

非球面系统中高斯光束传输的数值计算

张凤生

(青岛大学机电工程学院, 山东 青岛 266071)

摘要 高斯光束的理论公式从整体上描述了光束的传播特性,但并没有描述光束内每一光子的传播行为。基于高斯光束的单叶双曲面特性,建立了一个新的高斯光束光子传输模型。该模型将高斯光束视为由无数个共轴单叶双曲面构成的双曲线体,光子传播方向是在过该光子初始发射点的双曲面的两条直母线中等概率选择。基于该模型,通过计算大量光子经光学系统的传播轨迹可获得高斯光束的几何构形、光强分布、光子光程分布及其传播方向。对实际非球面光学系统的计算结果充分验证了该方法可全面、准确地模拟高斯光束的传播特性,且数值计算效率高。

关键词 激光技术; 高斯光束; 计算机模拟; 光学相干层析成像

中图分类号 O436 **文献标识码** A

Numerical Computation for Propagation of Gaussian Beam through Aspheric System

Zhang Fengsheng

(College of Mechanical & Electrical Engineering, Qingdao University, Qingdao, Shandong 266071, China)

Abstract The theoretical formulas of Gaussian beam describe its propagation characteristics on the whole, but they don't give any description of the propagation of photons within the beam. Based on Gaussian beam's characteristic of hyperboloid with one sheet, a new photon propagation model for Gaussian beam was built. The model takes the Gaussian beam as a hyperboloid consisting of myriads of co-axis hyperboloids of one sheet, and the propagation direction of a photon is chosen equiprobably between the two generatrices of the hyperboloid that goes through the photon's initial emission point. With this model and by use of tracing the propagations of lots of photons through an optical system, the parameters of Gaussian beam were obtained, i. e. geometric configuration, light intensity distribution, photons' optical path length distribution and their propagation directions. The computation result for a practical aspheric optical system has fully proved that the method can be used to simulate the propagation characteristics of Gaussian beam all-sidedly and accurately with high numerical computation efficiency.

Key words laser technique; Gaussian beam; computer simulation; optical coherence tomography

1 引 言

在应用蒙特卡罗方法模拟生物组织的 光学相干层析成像 (Optical coherence tomography, OCT)^[1~3]时,首先需要对 OCT 系统的测量激光束(高斯光束)进行数值计算,以确定光束内每一光子进入生物组织的初始位置和方向。为此必须解决以下两个问题:1)高斯光束光子传输模型的建立。现有的高斯光束光子传输模型可分为两类:一类是将高斯光束分为许多由束腰中心发射的微元光锥^[4],每个光锥内的光子数按高斯分布确定,光子沿光锥中心线传播。另一类是假设光束内的光子按高斯分

布随机传播^[5,6],即光子在束腰截面和任一垂直光束轴截面上的分布均按高斯分布的条件随机确定。实质上,这两种模型均将高斯光束模拟为圆锥光束,与高斯光束的几何特征不符。2)为减小象差影响,OCT 系统的测量光束聚焦镜组为非球面镜。由于非球面光路计算复杂,而且需要计算数以亿计的光子轨迹,必须合理解决光路计算精度与速度问题。本文从高斯光束的理论公式出发,建立了既符合光束几何特征,又符合光子直线传播规律与光能传播方向的高斯光束光子传输模型。在此基础上,给出了非球面系统中高斯光束的数值计算方法与结果。

收稿日期: 2007-01-23; 收到修改稿日期: 2007-09-18

作者简介: 张凤生(1962—),男,河北廊坊人,博士,教授,主要从事光学测量、测试技术与仪器、光学相干层析成像技术等方面的研究。E-mail: fszhang1994@yahoo.com.cn

2 高斯光束光子传输的数学模型

2.1 高斯光束的单叶双曲面特征

沿 z 轴传播的基模高斯光束,以其束腰位置为原点,则与束腰相距为 z 处的光斑半径为^[7]

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + [(\lambda z / (\pi w_0^2))]^2}, \quad (1)$$

式中 w_0 为束腰半径, λ 为光波长。因为 $w(z) = (x^2 + y^2)^{1/2}$, (1) 式为 xyz 坐标系内的单叶双曲面方程,而单叶双曲面可由直母线绕与它交叉的轴线旋转形成。设 $y = w_0$, 则有 $x = \pm \lambda z / (\pi w_0)$ 。这表明平面 $y = w_0$ 与(1)式所代表的单叶双曲面相交于两条直线,其中任一条直线绕光轴旋转一周即形成(1)式代表的单叶双曲面。同理,对于束腰平面上的任意一点 $P(x_P, y_P)$,可仿照(1)式构造过 P 点的单叶双曲面方程:

$$w_P(z) = \sqrt{(x_P^2 + y_P^2)} \sqrt{1 + [\lambda z / (\pi w_0^2)]^2}, \quad (2)$$

过 P 点,且垂直于 P 与束腰中心连线的平面与(2)式代表的单叶双曲面相交于两条直母线:

直线 1:

$$x = x_P + cy_P, \quad y = y_P - cx_P, \quad z = z,$$

直线 2:

$$x = x_P - cy_P, \quad y = y_P + cx_P, \quad z = z, \quad (3)$$

其中

$$c = \lambda z / (\pi w_0^2).$$

2.2 高斯光束光子传输的数学模型

基于上述分析,建立高斯光束光子传输的数学模型如下:将高斯光束视为由无数个共轴单叶双曲面构成的双曲线体,并假设光子的传播是沿光子所在的双曲面的两条直母线方向等概率选择。这一假设不仅符合光子的直线传播条件,而且从概率统计学的观点看,这种等概率选择意味着由点 (x_P, y_P) 发射的大量光子的“平均”传播方向是沿两条直母线方向的矢量和,其方向与相应高斯光束的波印廷矢量相同。

1) 光子在束腰截面上初始发射位置的随机确定

应用 Box-Muller 变换^[8]构造二维高斯分布函数。设 ξ_1 和 ξ_2 是在 $[-1, 1]$ 内均匀分布的随机数,且二者相互独立,令 $R = \xi_1^2 + \xi_2^2$ 。随机取一对 ξ_1 和 ξ_2 , 如果 $R = 0$ 或 $R > 1$, 则重选一对 ξ_1 和 ξ_2 ; 否则, 计算

$$x_P = 0.5w_0\xi_1 \sqrt{-2\ln R/R}, \quad (4)$$

$$y_P = 0.5w_0\xi_2 \sqrt{-2\ln R/R},$$

由此得到的随机数 x_P 和 y_P 服从均值为 0、方差为

$0.25w_0^2$ 的高斯分布,二者的联合概率密度为

$$p(x_P, y_P) = \frac{1}{2\pi} \exp[-2(x_P^2 + y_P^2)/w_0^2] p(\xi_1, \xi_2), \quad (5)$$

因 ξ_1 和 ξ_2 的联合概率密度 $p(\xi_1, \xi_2)$ 为常数, (5) 式表明 x_P 和 y_P 构成二维高斯分布。根据高斯光束的光强分布特性,当 $r = w_0$ 时,光强降至轴上点的 $1/e^2$, 因此,由(4)式计算,并满足条件 $r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \leq w_0$ 的随机数 x_P 和 y_P 作为光子初始发射点坐标,将使得束腰截面上的光子发射服从高斯分布。

2) 光子传播方向的随机确定

设 ξ_3 是在 $[0, 1]$ 内均匀分布的随机数。当 $\xi_3 > 0.5$, 选择(3)式中直线 1; 反之,选择直线 2。

3 非球面系统的光路计算

非球面通常以 10 阶或 12 阶多项式表示^[9] 为

$$z = f(x, y) = \frac{Ch^2}{1 + \sqrt{1 - h^2 C^2 (1 + A_2)}} + A_4 h^4 + A_6 h^6 + A_8 h^8 + A_{10} h^{10}, \quad (6)$$

式中 z 为曲面的弯曲量, $h = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为光线入射高度, C 为曲面顶点的曲率。光线在曲面上的折射于图 1。入射光线 r_1 与过曲面顶点的切平面交于 P_1 点,在曲面上的入射点为 P_2 。

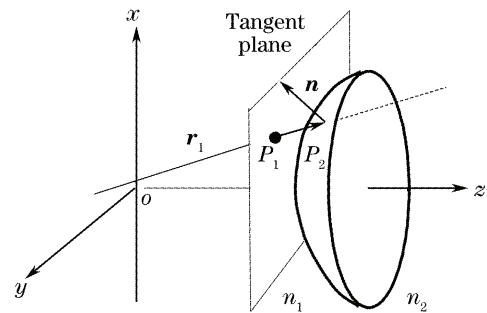


图 1 光线在曲面上的折射示意图

Fig. 1 Schematic diagram of refraction on curved surface

3.1 求入射点

设有一动点 P 自 P_1 点开始沿光线步进,步长为 s ,步进方向取决于 C 。为此,设置一个表示步进方向的标志量 F 。当 $C > 0$ 时,步进方向与光线方向一致, $F = 1$; 当 $C < 0$ 时,步进方向与光线方向相反, $F = -1$ 。设 $S = \overline{P_1 P} \cdot F$ 表示 P 点在光线上的位置,则 P 点步进 i 步, $S = i \cdot s \cdot F$, 计算 P 点到切平面的垂直距离 d , 并将 P 点的 x, y 坐标代入(6)式计算出相应的 z 值。若在第 k 次步进后,才有 $d \geq |z|$, 表明第 k 次步进时 P 点到达或穿过了折射面,

因此 P_2 位于光线上 $S_1 = (k-1) \cdot s \cdot F$ 和 $S_2 = k \cdot s \cdot F$ 区间。而后,采用二分法在该区间求解 P_2 点坐标,直至 $|d - |z|| < \epsilon$ (ϵ 为设定的求解精度)。

3.2 折射光线计算

设折射面在 P_2 点的单位法向量为 $\mathbf{n}_0 = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$, 入射和折射光线的单位向量分别为 $\mathbf{r}_1 = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ 和 $\mathbf{r}_2 = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$ 。由折射定律导出折射光线的方向余弦为

$$\begin{aligned} b_z &= K_1(a_z - u_z K_2) \pm u_z \sqrt{1 + K_1^2(K_2^2 - 1)}, \\ b_y &= K_1 a_y + (b_z - K_1 a_z) u_y / u_z, \\ b_x &= K_1 a_x + (b_z - K_1 a_z) u_x / u_z, \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $K_1 = n_1/n_2$, $K_2 = u_x a_x + u_y a_y + u_z a_z$ 。其中,求解 b_z 的公式中的加、减符号取决于折射面的弯曲方向:当 $C > 0$ 时,取负号; $C < 0$ 时,取正号。

4 非球面系统中高斯光束传输的数值计算实例

图 2 为一实际光学相干层析成像系统的探测头光路。由光纤射出的高斯光束经非球面镜 A 和 B 聚焦

于样品内的一定深度。光纤端头位于透镜 A 前焦点附近,并可沿 x 轴方向上下移动以实现对样品的横向扫描测量。透镜 A 和 B 安装在一个沿 z 轴可调的移动装置上,调节光纤与透镜组 AB 之间的距离 L_1 可改变光束的聚焦位置和光斑大小。探测头参量如下:透镜 A 中心厚 2.71 mm,折射率 1.720593;透镜 B 中心厚 5.36 mm,折射率 1.594122;两透镜间隔 22.76 mm。折射面参量见表 1。光纤参量:直径 $6 \mu\text{m}$,数值孔径 0.14;高斯光束参量:束腰半径 $w_0 = 3 \mu\text{m}$,中心波长 $0.91 \mu\text{m}$,谱宽 $0.049 \mu\text{m}$ 。

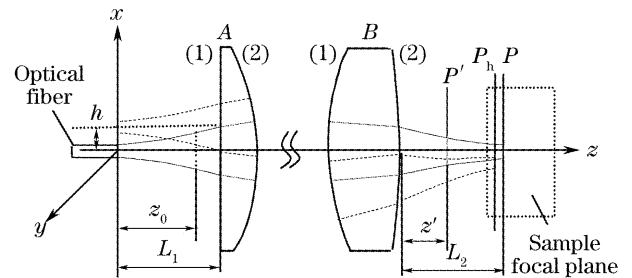


图 2 光学相干层析成像系统的探测头光路示意图
Fig. 2 Schematic diagram of optical coherence tomography system's probe optics

表 1 折射面参量表

Table 1 Parameters of refracting surfaces

	$C / 10^{-2}$	A_2	$A_4 / 10^{-3}$	$A_6 / 10^{-4}$	$A_8 / 10^{-5}$	$A_{10} / 10^{-6}$	$A_{12} / 10^{-7}$
A(1)	-1.155206	0	0	0	0	0	0
A(2)	-31.34256	0	2.09388	1.00939	3.1995	-2.99669	3.94127
B(1)	23.1481	-0.648067	0.165853	-0.0828138	0	0	0
B(2)	-6.8609	-87.228063	-0.915754	0.8643530	0	0	0

4.1 高斯光束传输的数值计算过程

1) 自束腰发射一个光子,根据 2.2 中的数学模型确定光子的初始发射位置和方向余弦。

2) 追迹光子经光学系统传输轨迹,同时计算光子的光程和能量损失(反射和材料吸收损失)。

3) 记录像方任意垂直光轴平面 P' 上的光子分布、光程分布和能量分布。具体方法如下:平面 P' 上的光分布即是平面 P' 与光束相交截面上的光分布。根据系统的轴对称性,当高斯光束中心线与光轴 z 重合,平面 P' 与光束相交为圆截面,见图 3 中实线圆;若两者不重合,例如光束沿 x 轴向上平移 h ,则平面 P' 与光束相交为非圆截面,见图 3 中虚线。图中 o' 是光束中心线与平面 P' 的交点, o' 在 xyz 坐标系中的坐标为 $(h', 0, L_1 + L_0 + z')$, L_0 为透镜 A 前表面与透镜 B 后表面的间隔。利用光线追迹确定截面的四个边界点 $P_1 \sim P_4$,由此得到截面的外接矩形 $abcd$ 。对 $abcd$ 进行网格划分。设沿 x 轴和 y 轴的细分数均为 N ,则网格元总数 N^2 。定义二

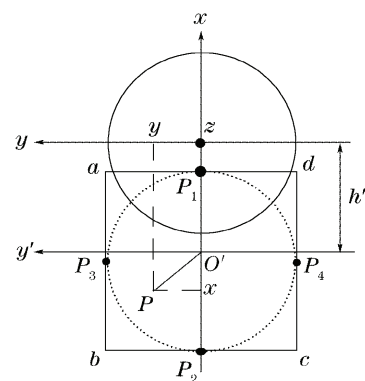


图 3 光束与垂直光轴平面相交截面示意图
Fig. 1 Schematic cross-section of beam with the vertical plane of optical axis

维数组 $A_1[N][N]$ 、 $A_2[N][N]$ 和 $A_3[N][N]$, 分别用于记录到达各网格元的光子数、各网格元接收光子的平均光程和光子能量总和。根据光子到达该光束截面的位置 $P(x, y)$ 判断光子属于哪一网格元。若该光子入射到第 (i, j) 网格元,则将其记入 $A_1[i][j]$, 其光程累加记入 $A_2[i][j]$, 能量累加记

入 $A_3[i][j]$, 其中 $i, j = 0, 1, \dots, N-1$ 。

4) 重复 1)~3), 直至发射完设定的光子数。

5) 计算各网格元上光子传播的方向余弦(以各网格元中心的光子传播方向来描述。光子发射方向的等概率选择决定了各网格元中心光子的传播方向也是沿两个方向等概率选择)。

6) 计算各网格元接收光子的平均光程 $A_2[i][j]/A_1[i][j]$ 。

4.2 计算结果及分析

下面的计算取 $L_1 = 2.95 \text{ mm}$, 发射光子数 2×10^8 , 在各计算位置的网格划分数为 201×201 。

1) 高斯光束未进入光学系统前, 在 $z_0 = 2.5 \text{ mm}$ 平面上的计算结果如图 4。光斑半径为 0.241 mm 。图 4(a) 上部曲线是截面上沿直径方向的相对光强分布, 下部的灰度图是整个截面上的相对光强分布, 完全符合二维高斯分布。图 4(b) 为 x 轴上各网格元的光子平均光程的相对分布, 其中边缘网格元相对中心网格元的最大光程差为 $11.51 \mu\text{m}$ 。而根据高斯光束波前曲率半径的理论公式 $R(z) = z\{1 + [\pi w_0^2 / (\lambda z)]^2\}$ 和 (1) 式, 计算的最大光程差为 $11.63 \mu\text{m}$ 。图 4(c) 为整个截面上平均光程的相对分布灰度图(放大绘制)。截面中心网格元的光子平均光程最小(图中最暗), 由中心向外光子平均光程逐渐增大。

2) $h=0$, 图 2 中 P' 平面 ($z' = 1.5 \text{ mm}$) 与光束相交截面上的计算结果示于图 5, 光斑半径为 0.125 mm , 各图意义同前。图 5(a) 表明截面上的光强分布完全符合二维高斯分布。图 5(b) 和图 5(c) 表明截面边缘网格元相对中心网格元的最大光程差为 $-4.21 \mu\text{m}$ 。截面中心网格元的光子平均光程最大(图中最亮)。

3) $h=0.5 \text{ mm}$, 光束与 P' 平面相交截面(参见图 3)的参量为: $P_1(-1.042, 0), P_2(-1.270, 0), P_3(0.117, -1.154), P_4(-0.117, -1.154), h' = -1.146 \text{ mm}$, 直线 P_3P_4 与 y' 轴的间距 0.008 mm 。

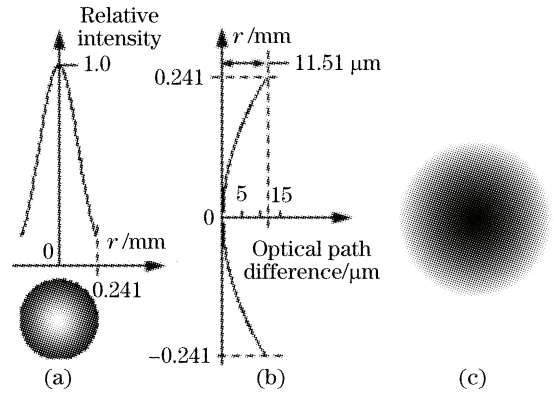


图 4 入射高斯光束的数值计算结果
Fig. 4 Numerical calculation results of incident Gaussian beam

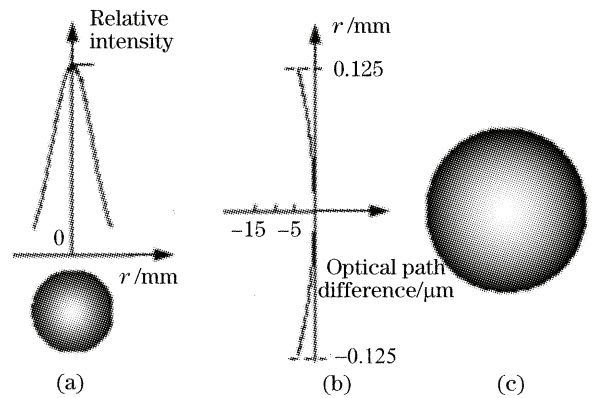


图 5 出射高斯光束的数值计算结果 ($h=0$)
Fig. 5 Numerical calculation results of exit Gaussian beam ($h=0$)

该截面上的光分布示于图 6。图 6(a) 为截面上相对光强分布的灰度图, 与 $h=0$ 时相比, 最大光强位置沿轴稍微上移。图 6(b) 为沿 y' 轴的相对光强分布曲线。曲线两端部的快速下降是由于 y' 轴与直线 P_3P_4 不重合, y' 轴上靠近外接矩形 $abcd$ 的网格元光强快速减弱。图 6(c) 为沿 x 轴的相对光强分布曲线。可看出最大光强位置向正 x 轴方向平移。图 6(d) 为截面上光子平均光程的相对分布灰度图。图 6(e) 为 y' 轴上各网格元的光子平均光程的相对分布。边缘网格元相对中心网格元的最大光程差为

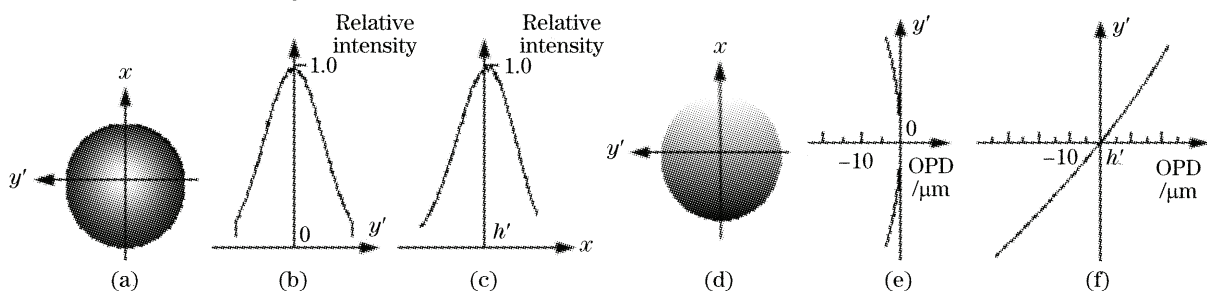


图 6 出射高斯光束的数值计算结果 ($h=0.5 \text{ mm}$)
Fig. 6 Numerically calculated results of exit Gaussian beam ($h=0.5 \text{ mm}$)

-3.85 μm 。图 6(f)为 x 轴上各网格元的光子平均光程的相对分布。最上部和最下部两边缘网格元相对中心网格元的光程差分别为 22.05 μm 和 -34.53 μm 。

5 结 论

从概率统计学的观点,“光束内光子传播方向沿单叶双曲面的两条直母线等概率选择”这一假设,不仅保证光子是沿直线传播,而且大量光子的“平均”传播方向与相应高斯光束的坡印廷矢量相同。对实际光学系统的计算结果表明,所建立的高斯光束光子传输模型可全面、准确地模拟高斯光束的传输特性。经测试,本文给出的非球面光路计算方法具有良好的计算精度与速度综合性能。而且本文的计算方法可推广到各种光学系统中高斯光束传输的数值计算。

致谢 本文是作者在芬兰奥卢大学做访问学者期间所从事的研究课题“光学相干层析成像系统分析与蒙特卡罗仿真”的部分内容,非常感谢 Risto Myllylä 教授的支持和帮助。

参 考 文 献

1 Gang Yao, Lihong V. Wang. Monte Carlo simulation of an

- optical coherence tomography signal in homogeneous turbid media [J]. *Phys. Med. Biol.*, 1999, **44**: 2307~2320
- 2 Ruikang K. Wang. Signal degradation by multiple scattering in optical coherence tomography of dense tissue; a Monte Carlo study towards optical clearing of biotissues [J]. *Phys. Med. Biol.*, 2002, **47**: 2281~2299
- 3 Cheng Shuying, Shen Hongyuan, Chen Meifeng. Research on the influence of refractive index on diffuse reflectance and absorptance in tissue by Monte Carlo method [J]. *Chin. J. Lasers*, 2004, **31**(2): 169~172
程树英,沈鸿元,陈美锋. 用蒙特卡罗法研究折射率对光在组织中的漫反射率和吸收比的影响 [J]. *中国激光*, 2004, **31**(2): 169~172
- 4 Derek J. Smithies, Tore Lindmo, Zhongping Chen *et al.*. Signal attenuation and localization in optical coherence tomography studied by Monte Carlo simulation [J]. *Phys. Med. Biol.*, 1998, **43**: 3025~3044
- 5 J. M. Schmitt, K. Ben-Letaief. Efficient Monte Carlo simulation of confocal microscopy in biological tissue [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1996, **A13**(5): 952~961
- 6 Wang Jiangang, Wang Guiying, Xu Zhizhan. Monte-Carlo simulations for light propagation in stratified scattering medium [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(3): 346~350
王建岗,王桂英,徐至展. 光在分层散射介质中传输行为的蒙特卡罗模拟研究 [J]. *光学学报*, 2000, **20**(3): 346~350
- 7 Zhou Bingkun, Gao Yizhi, Chen Tirong *et al.*. *Laser Principles* [M]. 4th edit., Beijing: National Defense Industry Press, 2000. 70~71
周炳琨,高以智,陈倜嵘等. *激光原理* [M]. 第四版. 北京: 国防工业出版社, 2000. 70~71
- 8 S. C. Black, A. D. Kennedy. Gaussian random number generators on CYBER-205 [J]. *Computer in Physics*, 1989, **3**(3): 59~68
- 9 Milton Larkin. *Lens Design* [M]. Third Edition, New York: Marcel Dekker Inc, 2001. 6~8