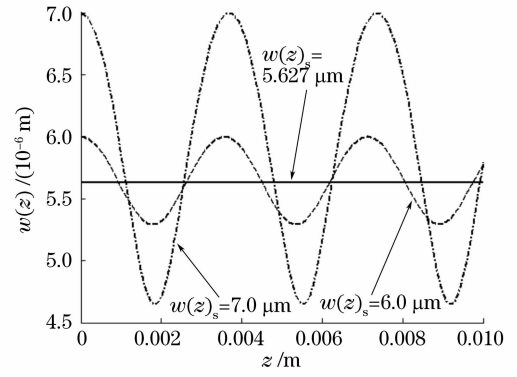


图2 当 $n_0 = 2, n_2 = 10^{-4}, \lambda_0 = 500 \text{ nm}$ 时,不同光斑尺寸的光束在“束腰”处输入,振荡周期、振荡深度变化

Fig. 2 Different oscillating period and amplitude when input beams have different waists, but the same first-order derivative are zero with $n_0 = 2, n_2 = 10^{-4}, \lambda_0 = 500 \text{ nm}$

4 结 论

本文对对数饱和介质中的非线性 Schrödinger 方程的内洽解进行了较为详尽的讨论。得到在对数型饱和非线性介质中存在同于量子力学中谐振子解的内洽多模解,并给出在该介质中至少存在高斯型基态单模孤子解时,非线性系数 α 必须满足的条件和光束的光斑尺寸对应的量值。在进一步的讨论中,考虑有高斯光束入射到对数饱和非线性介质中时,利用高斯光束在介质中保持其分布不变的特性,发现光束的光斑尺寸实际上存在振荡,振荡范围、振荡形式完全由入射光束的光斑尺寸及其一次导数决定。若使入射的光束在传输过程中保持光斑尺寸不变,光束必须在其“束腰”处 $\left\{ \left[\frac{dw(z)}{dz}\right]_s = 0 \right\}$ 入射,

并使界面处光斑尺寸的大小满足 $w = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}}$ 的条件。这些结论对控制光束的传输有一定的参考意义。

参 考 文 献

- 1 R. Y. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes. Self-trapping of optical beams[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1964, **13**(12): 479~482
- 2 Liu Yajie, Feng Qiyuan. Singularity feature of Gaussian beam propagating in absorptive Kerr medium [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(12): 1861~1865

刘雅洁,冯启元. 高斯光束在克尔型非线性介质中演化的奇异特

- 性[J]. 光学学报, 2006, **26**(12): 1861~1865
- 3 Zhang Tao, Hu Wei, Long Xuewen *et al.*. Experimental observation of strong nonlocal optical spatial solitons in nematic liquid crystals[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(1): 143~147
张涛, 胡巍, 龙学文等. 向列相液晶中强非局域空间光孤子的实验观察[J]. 光学学报, 2007, **27**(1): 143~147
 - 4 George I. Stegeman, Mordehai Segev. Optical spatial solitons and their interactions: universality and diversity[J]. *Science*, 1999, **286**(5444): 1518~1523
 - 5 Ole Bang, Yuri S. Kivshar, Alexander V. Baryak. Bright spatial solitons in defocusing Kerr media supported by cascaded nonlinearities[J]. *Opt. Lett.*, 1997, **22**(22): 1680~1682
 - 6 Charalamber Anastassiou, Claude Pigier, Mordechai Segev *et al.*. Self-trapping of bright rings[J]. *Opt. Lett.*, 2001, **26**(12): 911~913
 - 7 Demetrios N. Christodoulides, Tamer H. Coskun, Matthew Mitchell *et al.*. Theory of incoherent self-focusing in biased photorefractive media[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **78**(27): 646~649
 - 8 A. V. Buryak, Y. S. Kivshar, Ming-feng Shih *et al.*. Induced coherence and stable soliton spiraling[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **82**(4): 81~84
 - 9 H. Buljan, A. Šiber, M. Soljačić *et al.*. Incoherent white light solitons in logarithmically saturable, noninstantaneous nonlinear media[J]. *Phys. Rev. E*, 2003, **68**: 036607-1~036607-6
 - 10 Wieslaw Krolikowski, Darran Edmundson, Ole Bang. Unified model for partially coherent solitons in logarithmically nonlinear media[J]. *Phys. Rev E*, 2000, **61**(3): 3122~3126
 - 11 Allan W. Snyder, John D. Mitchell. Mighty morphing spatial solitons and bullets[J]. *Opt. Lett.*, 1997, **22**(1): 16~18
 - 12 Li Dayi, Tang Yonglin, Chen Jianguo *et al.*. Impacts of logarithmically saturable nonlinear media on Gaussian beams[J]. *Chin. J. Lasers*, 2000, **27**(4): 343~347
李大义, 唐永林, 陈建国等. 对数可饱和非线性介质对高斯光束的影响[J]. 中国激光, 2000, **27**(4): 343~347
 - 13 Wei Qing, Wang Qi. One-dimensional bright solitons in logarithmically nonlinear electric media[J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(10): 1172~1175
卫青, 王奇. 对数型非线性电介质中的一维空间亮孤子[J]. 光学学报, 2003, **23**(10): 1172~1175
 - 14 Liu Yajie, Yang Xingyu. Propagation feature affected by self-induced graded-refraction-index of Gaussian beam going through logarithmically saturable nonlinear media [J]. *Acta Sinica Quantum Optica*, 2007, **13**(4): 294~299
刘雅洁, 杨性愉. 高斯光束在对数型非线性介质中的自诱导效应[J]. 量子光学学报, 2007, **13**(4): 294~299
 - 15 H. A. Haus. *Wave and Fields in Optoelectronics* [M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1984
 - 16 F. W. Byron, R. W. Fuller. *Mathematics of Classical and Quantum Physics* (Vol. 1) [M]. New York: Addison-Wesley, 1969
 - 17 Yuanrang Shen. *The Principles of Nonlinear Optics* [M] New York: John Wiley & Sons, 1984