

文章编号: 0253-2239(2008)10-1856-05

非均匀湍流路径光传播数值模拟中 相位屏间 C_n^2 的选取

钱仙妹 朱文越 饶瑞中

(中国科学院安徽光学精密机械研究所 大气光学研究室, 安徽 合肥 230031)

摘要 针对非均匀湍流路径光传播的数值模拟,为减小相位屏间湍流强度均匀的假设所引起的模拟误差,数值分析了五种选择相位屏间折射率结构常数 C_n^2 的可能方案。通过计算平面波和球面波的 Rytov 指数和 Fried 参数,对比五种方案得到的 Rytov 指数和 Fried 参数与理论结果的相对误差。结果表明,当相位屏间 C_n^2 选择为相位屏间湍流大气实际的折射率结构常数的路径平均值时,模拟误差最小,该选择方案为相位屏间 C_n^2 选取的最佳方案;当根据相位屏间湍流大气的 Rytov 指数相等的原则来设置相位屏分布时,选择相位屏间 C_n^2 为两相邻相位屏处折射率结构常数的几何平均值时,在一定的误差允许范围内,该选择方案具有可取性。

关键词 大气光学; 光传播; 折射率结构常数 C_n^2 选取; 数值模拟; 非均匀湍流路径

中图分类号 TN249 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/AOS20082810.1856

Selection of C_n^2 between Phase Screens for Simulating Laser Propagation Along an Inhomogeneous Turbulent Path

Qian Xianmei Zhu Wenyue Rao Ruizhong

(Center for Atmospheric Optics, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei, Anhui 230031, China)

Abstract In the numerical simulation of light propagation along an inhomogeneous turbulent path, five methods for the selection of C_n^2 between phase screens are discussed, to reduce the error due to the assumption that turbulence between phase screens is homogeneous. By calculating Rytov index and Fried parameter of plane wave and spherical wave, relative errors between simulative and theoretical results of the five methods are compared. It is found that setting C_n^2 as the average refractive index structure constant of turbulence between phase screens can obtain the highest precision. And when the equivalent Rytov index-interval phase screen method is used to locate phase screens, choosing C_n^2 as the average value of refractive index structure constants at the positions of two phase screens is also feasible.

Key words atmospheric optics; light propagation; selection of refractive index structure constant (C_n^2); numerical simulation; inhomogeneous turbulent path

1 引 言

激光在湍流大气中传输时会受到一系列湍流效应的影响^[1~3],制约了诸多激光工程应用,因此研究激光在湍流大气中的传输特性具有重要意义,而数值模拟计算是其中重要的研究手段之一。在数值模拟激光湍流大气传输时,常采用多层相位屏法在传输路径上设置若干个薄相位屏,并将各相位屏网络

化^[4~7]。于是激光每传输到一个相屏时即把相位屏间湍流大气引起的相位扰动叠加到光波波前上,然后在真空中传输至下一个相位屏处,再叠加下一个相位屏对应的相位扰动,再在真空中传输,直至终点为止。在数值求解两相位屏间湍流大气引起的相位扰动时一般均假设相位屏间湍流强度均匀,即折射率结构常数 C_n^2 相等。对于均匀湍流路径的光传输,

收稿日期: 2007-12-25; **收到修改稿日期**: 2008-02-22

基金项目: 国家自然科学基金(0704071)和中国科学院创新基金(CXJJ-249)资助课题。

作者简介: 钱仙妹(1982-),女,博士研究生,主要从事激光大气传输的数值模拟计算方面的研究工作。

E-mail: xmqian1982@yahoo.com.cn

导师简介: 饶瑞中(1963-),男,博士生导师,研究员,主要从事激光大气传输、光辐射与图像的大气传播、大气湍流等方面的研究。E-mail: rao@aiofm.ac.cn

该假设不会给模拟结果带来误差；而对于非均匀湍流路径的光传输，该假设将会造成一定的模拟误差。减小这种误差的途径之一是在传输路径上设置尽可能多的相位屏。然而，一方面相位屏间距的限制条件^[8~10]使得相位屏数目有限以致不可能对所有的湍流起伏区进行采样；另一方面过多的相位屏增加了计算负担，降低了计算效率。因此，在上述假设和现有的计算条件下，为了减小模拟误差应着眼如何合理选择相位屏间 C_n^2 的问题上。在以往的数值模拟过程中，人们常把相位屏间的 C_n^2 近似为前一个相位屏处或后一个相位屏处的折射率结构常数，这都将带来较大的模拟误差。

本文针对非均匀湍流路径激光大气传输的数值模拟，数值分析了上述两种选择相位屏间 C_n^2 的方案引起的误差，并提出了另外三种选择方案。通过计算平面波和球面波的 Rytov 指数和 Fried 参数，对比该五种方案与理论结果的相对误差，确定了非均匀湍流路径光传播数值模拟中相位屏间 C_n^2 选取的最佳方案。

2 相位屏间 C_n^2 选取的五种方案

对于非均匀湍流路径，设相邻两个相位屏的位置分别为 z_{i-1} 和 z_i ，相位屏间距为 $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ ，两相位屏处对应的折射率结构常数分别为 $C_n^2(z_{i-1})$ 和 $C_n^2(z_i)$ 。于是相位屏间湍流大气引起的相位扰动可

表示为 $s = k \int_{z_{i-1}}^{z_i} n(z) dz$ ， $k = 2\pi/\lambda$ 为光束真空波数， λ 为激光波长， n 为折射率起伏。在数值求解相位扰动 s 时常采用傅里叶变换法， s 的频谱与湍流折射率谱的关系为

$$F_s(\Delta z_i) = 2\pi k^2 \Delta z_i \Phi_n(\Delta z_i). \quad (1)$$

对于 Kolmogorov 谱型， $\Phi_n = 0.033 C_n^2 \kappa^{-11/3}$ ，于是得到

$$F_s(\Delta z_i) = 2\pi k^2 \Delta z_i \times 0.033 C_n^2(\Delta z_i) \kappa^{-11/3}, \quad (2)$$

(2) 式假设了相位屏间湍流强度均匀，折射率结构常数相等且为 $C_n^2(\Delta z_i)$ 。对于非均匀湍流路径，由于 $C_n^2(\Delta z_i)$ 不能完全反映出 Δz_i 距离内的湍流强度起伏状况，所以该假设将会带来一定的模拟误差，其取值应当慎重。

$C_n^2(\Delta z_i)$ 的取值可能有以下五种，即 $C_n^2(\Delta z_i)_j$ ， $j = 1, \dots, 5$ ，其与 $C_n^2(z_{i-1})$ 和 $C_n^2(z_i)$ 的关系分别为

$$\text{方案 1: } C_n^2(\Delta z_i) \text{ 取为前一个相位屏处的大小:} \\ C_n^2(\Delta z_i)_1 = C_n^2(z_{i-1}); \quad (3)$$

方案 2: $C_n^2(\Delta z_i)$ 取为后一个相位屏处的大小:

$$C_n^2(\Delta z_i)_2 = C_n^2(z_i); \quad (4)$$

方案 3: $C_n^2(\Delta z_i)$ 取为两相位屏处折射率结构常数的算术平均值:

$$C_n^2(\Delta z_i)_3 = [C_n^2(z_i) + C_n^2(z_{i-1})]/2; \quad (5)$$

方案 4: $C_n^2(\Delta z_i)$ 取为两相位屏处折射率结构常数的几何平均值:

$$C_n^2(\Delta z_i)_4 = \sqrt{C_n^2(z_i) C_n^2(z_{i-1})}; \quad (6)$$

方案 5: $C_n^2(\Delta z_i)$ 取为两相位屏间湍流大气折射率结构常数的路径平均值:

$$C_n^2(\Delta z_i)_5 = \frac{1}{\Delta z_i} \int_{z_{i-1}}^{z_i} C_n^2(z) dz. \quad (7)$$

3 数值分析

为比较以上 5 种方案所引起的模拟误差大小，将 5 种方案得到的相位起伏特征参量 Fried 参数 r_0 和光强起伏特征参量 Rytov 指数 β_0^2 分别与两种参量的理论值比较，误差最小的认为是最佳方案。

以光在湍流大气中的垂直上行传输为例， C_n^2 高度廓线选用 Hufnagel-Valley 5/7 参数模型^[11]:

$$C_n^2(z) = 8.2 \times 10^{-26} \omega^2 z^{10} \exp(-z) + \\ 2.7 \times 10^{-16} \exp(-z/1.5) + A \exp(-10z), \quad (8)$$

其中 z 为高度，单位为 km， $\omega = 21$ m/s， $A = 1.7 \times 10^{-14}$ m^{-2/3}。 C_n^2 高度廓线如图 1 所示。

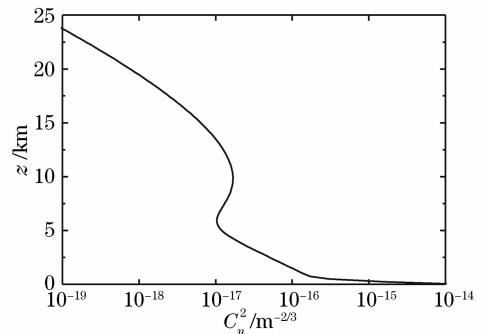


图 1 Hufnagel-Valley 5/7 C_n^2 高度廓线模型

Fig. 1 Altitude profile of C_n^2 by model Hufnagel-Valley 5/7
湍流大气中平面波和球面波的 Rytov 指数的理论值分别为

$$\beta_{0,pl}^2(L) = 4 \times 0.563 k^{7/6} \int_0^L C_n^2(z) (L-z)^{5/6} dz, \quad (9)$$

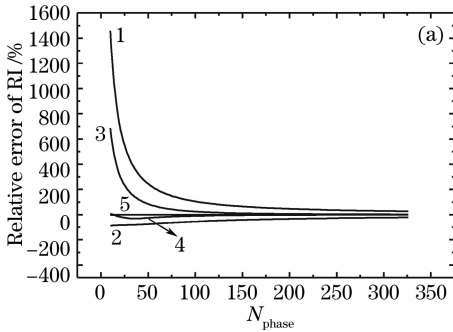
$$\beta_{0,sp}^2(L) = 4 \times 0.563 k^{7/6} \int_0^L C_n^2(z) [z(L-z)/L]^{5/6} dz, \quad (10)$$

Fried 参数的理论值分别为

$$r_{0,pl}(L) = 2.1 \times \left[1.46k^2 \int_0^L C_n^2(z) dz \right]^{-3/5}, \quad (11)$$

$$r_{0,sp}(L) = 2.1 \times \left[1.46k^2 \int_0^L C_n^2(z) (z/L)^{5/3} dz \right]^{-3/5}. \quad (12)$$

选择光波波长为 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$, 传输距离为



$L = 20 \text{ km}$. 首先讨论平面波的传播情况。在传输路径上设置不同数目且均匀分布的湍流相位屏, 分别采用五种方案计算得到的 Rytov 指数(RI)和 Fried 参数(FP)的相对误差分别如图 2(a)和图 2(b)所示, 其中相对误差 = $\frac{\text{模拟值}}{\text{理论值}} - 1$, UDPS 表示均匀分布相位屏法, 即设置等间距相位屏, N_{phase} 为相位屏的数目。

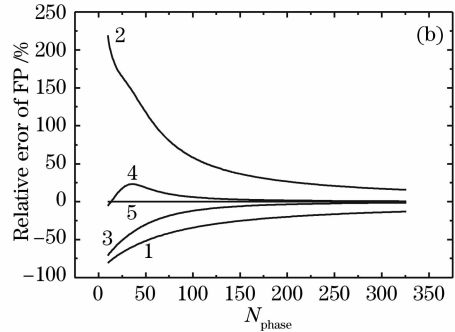


图 2 五种方案的模拟值与理论值的相对误差(平面波)

Fig. 2 Relative errors between simulative and theoretical value of five methods (plane wave) for UDPS

从图 2 可以看到, 方案 2 明显低估了湍流起伏, 方案 1 和 3 严重高估了湍流起伏, 尤其是在相位屏数目很少时。这是由于, 根据 Hufnagel-Valley 5/7 模型的 C_n^2 高度分布特征(如图 1), 高度越高, 湍流强度越弱, 在约 10 km 处湍流强度局域增大。因此, 整体来看, 相位屏间湍流大气的平均湍流强度要比高度低的相位屏处的湍流强度弱, 而比高度高的相位屏处的湍流强度高。这导致了方案 1 计算得到的 Rytov 指数增大, Fried 参数减小, 高估了湍流强度; 而方案 2 则低估了湍流强度。此外, 从图 1 还可以看到, 大气折射率的起伏主要体现在 10 km 左右和 10 km 以下区域, 整体而言, 该区域内各相位屏间 C_n^2 的平均值要低于两相位屏处 C_n^2 的算术平均值, 以致方案 3 也高估了湍流起伏。图 2 还显示, 随着相位屏数目的增多, 五种方案的相对误差均趋于零。由图 2(a)可见,

对 Rytov 指数, 当 $N_{\text{phase}} = 10$ 时, 方案 5 的相对误差仅有 3.2%, 而为了达到 5% 的相对误差, 方案 3 和 4 所需的相位屏数目分别至少为 226 个和 144 个, 当相位屏数目多达 326 个时, 方案 1 和 2 的相对误差仍分别高达 27% 和 22%。可见采用方案 1、2 和 3 均将会带来严重的误差。图 3 给出了方案 4 和 5 得到的相对误差的细致比较情形。

图 3 显示, 方案 5 明显优于方案 4, 考虑 Fried 参数时方案 5 的误差为零。

改变相位屏分布的设置方式为等 Rytov 指数间隔相位屏 (Equivalent Rytov index-interval phase screen, ERPS), 设置相位屏间湍流大气的 Rytov 指数相等, 即 $\beta_0^2(\Delta z_i) = c, i = 1, 2, \dots, N_{\text{phase}}$, 其中 c 为常数。于是得到五种方案的相对误差如图 4 所示。

从图 4 可以看到, 采用 ERPS 的相位屏设置方

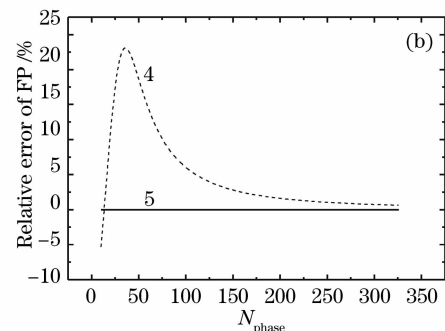
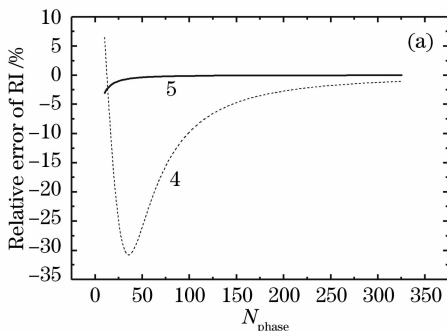


图 3 方案 4 和 5 的相对误差比较(平面波)

Fig. 3 Comparison of relative errors of method 4 and method 5 (plane wave) for UDPS

式时,同样, $C_n^2(\Delta z_i)$ 选取方案 1 和 3 明显高估了湍流起伏强度,方案 2 明显低估了湍流起伏。图 5 给出方案 4 和 5 的细致比较。

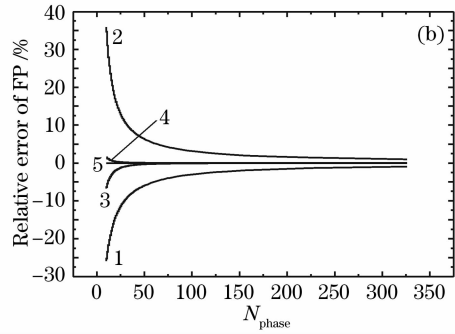
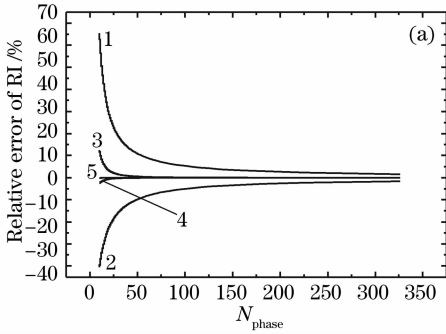


图 4 五种方案的模拟值与理论值的相对误差(平面波)

Fig. 4 Relative errors between simulative and theoretical value of five methods (plane wave) for ERPS

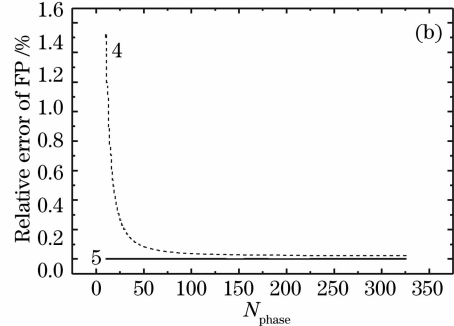
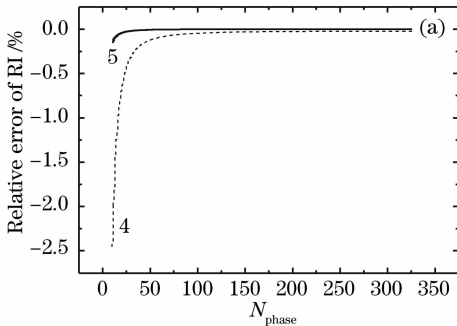


图 5 方案 4 和 5 的相对误差(平面波)

Fig. 5 Comparison of relative errors of method 4 and method 5 (plane wave) for ERPS

从上面的对比分析可以看到,对于平面波的传播,不论是选择 UDPS 还是 ERPS 的相位屏分布设置方法,相位屏间折射率结构常数选取方案 5 引起的模拟误差最小。比较图 2 和 4 可以明显看到,在同样数目的相位屏情况下,ERPS 的相对误差明显比 UDPS 的要小得多,这在一定程度上也表明,对于非均匀湍流路径光传输的数值模拟,相位屏分布设置方案 ERPS 优于 UDPS。

均同上,且选择 ERPS 的相位屏分布设置方法,得到五种选择 $C_n^2(\Delta z_i)$ 方案的相对误差如图 6 所示。

图 6 显示,对于球面波的传播, $C_n^2(\Delta z_i)$ 选择方案 1、2 和 3 的相对误差均较大。图 7 给出了分别采用方案 4 和 5 得到的 Rytov 指数和 Fried 参数的相对误差的细致比较情况。

可以看到,当考虑 Rytov 指数时,方案 4 优于方案 5,当考虑 Fried 参数时,方案 5 优于方案 4,但综合两者后方案 5 优于方案 4。

再讨论球面波传播情况,光束波长和传输路径

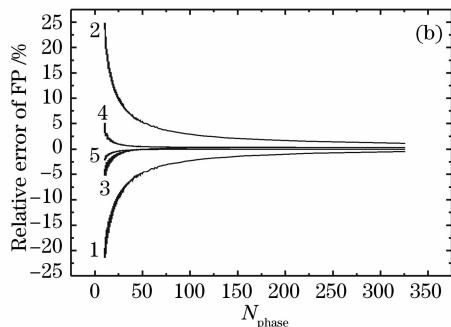
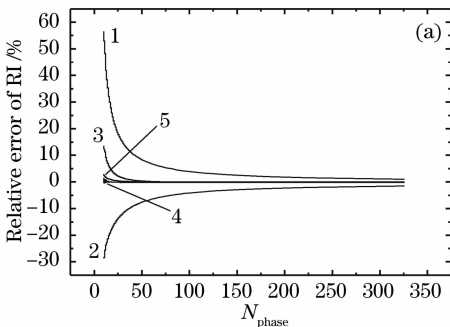


图 6 五种方案的模拟值与理论值的相对误差(球面波)

Fig. 6 Relative errors between simulative and theoretical value of five methods (spherical wave) for ERPS

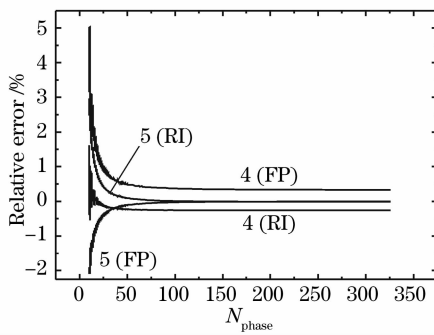


图 7 方案 4 和 5 的相对误差(球面波)

Fig. 7 Comparison of relative errors of method 4 and method 5 (spherical wave) for ERPS

从以上的数值分析可以看到,不论是对平面波还是球面波的非均匀湍流路径传播的模拟,当 $C_n^2(\Delta z_i)$ 取值为相位屏间湍流大气折射率结构常数的路径平均值时误差最小,表明方案 5 是 $C_n^2(\Delta z_i)$ 选取的最佳方案。而方案 1、2 和 3 均将带来较大模拟误差。同时还可以看到,方案 4 的误差要略比方案 5 大,当选择 ERPS 的相位屏分布设置方法时,即使相位屏数目很少,方案 4 的误差也不超过 5%,而且随着相位屏数目的增多,该误差将迅速减小。因此,在模拟非均匀湍流路径的光传播时,若采用 ERPS 的相位屏分布设置方式,按照方案 4 选取 $C_n^2(\Delta z_i)$ 也是可取的。

4 结 论

采用多层相位屏法数值模拟光在湍流大气中的传播,在计算相位屏间湍流大气引起的相位扰动时均假设了相屏间湍流强度相等,折射率结构常数为一常数 $C_n^2(\Delta z_i)$ 。对于非均匀湍流路径,该假设会导致一定的模拟误差。为了尽可能真实反映传输路径上的湍流强度和减小模拟误差,应当合理选择 $C_n^2(\Delta z_i)$ 。本文讨论了五种选择 $C_n^2(\Delta z_i)$ 的方案,通过计算平面波和球面波的 Rytov 指数和 Fried 参数,对比分析五种方案与理论的相对误差。结果显示,在同等相位屏数目的条件下,方案 1、2 和 3 均将带来较大误差,方案 4 的误差较小,方案 5 的误差最

小,而且随着相位屏数目的增多,五种方案的误差均趋于零。因此,在模拟非均匀湍流路径的光传播时,选择 $C_n^2(\Delta z_i)$ 为相位屏间湍流大气的折射率结构常数的路径平均值最为合理,模拟精度最高;当采用 ERPS 的相位屏分布设置方式时,在一定的误差范围内,选择 $C_n^2(\Delta z_i)$ 为两相位屏处折射率结构常数的几何平均值也是可行的。

参 考 文 献

- 1 Wu Bilin, Rao Changhui. Effect of outer scale of atmospheric turbulence on tracking precision of titled tracking system[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(6): 967~970
吴碧琳,饶长辉. 大气湍流外尺度对倾斜跟踪系统跟踪精度的影响[J]. *光学学报*, 2007, **27**(6): 967~970
- 2 Rao Ruizhong, Wang Shipeng, Liu Xiaochun *et al.*. Experimental study of spot dancing of laser beam in a turbulent atmosphere[J]. *Chin. J. Lasers*, 2000, **27**(11): 1011~1015
饶瑞中,王世鹏,刘晓春等. 湍流大气中激光束漂移的实验研究[J]. *中国激光*, 2000, **27**(11): 1011~1015
- 3 Huang Yinbo, Wang Yinjian. The effect of tracking jitter on the beam spreading induced by atmospheric turbulence [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(2): 152~156
黄印博,王英俭. 跟踪抖动对激光湍流大气传输光束扩展的影响[J]. *光学学报*, 2005, **25**(2): 152~156
- 4 Martin J M, Flatte S M. Intensity images and statistics from numerical simulation of wave propagation in 3-D random media [J]. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(11): 2111~2126
- 5 Coles W A, Filice J P, Frehlich R G *et al.*. Simulation of wave propagation in three-dimensional random media[J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(12): 2089~2101
- 6 Knepp D L. Multiple phase-screen calculation of the temporal behavior of stochastic waves[J]. *IEEE*, 1983, **71**(6): 722~737
- 7 Frehlich R. Simulation of laser propagation in a turbulent atmosphere[J]. *Appl. Opt.*, 2000, **39**(3): 393~397
- 8 Rao Ruizhong. *Light Propagation in the Turbulent Atmosphere* [M]. Hefei: AnHui Science and Technology Press, 2005. 98~106
饶瑞中. 光在湍流大气中的传播[M]. 合肥: 安徽科学技术出版社, 2005. 98~106
- 9 Douglas H N, Donald L W, Edward P M *et al.*. Wave optics simulation of atmospheric turbulence and reflective speckle effects in CO₂ lidar[J]. *Appl. Opt.*, 2000, **39**(12): 1857~1871
- 10 Huang Yinbo, Wang Yingjian. Choosing computing parameters in the numerical simulation of laser propagation effects[J]. *J. Atmospheric and Environmental Optics*, 2007, **2**(1): 23~27
黄印博,王英俭. 激光大气传输数值模拟中对计算参数的选取[J]. *大气与环境光学学报*, 2007, **2**(1): 23~27
- 11 Smith F G. *Atmospheric Propagation of Radiation* [M]. Bellingham, Washington: SPIE Optical Engineering Press, 1993. 222