

文章编号: 0253-2239(2008)01-0012-05

# 平顶光束通过湍流大气传输的光谱特性

季小玲 张 涛 陈晓文 李晓庆 陈森会

(四川师范大学物理学院, 四川 成都 610068)

**摘要** 采用 Rytov 相位结构函数二次近似的方法, 推导出了平顶光束在湍流大气中的光谱传输方程, 详细研究了其光谱特性, 并给出了合理的物理解释。研究表明, 轴上点光谱为蓝移, 随着离轴距离的增大, 光谱由蓝移逐渐变为红移, 轴外点存在多阶光谱跃变现象。随着湍流的增强, 光谱位移量和光谱跃变量减小, 光谱跃变现象消失。特别分析了平顶光束与高斯-谢尔模型(GSM)光束通过湍流大气传输的光谱跃变之间存在的差异。

**关键词** 大气光学; 光谱特性; 二次近似法; 大气湍流; 平顶光束

**中图分类号** O436 **文献标识码** A

## Spectral Properties of Flat-Topped Beams Propagating through Atmospheric Turbulence

Ji Xiaoling Zhang Tao Chen Xiaowen Li Xiaoqing Chen Sunhuei

(Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu, Sichuan 610068, China)

**Abstract** The spectral propagation equation of flat-topped beams propagating through atmospheric turbulence is derived by using the quadratic approximation of the Rytov's phase structure function. The spectral properties are studied in detail, and reasonable physical explanations are also given. It is shown that the on-axis spectrum is blue-shifted, the off-axis spectrum becomes red-shifted, and multi-order spectral transition will appear with the increase of transverse coordinate. Furthermore, the spectral shift and the transition of the spectral shift decrease with the increase of turbulence, and the spectral transition gradually disappears when the turbulence is strong enough. Specially, the behavior of the spectral transition of flat-topped beams in turbulence is very different from that of Gauss-Schell-model (GSM) beams, and the difference is discussed.

**Key words** atmospheric optics; spectral property; quadratic approximation; atmospheric turbulence; flat-topped beam

## 1 引 言

违背定标定律的光源发出的部分空间相干光在传输过程中其光谱会发生变化, 这种现象称为相关诱导的光谱变化<sup>[1]</sup>。但是, 满足定标定律的部分空间相干光被光阑衍射时, 会出现光谱从红移突然跃变为蓝移的现象(即光谱开关), 这种现象称为衍射诱导的光谱变化<sup>[2]</sup>。另一方面, 激光束的大气传输在遥感、跟踪和远距离光通信等应用中有十分重要的意义。大量的理论和实验研究表明, 湍流会改变光束的传输性质并降低光束质量<sup>[3~6]</sup>。然而, 最近研究表明, 满足定标律的准均匀光通过湍流大气时其光谱不会发生变化<sup>[7]</sup>。我们进一步研究发现, 高斯-谢尔模型(GSM)光束在湍流大气中传输存在光

谱从红移突然跃变为更大红移的光谱跃迁现象<sup>[8,9]</sup>。此外, 由于某些实际应用需要光强为平顶分布的光束, 因此研究平顶光束的大气传输特性和光谱特性非常重要。本文详细研究了平顶光束通过湍流大气传输的光谱特性, 发现了一些有意义的结果, 例如平顶光束通过湍流大气传输也存在类似于衍射诱导的光谱从红移突然跃变为蓝移的现象, 这一特性与高斯-谢尔模型在湍流大气中传输的光谱特性大不相同。

## 2 光谱传输方程

根据 Yajun Li 提出的平顶光束模型<sup>[10]</sup>, 设在直角坐标系下  $z=0$  平面处平顶光束的交叉谱密度函

收稿日期: 2007-03-05; 收到修改稿日期: 2007-06-12

基金项目: 国家自然科学基金(60778048)资助课题。

作者简介: 季小玲(1963-), 女, 江苏常州人, 教授, 博士, 主要从事光束的传输与控制等方面的研究。

E-mail: jiXL100@163.com

数为

$$W^0(x'_1, x'_2, z=0, \omega) = S^0(\omega) \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \alpha_m \alpha_{m'} \exp\left[-\left(m p_m \frac{x'^2_1}{\omega_0^2} + m' p_{m'} \frac{x'^2_2}{\omega_0^2}\right)\right], \quad (1)$$

式中  $\omega$  为频率,  $S^0(\omega)$  为源光谱,  $\omega_0$  为对应高斯束腰宽度,  $M$  为平顶光束的阶数。当  $M=1$  时简化为高斯光束。并且

$$\alpha_t = (-1)^{t+1} \frac{M!}{t!(M-t)!}, \quad p_t = \sum_{t=1}^M \frac{\alpha_t}{t}. \quad (t = m, m') \quad (2)$$

根据广义惠更斯-菲涅耳原理, 平顶光束通过湍流大气传输在  $z$  平面处的交叉谱密度函数应满足<sup>[3]</sup>

$$W(x_1, x_2, z, \omega) = \frac{k}{2\pi z} \iint dx_1 dx_2 W^0(x'_1, x'_2, z=0, \omega) \times \exp\left\{\left(\frac{ik}{2z}\right)[(x'^2_1 - x'^2_2) - 2(x_1 x'_1 - x_2 x'_2) + (x_1^2 - x_2^2)]\right\} \langle \exp[\psi(x'_1, x_1) + \psi^*(x'_2, x_2)] \rangle, \quad (3)$$

式中波数  $k = \omega/c$  ( $c$  为真空中的光速),  $\psi(x', x)$  表示大气湍流对球面波影响的随机相位因子,  $\langle \cdot \rangle$  表示湍流大气统计系综平均。若采用 Rytov 相位结构函数, 并进行二次近似, 由文献[11, 12] 可知, 当  $x_1 = x_2$  时有

$$\langle \exp[\psi(x'_1, x_1) + \psi^*(x'_2, x_2)] \rangle \cong \exp[-(x'_1 - x'_2)^2 / \rho_0^2], \quad (4)$$

其中

$$\rho_0 = (0.545 C_n^2 k^2 z)^{-3/5}, \quad (5)$$

式中  $C_n^2$  是折射率结构常量<sup>[3]</sup>, 它表征湍流的强弱。

当  $x_1 = x_2 = x$  时, 将(1)式和(4)式代入(3)式, 经过积分运算后得到平顶光束在湍流大气中的光谱传输方程为

$$S(x, z, \omega) = W(x, x, z, \omega) = S^0(\omega) \frac{k}{2z} \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \frac{\alpha_m \alpha_{m'}}{\beta_1 \beta_2} \exp\left[-\frac{k^2 (m p_m + m' p_{m'}) x^2}{4z^2 \beta_1^2 \beta_2^2 \omega_0^2}\right], \quad (6)$$

式中

$$\beta_1^2 = \frac{m p_m}{\omega_0^2} + \frac{1}{\rho_0^2} - i \frac{k}{2z}, \quad (7)$$

$$\beta_2^2 = \frac{m' p_{m'}}{\omega_0^2} + \frac{1}{\rho_0^2} + i \frac{k}{2z} - \frac{1}{\beta_1^2 \rho_0^4}, \quad (8)$$

(6) 式是本文得到的主要解析公式。(6) 式表明, 平顶光束通过湍流大气传输其光谱由源光谱  $S^0(\omega)$ 、平顶光束的阶数  $M$ 、湍流折射率结构常数  $C_n^2$  和位置坐标  $(x, z)$  等因数共同确定。

当  $M=1$  时, (6) 式简化为高斯光束在湍流大气中的光谱传输方程

$$S(x, z, \omega) |_{Gs} = S^0(\omega) \frac{k}{2z \beta_1 |_{Gs} \beta_2 |_{Gs}} \times \exp\left[-\frac{k^2}{2z^2 \beta_1^2 |_{Gs} \beta_2^2 |_{Gs}} \frac{x^2}{\omega_0^2}\right], \quad (9)$$

式中

$$\beta_1^2 |_{Gs} = \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{1}{\rho_0^2} - i \frac{k}{2z}, \quad (10)$$

$$\beta_2^2 |_{Gs} = \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{1}{\rho_0^2} + i \frac{k}{2z} - \frac{1}{\beta_1^2 |_{Gs} \rho_0^4}. \quad (11)$$

当  $C_n^2 = 0$  时, (6) 式中不考虑大气湍流引起的相位因子, 得到平顶光束在自由空间中的光谱传输方程为

$$S(x, z, \omega) |_{free} = S^0(\omega) \frac{k}{2z} \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \frac{\alpha_m \alpha_{m'}}{\beta_1 |_{free} \beta_2 |_{free}} \times \exp\left[-\frac{k^2 (m p_m + m' p_{m'}) x^2}{4z^2 \beta_1^2 |_{free} \beta_2^2 |_{free}} \frac{x^2}{\omega_0^2}\right], \quad (12)$$

式中

$$\beta_1^2 |_{free} = \frac{m p_m}{\omega_0^2} - i \frac{k}{2z}, \quad (13)$$

$$\beta_2^2 |_{free} = \frac{m' p_{m'}}{\omega_0^2} + i \frac{k}{2z}. \quad (14)$$

### 3 数值计算结果以及分析

以(6)式为计算依据研究平顶光束通过湍流大气传输光谱特性的变化。设归一化源光谱  $S^0(\omega)$  为高斯型

$$S^0(\omega) = \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Gamma^2}\right], \quad (15)$$

式中  $\omega_0$  为中心频率,  $\Gamma$  为源光谱的带宽。

为了讨论方便, 采用归一化光谱

$$S(\omega) = S(x, z, \omega) / S_{\max}(x, z, \omega_{\max})$$

和相对光谱位移

$$\delta\omega/\omega_0 = (\omega_{\max} - \omega_0)/\omega_0,$$

其中  $S_{\max}(x, z, \omega_{\max})$  和  $\omega_{\max}$  分别为观察点  $(x, z)$  处的光谱最大值与其所对应的频率。数值计算参量为

$\omega_0 = 3.2 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ,  $\Gamma = 0.6 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ,  $w_0 = 0.03 \text{ m}$  和  $z = 10 \text{ km}$ 。

图 1 为不同湍流强度情况下轴上点归一化光谱  $S(\omega)$  曲线, 其中圆圈表示源光谱  $S^0(\omega)$ 。图 1 表明, 轴上点光谱为蓝移, 但是随着湍流的增强, 光谱蓝移量减小。例如, 当  $C_n^2 = 0, 3 \times 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$  和  $10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$  时, 有  $\delta\omega/\omega_0 = 0.04, 0.02$  和  $0$ 。图 2 为不同光束阶数情况下离轴点  $S(\omega)$  曲线。可以看出, 在自由空间中[图 2(a),  $C_n^2 = 0$ ]不同  $M$  的平顶光束的  $S(\omega)$  不相同, 在  $x/w_0 = 3$  处光谱为红移, 并且红移量随着  $M$  的增大而增大。例如, 当  $M = 1, 3$  和  $12$  时, 有  $\delta\omega/\omega_0 = -0.14, -0.18$  和  $-0.20$ 。但是, 在湍流大气中[图 2(b),  $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ ]不同  $M$  的平顶光

束的  $S(\omega)$  曲线均与源光谱  $S^0(\omega)$  曲线相接近, 即在湍流大气中  $M$  对光谱特性的影响减小。

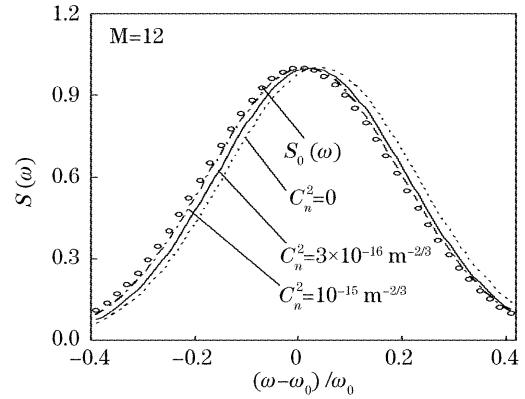


图 1 轴上点 ( $x/w_0 = 0$ ) 归一化光谱  $S(\omega)$  曲线  
Fig. 1 Normalized on-axis ( $x/w_0 = 0$ ) spectra  $S(\omega)$

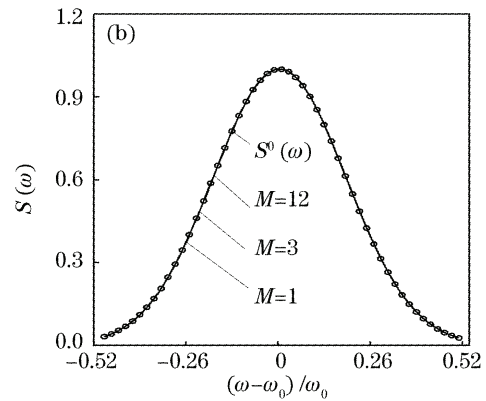
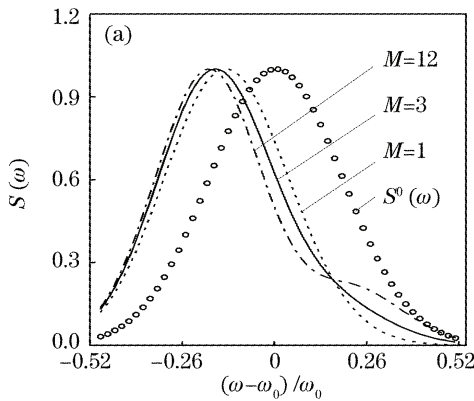


图 2 离轴点 ( $x/w_0 = 3$ ) 归一化光谱  $S(\omega)$  曲线

Fig. 2 Normalized off-axis ( $x/w_0 = 3$ ) spectra  $S(\omega)$

不同湍流强度情况下相对谱移  $\delta\omega/\omega_0$  随相对横向坐标  $x/w_0$  的变化曲线示于图 3。图 3 表明, 轴上点光谱为蓝移, 随离轴距离的增大, 光谱由蓝移逐渐变为红移。并且, 轴外点存在多阶光谱跃变现象, 发生光谱跃变(称为临界状态)的横向坐标用  $x_c/w_0$  表示。在自由空间中, 当  $x_c/w_0 = 3.5$  时第一阶光谱跃变由红移( $\delta\omega/\omega_0 = -0.254$ )突然跃变为蓝移

( $\delta\omega/\omega_0 = 0.15$ ), 当  $x_c/w_0 = 8.1$  时第二阶光谱跃变由红移( $\delta\omega/\omega_0 = -0.323$ )突然跃变为少许蓝移( $\delta\omega/\omega_0 = 0.007$ )。但是, 在湍流大气中, 例如当  $C_n^2 = 5 \times 10^{-17} \text{ m}^{-2/3}$  和  $10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$  时, 第二阶光谱跃变前后光谱均为红移, 并且是从红移突然跃变为更小的红移。随着湍流强度的继续增大, 例如当  $C_n^2 = 5 \times 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$  和  $10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$  时, 光谱跃变现象消失。此外, 光谱位移量和光谱跃变量均随着湍流的增强而减小。例如, 当  $C_n^2 = 0, 5 \times 10^{-17} \text{ m}^{-2/3}$  和  $10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$  时, 第一阶光谱跃变量  $\Delta(\delta\omega/\omega_0) = 0.4, 0.35$  和  $0.24$ , 而  $x_c/w_0$  变化不大。图 4 为不同光束阶数情况下  $\delta\omega/\omega_0$  随  $x/w_0$  的变化曲线。由图 4(a) 可知, 在自由空间中, 当  $M=1$  时, 无光谱跃变现象。 $M=5$  与  $M=12$  的平顶光束第一阶光谱的  $\Delta(\delta\omega/\omega_0)$  和  $x_c/w_0$ , 以及第二阶光谱的  $\Delta(\delta\omega/\omega_0)$  相差均不大, 但第二阶光谱的  $x_c/w_0$  相差很大。例如, 当  $M=5$  和  $12$  时, 第二阶光谱的  $x_c/w_0 = 8.1$  和  $10.2$ 。图 4(b) 表明, 在湍流大气中 ( $C_n^2 = 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$ ), 光谱跃变现象消失, 并且不同  $M$  值的平顶光束的光谱

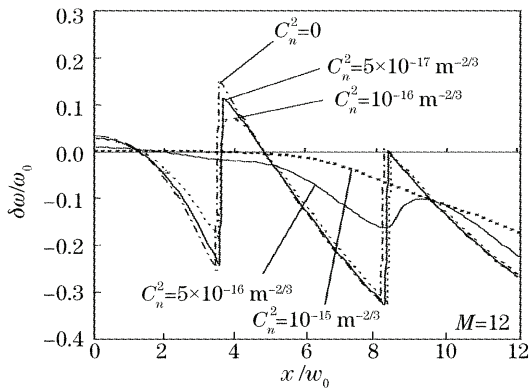


图 3 相对谱移  $\delta\omega/\omega_0$  随相对横向坐标  $x/w_0$  的变化曲线  
Fig. 3 Relative spectral shift  $\delta\omega/\omega_0$  versus relative transverse coordinate  $x/w_0$

移动量均减小。

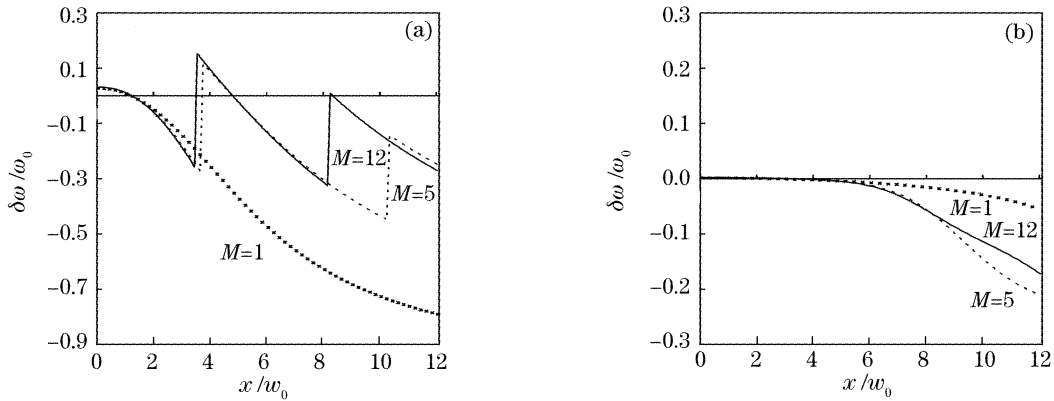


图 4 相对谱移  $\delta\omega/\omega_0$  随相对横向坐标  $x/w_0$  的变化曲线。(a)  $C_n^2=0$ , (b)  $C_n^2=10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$

Fig. 4 Relative spectral shift  $\delta\omega/\omega_0$  versus relative transverse coordinate  $x/w_0$ . (a)  $C_n^2=0$ , (b)  $C_n^2=10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$

#### 4 物理解释

由上节的计算和分析可知,平顶光束在湍流大气中传输离轴点存在光谱跃变,而湍流的增强可以使得光谱位移量减小和光谱跃变现象消失。(6)式可进一步改写为

$$S(x, z, \omega) = S^0(\omega)M(x, z, \omega), \quad (16)$$

式中

$$M(x, z, \omega) = \frac{k}{2z} \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \frac{\alpha_m \alpha_{m'}}{\beta_1 \beta_2} \times \exp\left[-\frac{k^2(m p_m + m' p_{m'})}{4z^2 \beta_1^2 \beta_2^2} \frac{x^2}{w_0^2}\right], \quad (17)$$

称为光谱调制函数,它描述了湍流对源光谱的调制。(16)式表明,平顶光束在湍流大气中传输其光谱会发生变化,它由源光谱和光谱调制函数共同决定,而光谱调制函数由折射率结构常量  $C_n^2$ 、平顶光束阶数  $M$  和观察点位置坐标  $(x, z)$  决定,而与脉冲宽度无关。

图 5 为与图 3 对应的第一阶光谱跃变( $C_n^2=5 \times 10^{-17} \text{ m}^{-2/3}$  情况)的物理解释。为了方便起见,采用归一化光谱调制函数  $M(\omega) = M(x, z, \omega)/M_{\max}$ , 其

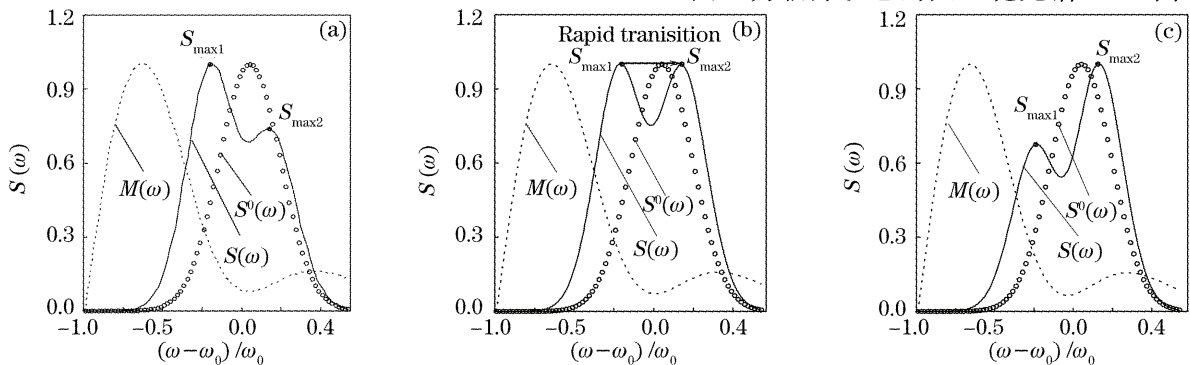


图 5 与图 3 对应的第一阶光谱跃变的物理解释,  $C_n^2=5 \times 10^{-17} \text{ m}^{-2/3}$ 。(a)  $x/w_0=3.43$ , (b)  $x/w_0=3.556$ , (c)  $x/w_0=3.72$

Fig. 5 Physical explanations of the first order spectral transition in Fig. 3 for  $C_n^2=5 \times 10^{-17} \text{ m}^{-2/3}$ .

(a)  $x/w_0=3.43$ , (b)  $x/w_0=3.556$ , (c)  $x/w_0=3.72$

中  $M_{\max}$  为观察点  $(x, z)$  处在所考虑频率范围内光谱调制函数的最大值。图 5 表明,  $M(\omega)$  曲线在频率小于中心频率  $\omega_0$  处存在一个极大值, 而  $S^0(\omega)$  曲线在  $\omega_0$  处也存在一个极大值。这样, 光谱  $S(\omega)$  就存在两个极大值, 这两个极大值相互竞争的结果就出现了光谱跃变。当  $x/w_0=3.43$  时[图 5(a)], 光谱分裂为两个极大值  $S_{\max 1}$  和  $S_{\max 2}$ , 并且  $S_{\max 1} > S_{\max 2}$ 。随着离轴距离增大,  $S_{\max 2}$  也随之增大, 特别是, 当  $x_c/w_0=3.556$  时[图 5(b)],  $S_{\max 1} = S_{\max 2}$  (临界状态), 这意味着光谱位移将有一个迅速的跃变发生。当  $x/w_0=3.72$  时[图 5(c)],  $S_{\max 1} < S_{\max 2}$ 。

图 6 为与图 1 对应的湍流对轴上点光谱移动影响的物理解释。图 6 表明, 当  $C_n^2=0$  时,  $M(\omega)$  随着  $\omega$  的增大而增大, 所以光谱蓝移; 随着湍流的增强,  $M(\omega)$  随  $\omega$  的增大而减小变缓, 则光谱蓝移量减小。当  $C_n^2=10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$  时,  $M(\omega)$  几乎不随  $\omega$  而变化, 因此光谱  $S(\omega)$  靠近源光谱  $S^{(0)}(\omega)$ 。同理, 可以对离轴点的光谱移动做物理解释。

图 7 为临界状态的归一化光谱  $S(\omega)$  曲线, 用于

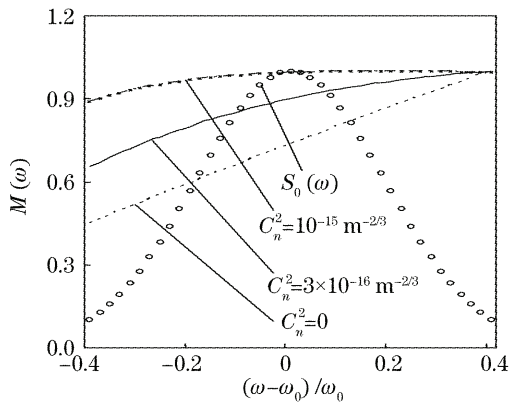


图 6 与图 1 对应的轴上点光谱移动的物理解释  
Fig. 6 Physical explanations of the on-axis spectral shift in Fig. 1

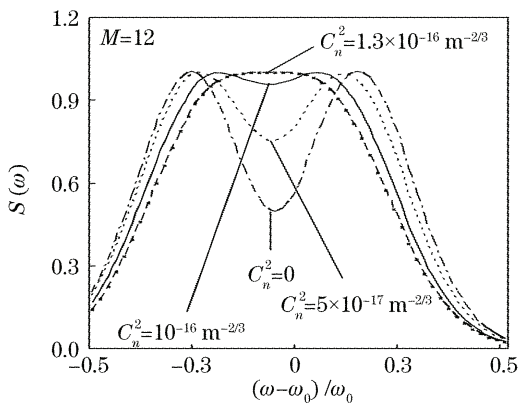


图 7 临界状态的归一化光谱  $S(\omega)$  曲线

Fig. 7 Normalized spectra  $S(\omega)$  at the critical position  
解释与图 3 对应的湍流使得第一阶光谱跃变消失的物理现象。图 7 表明,当  $C_n^2=0$  时,临界状态光谱凹陷最深,但随着湍流的增强光谱凹陷深度变浅,当  $C_n^2=1.3 \times 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$  时光谱凹陷深度为零,即谱跃变消失。

## 5 结 论

本文采用 Rytov 相位结构函数二次近似的方法,推导出了平顶光束在湍流大气中的光谱传输方程,详细研究了其光谱特性,并给出了合理的物理解释。高斯-谢尔模型光束通过湍流大气传输的光谱变化特性为本文研究结果的特例。研究表明,平顶光束通过湍流大气传输其光谱由源光谱、平顶光束的阶数、湍流折射率结构常量和位置坐标等因素共同确定。轴上点光谱为蓝移,随着离轴距离的增大,光谱由蓝移逐渐变为红移,轴外点存在多阶光谱跃变现象。并且,随着湍流的增强,光谱位移量和光谱跃变量减小、光谱跃变现象消失。值得指出的是,平顶光束与高斯-谢尔模型光束通过湍流大气传输的

光谱跃变之间存在很大的差异。平顶光束的第一阶光谱跃变是从红移突然跃变为蓝移,当平顶光束的阶数不是很大的情况下第二阶及其之后的光谱跃变均是从红移突然跃变为更小的红移;而高斯-谢尔模型光束仅存在一阶光谱跃变,并且是从红移突然跃变为更大红移的光谱跃迁<sup>[9,10]</sup>。造成这种差异的物理原因是平顶光束具有截断光束场分布特点,因此其光谱就具有衍射诱导的光谱跃变的特征。衍射诱导的光谱跃变为多阶光谱跃变,并且均是从红移突然跃变为蓝移<sup>[2]</sup>。但是,平顶光束的阶数的值总是有限的,这就使得其光谱特性又与衍射诱导的光谱跃变之间存在区别。此外,湍流的增强使得光谱跃变量减小。因此当平顶光束的阶数不是很大的情况下第二阶及其之后的光谱跃变不是从红移突然跃变为蓝移,而是从红移突然跃变为更小的红移。本文所得结论对激光大气传输光谱分析具有意义。

## 参 考 文 献

- 1 Emil Wolf. Invariance of the spectrum of light on propagation [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **56**(13): 1370~1372
- 2 Jixiong Pu, Huihua Zhang, Shojiro Nemoto. Spectral shifts and spectral switches of partially coherent light passing through an aperture[J]. *Opt. Commun.*, 1999, **162**(4): 57~63
- 3 Larry C. Andrews, Ronald L. Phillips. *Laser Beam Propagation through Random Media* [M]. Bellingham, Washington: SPIE Press, 1998
- 4 Greg Gbur, Emil Wolf. Spreading of partially coherent beams in random media[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2002, **19**(8): 1592~1598
- 5 Aristide Dogariu, Stefan Amaranade. Propagation of partially coherent beam; turbulence-induced degradation[J]. *Opt. Lett.*, 2003, **28**(1): 10~12
- 6 Xiaoling Ji, Baida Lü. Turbulence-induced quality degradation of partially coherent beams[J]. *Opt. Commun.*, 2005, **251**(4~6): 231~236
- 7 Hema Roychowdhury, Emil Wolf. Invariance of spectrum of light generated by a class of quasi-homogenous sources on propagation through turbulence[J]. *Opt. Commun.*, 2004, **241**(1~3): 11~15
- 8 Xiaoling Ji, Entao Zhang, Baida Lü. Changes in the spectrum of Gaussian Schell-model beams propagating through turbulent atmosphere[J]. *Opt. Commun.*, 2006, **259**(1~3): 1~6
- 9 Ji Xiaoling, Lü Baida. Effect of turbulence on the spectral shift of partially coherent light [J]. *Chin. J. Lasers*, 2005, **32**(4): 506~510 (in Chinese)  
季小玲,吕百达. 湍流对部分相干光光谱移动的影响[J]. *中国激光*, 2005, **32**(4): 506~510
- 10 Yajun Li. New expressions for flat-topped light beam[J]. *Opt. Commun.*, 2002, **206**(4~6): 225~234
- 11 S. C. H. Wang, M. A. Plonus. Optical beam propagation for a partially coherent source in the turbulent atmosphere [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**(9): 1297~1304
- 12 H. T. Yura. Mutual coherence function of a finite cross section optical beam propagating in a turbulent medium[J]. *Appl. Opt.*, 1972, **11**(6): 1399~1406