

照相物镜径向畸变模型的再商讨

艾莉莉 袁 峰 丁振良

(哈尔滨工业大学自动化测试与控制系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要 基于径向半径偶次幂级数的相对畸变表达式在相机校准中被广泛地采用。对于一个具体镜头, 它的物理精确性却没有可靠的理论做依据。基于自变量(径向半径和视场角)不同项数和幂次的组合多项式作为相对畸变的拟合函数, 以 Zemax 软件平台上的一组已知镜头的栅格畸变结果为已知数据, 借助于 Matlab 的最优化工具箱进行数据拟合。结果表明, 包含径向半径 2、3 次幂的表达式在精度上更有益; 基于视场角幂次的展开式可以提供更为精确的畸变描述; 多项和高阶的拟合函数反而不利于提供一个精准的畸变表达。

关键词 相机校准; 径向畸变; 数据拟合; 栅格畸变

中图分类号 TP391 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20082810.1930

Further Study on Radial Distortion Model for Photographic Objective

Ai Lili Yuan Feng Ding Zhengliang

(Department of Automatic Testing and Control, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

Abstract The expression of relative distortion based on even-power series of a radial radius is commonly used in camera calibration. But there is not any reliable theoretical source for the physical accuracy of this model of a substantial lens. Based on a numerical result of grid distortion by Zemax and the optimization toolbox of Matlab, data fitting with combined multinomial of different number of terms and powers of independent variable (radial radius or field) is done. The results show that the expression of relative distortion including terms of the two and three powers of the radial distortion is beneficial in terms of accuracy, and the expression by powers of field angle may give a much better fitting, but the fitting function with multi-term and high-order is not of advantage to provide a more accurate expansion.

Key words camera calibration; radial distortion; data fitting; grid distortion

1 引 言

相机校准是包括空间测量在内的机器视觉应用的一个重要部分, 校准的目的是获得相机在世界坐标系下的外部参数及其内部参数。根据具体应用, 这些内部参数中可能含有对镜头畸变的描述。畸变是轴外主光线的像差, 它并不会像其他几何像差对图像的清晰度产生影响, 而是改变图像的形状。因此, 对于非量测照相系统, 畸变的校正并不是主要的, 但对于高精度的测量系统, 畸变的补偿却是必需的。

畸变主要包括径向畸变和切向畸变^[1]。径向畸变是在沿着一个畸变中心点到像点的半径方向上的

一个变形, 而切向畸变是在垂直于径向畸变方向上的一个变形。切向畸变非常小, 在含有放射状对称单元的光学系统中, 通常是可以忽略的^[2, 3]。由初级像差理论知, 畸变随视场(或物高)的三次方变化, 相对畸变随视场(或物高)的平方项增加, 而这个关系仅是针对球透镜光学系统的一个近似的表达^[4]。对于了解畸变随视场变化的趋势及初步设计光学系统具有重要的指导意义^[5-7], 但对于具体光学系统的畸变描述却未必是最精准的。因此, 对于由球透镜单元组成的照相物镜, 本文试图使用较少的参数找到更精确的畸变逼近模型。

收稿日期: 2007-11-26; **收到修改稿日期**: 2008-03-31

基金项目: 国家自然科学基金(50275040)资助课题

作者简介: 艾莉莉(1978—), 女, 博士研究生, 主要从事空间目标的外姿态测量方面的研究。E-mail: ldyandall@hit.edu.cn

导师简介: 袁 峰(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事光电检测技术及精密几何参数测量技术等方面的研究。

2 畸变模型

畸变是轴外点主光线与像面交点的高度 h (实际像高) 与理想像高 H 的差值, 它与理想像高的比值就是通常的相对畸变 (以下所述畸变均为相对畸变)

$$d(h) = \frac{h - H}{H}. \quad (1)$$

根据相对畸变对规则正方形产生的形变, 大体上分两种情况, 一种是视场边缘的像高小于理想像高, 为负值, 称为欠校正, 也称作桶形畸变; 另一种为正值, 称为过校正, 也称作枕形畸变。当然, 有的光学系统二者兼而有之, 即混合畸变。为了模拟径向畸变的影响, 应用最普遍的畸变表达式由近似逼近的多项式给出:

$$d(r) = k_1 r^2 + k_2 r^4 + \dots, \quad (2)$$

式中 r 为从点畸变中心到理想像点的半径, k_1, k_2, \dots 为未知的系数。(2) 式实质上是基于畸变的三次像差和五次像差研究成果的一个拓展。但基于上述理论的畸变表达式是关于视场角 (或物高) 的函数, 而非像高的函数, 且高斯公式的物像关系式也仅限于近轴区域内的一种无畸变的表达^[8~10]。因此, 包括 r 的奇次幂在内的相对畸变多项式

$$d(r) = k_1 r + k_2 r^2 + k_3 r^3 + \dots, \quad (3)$$

以及基于视场角的幂次表达式均作为本文考虑的对象,

$$d(\theta) = k_1 \theta + k_2 \theta^2 + k_3 \theta^3 + \dots, \quad (4)$$

式中 θ 为照相物镜的视场角。对于不同的目的, 存在着众多可供选择的镜头畸变的表示法。A. Fitzgibbon^[11] 提出的除法模型, 允许通过线性的、非迭代运算法则进行求解, 而且能够同时估计镜头畸变和基础矩阵 (基础矩阵可以从多幅图像估计现场几何参数) 等。

3 数字研究

Zemax 软件具有强大的光线追迹功能, 其中栅格畸变可以对选定视场的任意波长光线进行光线追迹, 其结果包括实际主光线与像面的交点 (实际投影坐标)、近轴主光线与像面的交点 (理想投影坐标)、视场角和相对畸变等, 参考视场点的坐标为 $(0, 0)$ 。本文基于 Zemax 软件栅格畸变的数字结果, 用含有自变量 (r 或 θ) 的不同项数和幂次组合的畸变多项式进行数据拟合, 观察其中的变化规律。这个拟合程序已基于 Matlab 软件最优化工具箱的 “lsqcurvefit” 函数实现。其中, 目标函数用 ξ_r 和 ξ_θ

表示, 它是拟合度的表征, 是指真实畸变值和它在该点拟合畸变值差的平方和 (被选择的非线性最优化函数将这个和, 即关于畸变系数的函数值减到最小)。目标函数越小, 所求函数对畸变的整体描述越逼近。

由初级像差理论知, 畸变随视场的增加而增大, 因此为了更好地描述畸变的变化, 选择视场角为 100° 、焦距为 1 mm 的照相物镜, 其结构如图 1 所示。

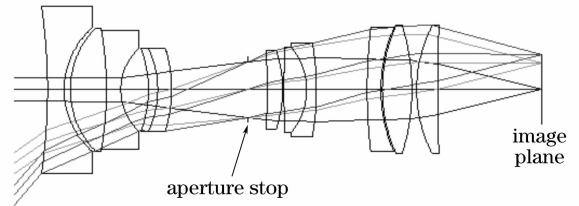


图 1 11 个单元的广角照相物镜

Fig. 1 11-element wide-angle photographic objective

对波长 587 nm 的光线进行追迹, 产生的栅格畸变如图 2 所示, 可见仅含桶形畸变, 最大畸变为 38.84%。考虑到实际应用中 (2) 式大多取一项作为畸变表达式, 且过多的项数所引入的繁杂计算并不被人们所接受, 因此以 14×14 栅格的 225 个点作为已知畸变点, 分别对含有 r 或 θ 的一项、两项、三项和四项的不同幂级数 (幂次取大于 0 小于 10 的整数) 组合的畸变表达式 [分别由 (3) 式、(4) 式确定] 进行非线性数据拟合。后面表格中拟合度均按由小到大的顺序排列, 即被考虑的拟合函数中, 最小的目标函数对应最精确的畸变表达式出现在表格的第一行, 依次排列。

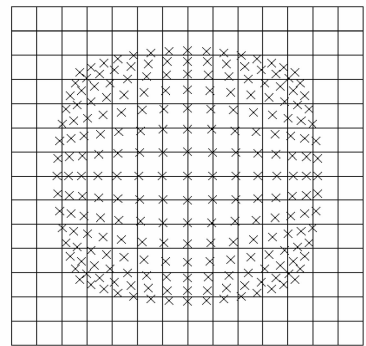


图 2 广角照相物镜的栅格畸变

Fig. 2 Grid distortion of wide-angle photographic objective

4 数据结果

表 1 是关于 r 和 θ 的一项幂级数畸变逼近表达式的拟合度。关于 r 和 θ 的 1~9 次幂的畸变逼近

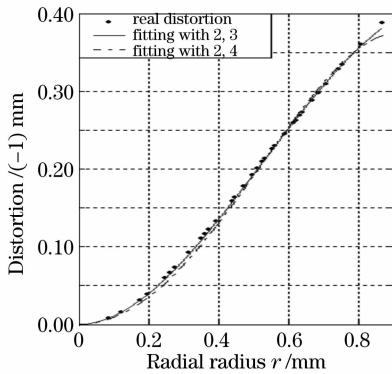
函数中,拟合度最好的 4 个出现在表 1 中,有趣的是, kr 比 kr^2 逼近度好,且 $k\theta^2$ 的逼近度优于 kr 和 kr^2 。表 2 是关于 r 和 θ 的两项畸变逼近表达式的拟合度。

表 1 一项幂级数畸变逼近表达式的拟合度

Table 1 Fitting quality for distortion approximation expression with one-term power series

Power	ξ_r	ξ_θ	Power
1	0.0969	0.0027	2
2	0.1575	0.2115	3
3	0.8051	0.2417	1
4	1.6527	0.6200	4

表 2 提供的最好拟合度间的差别竟有四个数量级,逼近表达式 $k_1\theta^2 + k_2\theta^4$ 的拟合度远大于其他项,含有 θ^2 的两项畸变表达式均出现在表 2 中。注意



到常见的逼近表达式 $k_1r^2 + k_2r^4$ 并没能提供一个最好的拟合。给定镜头的真实畸变值,以 $k_1r^2 + k_2r^3$ 和 $k_1r^2 + k_2r^4$ 为拟合函数的畸变逼近曲线,及真实畸变值与该处拟合后的畸变值的差值均出现在图 3 中。

表 2 两项幂级数畸变逼近表达式的拟合度

Table 2 Fitting quality for distortion approximation expression with two-term power series

Power	ξ_r	ξ_θ	Power
23	5.0040×10^{-4}	1.5298×10^{-8}	24
2,4	0.0051	2.6562×10^{-5}	2,5
2,5	0.0124	3.4556×10^{-5}	2,3
1,2	0.0168	8.8890×10^{-5}	2,6
2,6	0.0208	1.7145×10^{-4}	2,7
2,7	0.0292	2.6446×10^{-4}	2,8
1,3	0.0303	3.6172×10^{-4}	2,9
2,8	0.0374	4.9528×10^{-4}	1,2

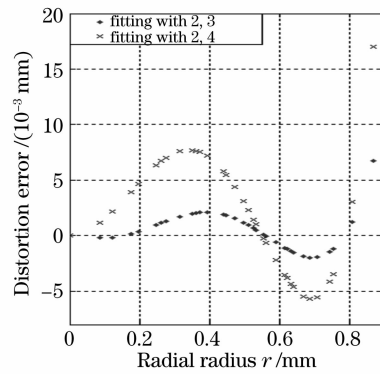


图 3 基于径向半径 r 的两个两项畸变模型拟合的比较。(a) 真实畸变与拟合畸变曲线,(b) 真实畸变相对于拟合畸变的误差

Fig. 3 Fitting comparison with two two-term distortion models of radial radius (a) real distortion and fitting distortion curve,

(b) error between real distortion and fitting distortion

表 3 三项幂级数畸变逼近表达式的拟合度

Table 3 Fitting quality for distortion approximation expression with three-term power series

Power	ξ_r	ξ_θ	Power
2,3,8	1.5626×10^{-5}	2.9552×10^{-11}	2,4,6
2,3,7	1.6336×10^{-5}	9.9779×10^{-11}	2,4,7
2,3,9	1.9138×10^{-5}	1.2150×10^{-10}	2,4,5
2,3,6	2.3089×10^{-5}	2.7611×10^{-10}	2,4,8
2,3,5	3.8350×10^{-5}	4.9263×10^{-10}	2,4,9
2,4,5	5.5009×10^{-5}	1.3060×10^{-9}	2,3,4
2,3,4	6.5417×10^{-5}	4.4550×10^{-9}	1,2,4
2,4,6	1.7152×10^{-4}	3.2431×10^{-7}	2,3,5
1,2,3	2.6331×10^{-4}	7.3088×10^{-7}	2,5,6

表 3 为关于 r 和 θ 的三项畸变逼近表达式的拟合度。含有 r 的 2,3 幂次, θ 的 2,4 幂次的畸变表达式均出现在表 3 中,且处在相同位置的拟合度, ξ_θ 至少大于 ξ_r 三个数量级。由(2)式给出的表达式依然没有出现在表格的第一行。另有,对基于 r 和 θ 各幂次的四项组合表达式,也采用如上的方法做了研

究。对于 r ,其幂次自 2345 至 2679 升次排列的组合相对其他幂次组合区间有较好的拟合度,但相对于表 3 并没有明显的提升,且彼此间差别不大。表 4 则给出了关于自变量 θ 的四项组合表达式中较好的拟合。关于 θ 的 2,4 幂次项仍然是畸变的主要描述,但 $k_1\theta^2 + k_2\theta^4 + k_3\theta^6 + k_4\theta^8$ 并没有出现在表中的第一行。表 4 第一行的拟合度相对于表 3 第一行的拟合度有所下降,且表 4 相对于表 3 整体变化不大。

表 4 关于 θ 的四次幂级数畸变逼近表达式的拟合度

Table 4 Fitting quality for distortion approximation expression by four-term power series of θ

ξ_θ	Power	ξ_θ	Power
1.6008×10^{-10}	2,4,8,9	6.9038×10^{-10}	2,4,7,9
3.0150×10^{-10}	2,4,5,7	2.2236×10^{-9}	2,4,6,8
4.8353×10^{-10}	2,4,5,6	7.2440×10^{-9}	2,3,4,6
5.7315×10^{-10}	2,4,7,8	1.0363×10^{-8}	2,4,5,9

由数字研究结果可见,对于给定的广角物镜, θ 的 2,4,6 次幂的组合是所有被研究的畸变逼近模型

中最精确的,这与基于像差理论的畸变表达式相吻合;而(2)式给出的 r 的偶次幂组合的畸变表达式均没有出现在表中的第一行,基于径向半径 r 的2、3幂次的组合反而可以提供更为精确的畸变描述,这个原因可以通过(2)式提出的质疑加以解释。高的阶次和多的项数未必会提供一个更为精准的畸变表达,这可从数值分析的角度加以理解,对于含有一定变化规律的一组数据,只能试图找到这“一”规律,才能对其进行“最”精确描述。另有,对基于(3)式,(4)式且含有常数项的不同组合函数,也同样做了研究,它与不含常数项的各拟合函数相比,逼近度提高不明显,有时甚至下降。

另外,对于 Zemax 软件平台上给定的,比较常见的双高斯型、反摄远型的物镜也按如上方法做了研究,结论均成立。

5 结 论

用关于视场角和径向半径的不同幂次组合的相对畸变表达式进行了数据拟合,对给定的镜头,关于径向半径偶次幂级数的相对畸变表达式并不能等同于基于像差理论的关于视场角的相对畸变表达式,以提供同样精确度的拟合,对基于径向半径幂级数的相对畸变表达式,2、3次幂是其主要的描述;通过研究,既印证了基于像差理论的关于视场角的2、4和6次组合的相对畸变表达式的经典,也论证了工程上“多项和高阶的拟合函数未必会提供一个更为精准的畸变表达”。

另有,由广角照相物镜的栅格畸变结果是一个纯畸变的结果,而实际应用中由于加工和装配的误差可能使纯畸变的获得有些许背离。基于初级像差理论的畸变公式仅是针对球透镜光学系统的一个逼

近的表达,当强调的是,对于具体的量测镜头,了解镜头的结构对于找到最逼近的畸变模型是必要的。

参 考 文 献

- 1 O. Faugeras, G. Toscani. The calibration problem for stereo [C]. *Proc. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1986. 15~20
- 2 Roger Y. Tsai. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the shelf TV cameras and lenses [J]. *IEEE J. Robotics and Automation*, 1987, **RA-3**(4): 323~344
- 3 G. Wei, S. Ma. Implicit and explicit camera calibration: Theory and experiments [J]. *IEEE Trans. Patt. Analy. Mach. Intell.*, 1994, **16**(5): 469~480
- 4 Wang Zhijiang. *Handbook of Optical Technology* (first volume) [M]. Beijing: China Machine Press, 1987. 28~42
王之江. 光学技术手册(上册) [M]. 北京: 机械工业出版社, 1987. 28~42
- 5 Hap Peiming. The eyepiece of aspheric surface [J]. *Acta Optica Sinica*, 1997, **17**(10): 1389~1393
郝沛明. 非球面目镜 [J]. 光学学报, 1997, **17**(10): 1389~1393
- 6 Hao Peiming, Fu Lianxiao, Yuan Liyin *et al.*. Compensating test of the reflective mirror [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(6): 831~835
郝沛明, 付联效, 袁立银 等. 反射镜补偿检验 [J]. 光学学报, 2006, **26**(6): 831~835
- 7 Xue Lixia, Rao Xuejun, Wan Cheng *et al.*. Higher-order aberrations correction and vision analysis system for human eye [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(5): 893~897
薛丽霞, 饶学军, 王 成 等. 人眼高阶像差校正和视觉分析系统 [J]. 光学学报, 2007, **27**(5): 893~897
- 8 Yuan Xucang. *Method of Modern Optical Design* [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1995. 70~95
袁旭沧. 现代光学设计方法 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1995. 70~95
- 9 Wang Zhijiang. *Theory Fundamentals of Optical Design* (Second Edition) [M]. Beijing: Science Press, 1985. 103~135
王之江. 光学设计理论基础(第二版) [M]. 北京: 科学出版社, 1985. 103~135
- 10 M. Born, E. Wolf. *Principles of Optics* [M]. seventh ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 228~260
- 11 A. Fitzgibbon. Simultaneous linear estimation of multiple view geometry and lens distortion [C]. *Proc. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2001. 125~132