

利用傅里叶分析法测量光相位延迟器延迟量

赵廷生 李国华 彭捍东 周文平

(曲阜师范大学激光研究所, 山东 曲阜 273165)

摘要 为了精确测量光相位器的延迟量,提出了一种新的测量方法,并利用米勒矩阵理论分析了影响测量结果的因素。测量系统主要由起偏棱镜、标准四分之一波片、检偏棱镜、锁相放大器和微处理器构成。该方法利用最小二乘算法得到了最优傅里叶系数,利用锁相放大器的窄带滤波作用提高了信噪比,利用反馈环控制系统对步进电机的步进角进行了控制。误差分析表明这一方法的绝对误差小于 0.29° ,对四分之一石英波片相位延迟量进行了实验测试,结果表明其重复测量误差小于 0.40° 。

关键词 光学测量; 相位延迟; 傅里叶分析法; 锁相放大器; 反馈环

中图分类号 O439 **文献标识码** A

Phase Shift Measurement of a Retarder Based on Fourier Analysis

Zhao Tingsheng Li Guohua Peng Handong Zhou Wenping

(Institute of Laser, Qufu Normal University, Qufu, Shandong 273165, China)

Abstract In order to measure the retardation of phase retarders accurately, a new method is presented, the errors influencing test results are studied by Müller matrix theory. The measurement setup is composed of polarizing prism, normal quarter-wave plate, analyzing prism, lock-in amplifier and microprocessor. The best Fourier coefficients of the signal are obtained by the least squares method. By the band-limited functions of the lock-in amplifier, the signal-to-noise ratio is improved. A high-accuracy step motor is used to control the rotation angle by the feedback loop system. The theoretical analysis of error proves that the absolute error is less than 0.29° . The retardation of a normal quarter-wave quartz plate is measured with repetitive error less than 0.40° .

Key words optical measurement; phase retardation; Fourier analysis; lock-in amplifier; feedback loop

1 引言

光学相位延迟器和光学补偿器是光学调制系统中的重要器件,它已成为激光技术和偏光应用中重要的光学器件。相位延迟器的延迟精度是标志相位延迟器优劣的最重要的技术参量,因此对相位延迟量的精确测量一直受到光学工作者的关注。当前国内外研究相位延迟量测量方法有许多^[1~7]。相位延迟量的高精度测量仍是当前的一个热点问题,有重要的现实意义。

塞拿蒙补偿器(由一个四分之一波片和转动的检偏器组成)曾被用来测量诸如电光晶体这样的双折射材料的光相位延迟量,高宏等^[7,8]对这一方法进行了深入探索和改进并在很多精密仪器中使用了

塞拿蒙补偿器。本文利用矩阵理论分析了影响测量结果的种种因素,借助高消光比测试原理减小了各个器件的安装误差,提高了信噪比,优化了傅里叶系数,设计了测量光相位延迟器延迟量的新系统并进行了实验。

2 测量原理

这套测试系统包括待测四分之一石英波片,双面蒸镀了减反膜的标准四分之一云母波片、日本滨松光电子公司生产的 R7378 双碱阴极光电倍增管、美国 Stanford Research Systems 公司的 SR850 锁相放大器和 SR540 斩光器,及高消光比测试软件系统。规定水平方向为 x 方向,竖直方向为 y 方向,光束沿 z 方向

收稿日期: 2007-03-16; 收到修改稿日期: 2007-06-14

作者简介: 赵廷生(1973—),男,山东茌平人,硕士研究生,主要从事偏光物理学及偏光器件设计等方面的研究。

E-mail: zts-123@163.com

导师简介: 李国华(1937—),男,山东乳山人,博士生导师,主要从事激光偏光工程方面的研究。

E-mail: ghli@163169.net

传播。起偏棱镜的光轴沿 x 方向,待测样品波片的快轴与 x 轴正方向呈 $\pm 45^\circ$,标准四分之一云母波片的快轴沿 y 轴方向。各个元件的主轴方位如图 1 所示。检偏棱镜被安装在配有的反馈环控制系统步进电机上,令其从 y 轴逆时针转起,设检偏棱镜转动时其光轴与 y 正方向成 θ 角,伴随着转动出射光强被调制,然后传给光电倍增管再送入锁相放大器的信号通道。

选频放大器对混有噪声的调制信号进行选频放大和窄带滤波,使大量白噪声不能通过。来自信号通道的信号与来自参考通道的信号在相敏检波器中混频,经低通滤波器后得到与输入信号幅值成正比的直流输出分量。最后由微机将电信号进行转换,并利用最小二乘算法对测量结果进行数值分析得到波片的光相位延迟量。其测量原理如图 2 所示。

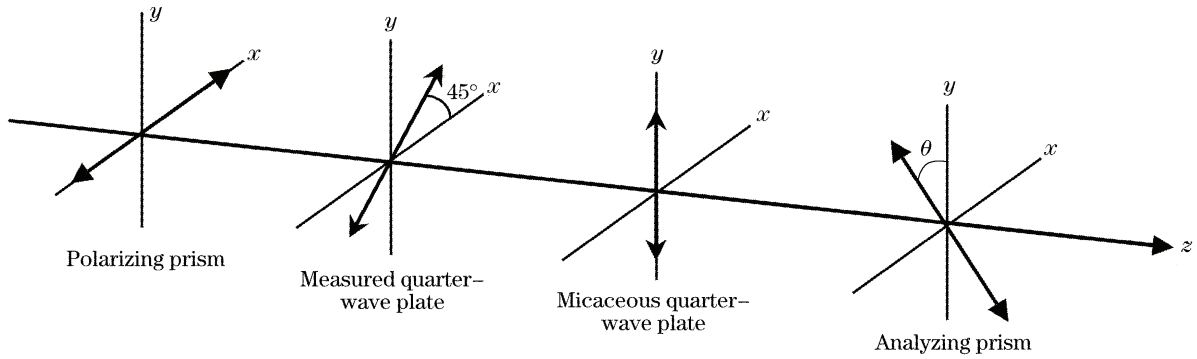


图 1 器件的主轴方位

Fig. 1 Principal axis direction of the devices

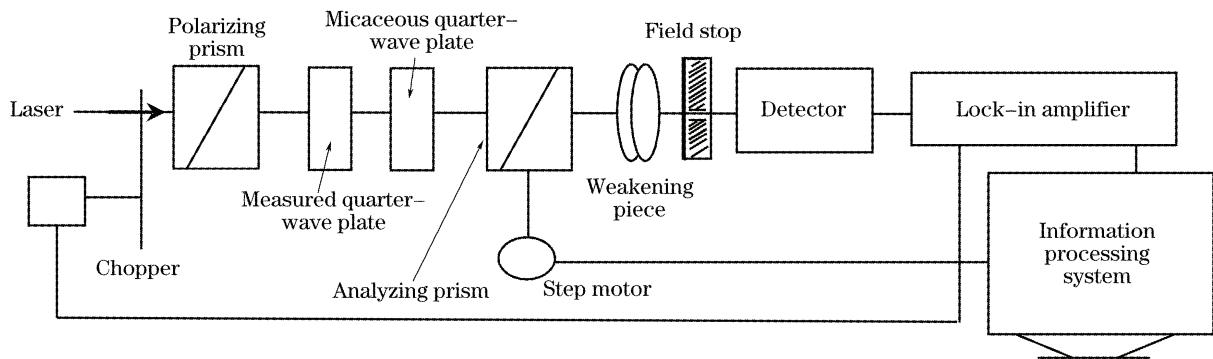


图 2 测量相位延迟量的实验装置

Fig. 2 Experimental setup to measure the phase shift

起偏棱镜的米勒矩阵为

$$P_x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

待测样品波片的米勒矩阵为

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中 φ 为待测样品的光相位延迟量;标准四分之一云母波片的米勒矩阵为

$$Q_{45^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

实验中让检偏棱镜的光轴从 y 轴开始转起,这是因为 y 轴是消光位置易于精确确定^[9],此时检偏棱镜的米勒矩阵为

$$P_\theta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ -\cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

激光束经过起偏棱镜后的斯托克斯矢量为

$$S_1 = \frac{I_0}{2} [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T, \quad (5)$$

式中 I_0 为光源入射光强可知入射到探测器的光束的斯托克斯矢量为

$$S_{out} = GP_\theta Q_{45^\circ} W S_1, \quad (6)$$

式中 G 为系统增益系数。不考虑外界干扰和系统噪声(6)式可化为

$$\mathbf{S}_{\text{out}} = \frac{GI_0}{4} (1 - \cos 2\theta \cos \varphi - \sin 2\theta \sin \varphi) \times [1 \quad -\cos 2\theta \quad -\sin 2\theta \quad 0]^T, \quad (7)$$

显然进入探测器的光强的有限项傅里叶级数为

$$I_{(2\theta)} = \frac{GI_0}{4} - \frac{GI_0}{4} \cos 2\theta \cos \varphi - \frac{GI_0}{4} \sin 2\theta \sin \varphi. \quad (8)$$

从傅里叶分析的角度观察(8)式可知,若不考虑外界干扰和系统噪声, $I_{(2\theta)}$ 仅包含零频项和基频项[这里 $I_{(2\theta)}$ 是随 2θ 变化的,将 2θ 看作了一个整体变量^[6]].但是由于外界干扰和系统噪声,实际光强可以写成傅里叶级数^[7]

$$I'_{(2\theta)} = a_0 + \sum_{t=1}^{\infty} a_t \cos 2t\theta + \sum_{t=1}^{\infty} b_t \sin 2t\theta, \quad (9)$$

对比(8)式和(9)式可以发现, $t \geq 2$ 的高次谐波项代表了外界干扰和系统噪声。为了排除干扰和噪声信号,通过合理调整斩光器和锁相放大器,利用锁相放大器的选频放大器和低通滤波器将噪声信号滤除。滤波后得到的傅里叶级数将为

$$I''_{(2\theta)} = a_0 + a_1 \cos 2\theta + b_1 \sin 2\theta. \quad (10)$$

对比(8)式看出

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right). \quad (11)$$

由于与斩光器同频的噪声仍能通过锁相放大器,测量中也还存在着随机测量误差,所以减少噪声源及获得到最优的傅里叶级数项系数 a_1 、 b_1 仍是提高测量精度的关键^[10]。

本文利用了最小二乘算法降低了随机误差的影响。设检偏器旋转一个周期有 N 个调制点,将 N 个光强值分别代入(10)式得到 N 个方程,其中 3 个傅里叶系数是未知数。只要 N 大于 3 就可得到一个线性超定方程组,利用最小二乘算法对此方程组进行求解得到最优傅里叶系数 a_1 和 b_1 。这样,进一步减小了随机误差和噪声对测量结果的影响,提高了测试精度。因为最小二乘算法需要测得 N 个不同 θ 处的 N 个光强采样值 $I''_{(2\theta)}$,所以各调制点上的光强 $I''_{(2\theta)}$ 测量精度和步进电机的转角精度 θ 均是影响光相位 φ 测量精度的因素。

3 误差分析

3.1 标准四分之一云母波片相位延迟误差

设标准四分之一云母波片的相位延迟误差为 ϵ_1 (一般波片光相位延迟误差在 1.7° 左右,而这种高精度波片是在众多解理云母波片中挑选出的,其误差约在 1°),则此波片的延迟量为 $90^\circ - \epsilon_1$;由此引起的测量误差为 $\Delta\varphi_1$ 。因四分之一云母波片的快轴与 y 轴方向重合,其米勒矩阵将变为

$$\mathbf{Q}'_{45^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \epsilon_1 & \sin \epsilon_1 \\ 0 & 0 & -\sin \epsilon_1 & \cos \epsilon_1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

以 \mathbf{Q}'_{45° 代替 \mathbf{Q}_{45° 带入(6)式可得

$$I_{(2\theta)} = \frac{GI_0}{4} - \frac{GI_0}{4} \cos 2\theta \cos \varphi - \frac{GI_0}{4} \sin 2\theta \sin \varphi \cos \epsilon_1. \quad (13)$$

对比(10)式,发现

$$\begin{cases} a_1 = \frac{GI_0}{4} \cos 2\theta, \\ b_1 = \frac{GI_0}{4} \sin 2\theta \cos \epsilon_1, \end{cases} \quad (14)$$

则

$$\Delta\varphi_1 = \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) - \varphi = \arctan\left(\frac{\sin \varphi \cos \epsilon_1}{\cos \varphi}\right) - \varphi. \quad (15)$$

将 $\cos \epsilon_1$ 作级数展开并保留到前两个级数项,得

$$\Delta\varphi_1 \approx \tan \Delta\varphi_1 = -\frac{\epsilon_1^2}{2!} \frac{\tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}. \quad (16)$$

对(16)式求一阶导数后发现当 $\tan \varphi = 1$ 时, $\Delta\varphi_1$ 存在极大值 $\epsilon_1^2/4$ 。 ϵ_1 取 1° 可得 $\Delta\varphi_1 \leq 0.25^\circ$ 。

3.2 标准四分之一云母波片的安装误差

标准四分之一云母波片的快轴应与 x 轴成 90° 夹角,由于存在安装误差 ϵ_2 ,光轴与 x 轴的夹角变为 $90^\circ - \epsilon_2$,由此导致测量误差设为 $\Delta\varphi_2$ 。此时,标准四分之一云母波片的米勒矩阵变为

$$\mathbf{Q}''_{45^\circ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\epsilon_2) & \sin(2\epsilon_2)\cos(2\epsilon_2) & \sin(2\epsilon_2) \\ 0 & \sin(2\epsilon_2)\cos(2\epsilon_2) & \sin^2(2\epsilon_2) & \cos(2\epsilon_2) \\ 0 & \sin(2\epsilon_2) & -\cos(2\epsilon_2) & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

将 \mathbf{Q}''_{45° 其替换 \mathbf{Q}_{45° 带入(6)式得

$$I_{(2\theta)} = \frac{GI_0}{4} - \frac{GI_0}{4} \cos(2\theta) [\cos \varphi \cos^2(2\varepsilon_2) + \sin \varphi \sin(2\varepsilon_2)] - \frac{GI_0}{4} \sin(2\theta) [\cos \varphi \sin(2\varepsilon_2) \cos(2\varepsilon_2) + \sin \varphi \cos(2\varepsilon_2)]. \quad (18)$$

当 $\tan \varphi$ 为 0 时, $\Delta\varphi_2$ 存在极大值 $2\varepsilon_2$ 。通常 ε_2 由安装波片的转盘最小刻度决定,能精确到 0.25° ,所以最大误差为 0.5° 。但可以减小此安装误差:不装入待测波片使系统空测,不应得到波片的光相位延迟量 $\Delta\varphi'$,实际测量中得到的光相位延迟量主要是由 ε_2 引起的。具体推导是将(17)式代入

$$\mathbf{S}_{\text{out}} = \mathbf{G}\mathbf{P}\mathbf{Q}'_{45^\circ}\mathbf{S}_1, \quad (19)$$

可得新的傅里叶级数

$$I_{(2\theta)} = \frac{GI_0}{4} - \frac{GI_0}{4} \cos(2\theta) \cos^2(2\varepsilon_2) - \frac{GI_0}{4} \sin(2\theta) \sin(2\varepsilon_2) \cos(2\varepsilon_2), \quad (20)$$

将其傅里叶系数作比求反正切得

$$\Delta\varphi' = \arctan\left[\frac{\sin(2\varepsilon_2)}{\cos(2\varepsilon_2)}\right] = 2\varepsilon_2. \quad (21)$$

因此,可以通过微调该波片的方位角使 $\Delta\varphi'$ 最小来达到使 ε_2 最小。实验操作中可以使 $\Delta\varphi_2 \approx 0.05^\circ$ 。

3.3 检偏棱镜消光方位的确定误差

检偏棱镜开始转动时其光轴应在 y 方向,因安装误差 ε_3 , θ 变为 $\theta + \varepsilon_3$ 。由此引入的测量误差设为 $\Delta\varphi_3$ 。将 $\theta + \varepsilon_3$ 代替(4)式中的 θ ,得到新矩阵 \mathbf{P}'_θ 后代入(6)式可得

$$I_{(2\theta)} = \frac{GI_0}{4} - \frac{GI_0}{4} \cos(2\theta) \cos(\varphi - 2\varepsilon_3) - \frac{GI_0}{4} \sin(2\theta) \sin(\varphi - 2\varepsilon_3). \quad (22)$$

显见 $\Delta\varphi_3$ 为 $2\varepsilon_3$ 。由于该系统所使用的偏光棱镜的消光比达 10^{-9} ,利用高消光比测试原理进行消光方位的定位^[11], ε_3 可近似为步进电机的最小步进角 0.025° ,所以 $\Delta\varphi_3 \leq 0.05^\circ$ 。

3.4 待测波片的安装误差

待测样品波片的光轴 x 应与轴成 45° ,由于存在安装误差 ε_4 ,变为 $45^\circ - \varepsilon_4$,导致测量误差为 $\Delta\varphi_4$ 。发

现当 $\tan \varphi$ 等于 1 时 $\Delta\varphi_4$ 取得极大值 $2\varepsilon_4$ 。 ε_4 能精确到 0.25° ,于是 $\Delta\varphi_4 \leq 0.13^\circ$ 。

综合各种误差因素,若以均方差作为该方法测量精度的评价标准,则测量精度为

$$\Delta\varphi = \pm \sqrt{\Delta\varphi_1^2 + \Delta\varphi_2^2 + \Delta\varphi_3^2 + \Delta\varphi_4^2} = 0.29^\circ. \quad (23)$$

4 实验测试

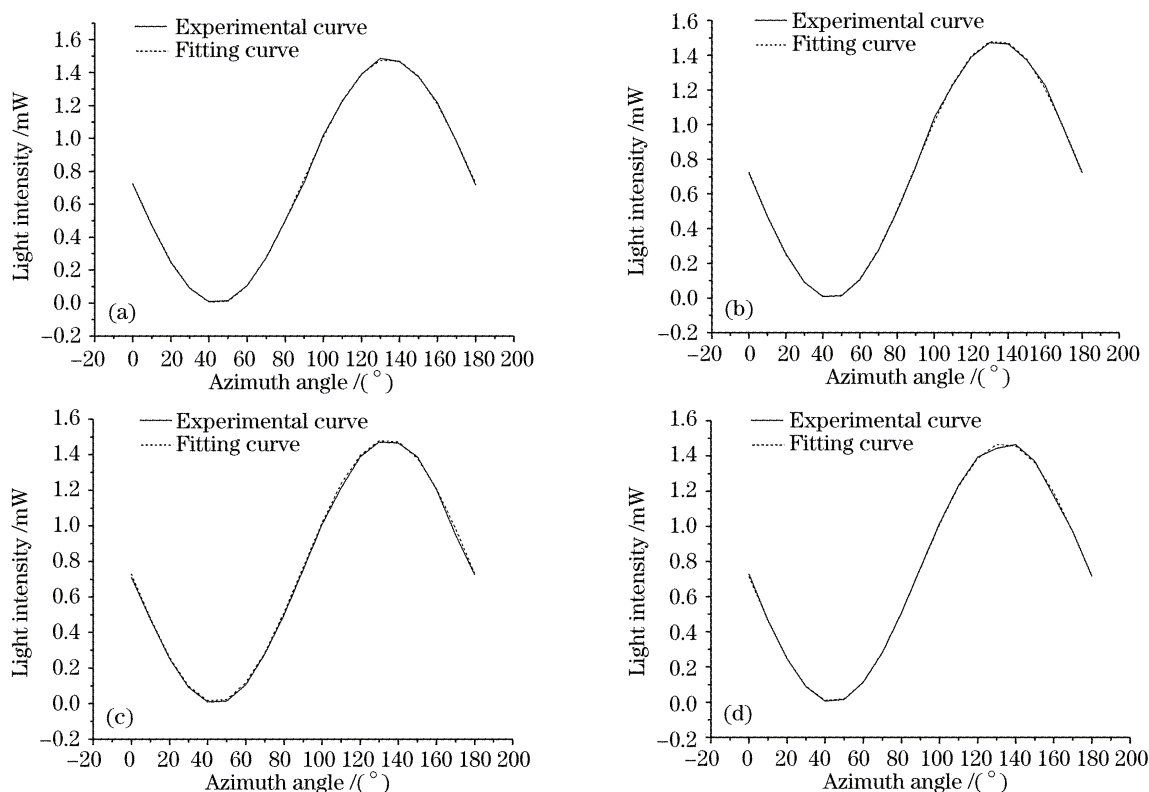
因为石英多级波片的相位延迟量对测试光的入射波长特别敏感^[5],所以实验选用的光源与光电调制法制备时的光源相同,二者均是波长 632.8 nm 的 He-Ne 激光器。测试是在室温为 25°C 的实验室内进行的。第一步,分别打开激光器、斩光器、锁相放大器的电源。由于使用了光电倍增管,锁相放大器采用高阻抗输入。考虑到本测试系统探测器响应时间小于 5 ms ,所以斩光器的斩光频率选用 190 Hz 左右,根据测试程序中设定的 $0\sim 190 \text{ mV}$ 的测量范围,选取锁相放大器的放大倍数为 100,灵敏度为 1000 mV ,预热 10 min 。调整起偏棱镜,使其光轴平行于测试平台;第二步,打开步进电机的电源,设定步进电机的步进角为 0.025° ,利用高消光比测试软件系统驱动步进电机转动,确定检偏棱镜的消光位置。使消光比达到最大值,则此时检偏棱镜就较好地处于消光位置;第三步,利用带刻度的转盘安装标准四分之一云母波片,通过反复微调标准四分之一云母的快轴方位,使测到的相位延迟量 $\Delta\varphi'$ 最小。再利用软件命令步进电机退回到消光位置;第四步,利用带刻度的高精度转盘安装经过 X 射线仪标定过光轴的待测波片,重新设定步进电机的步进角,启动步进电机开始测量。重复测量 4 次的结果如图 3 所示,其中实线为测量曲线,虚线为利用最小二乘算法得出的拟合曲线。得出的拟合函数表达式分别为

$$I''_{(2\theta)} = 0.74 - 0.0145 \cos(2\theta) - 0.7433 \sin(2\theta), \quad (24a)$$

$$I''_{(2\theta)} = 0.7431 - 0.0177 \cos(2\theta) - 0.7425 \sin(2\theta), \quad (24b)$$

$$I''_{(2\theta)} = 0.7382 - 0.017 \cos(2\theta) - 0.7388 \sin(2\theta), \quad (24c)$$

$$I''_{(2\theta)} = 0.7381 - 0.0231 \cos(2\theta) - 0.7346 \sin(2\theta). \quad (24d)$$

图3 光强 $I''_{(2\theta)}$ 随方位角 θ 变化的曲线Fig. 3 Curve of $I''_{(2\theta)}$ with the change of azimuth angle θ

利用(11)式可以得出4次的测量结果,取平均值得波片的相位延迟量为 88.60° ,四次测量最大重复误差小于 0.40° 。实验发现光线垂直入射待测波片的精度是影响多级波片重复测量误差的重要因素。

5 结 论

提出了利用傅里叶分析法测量光相位延迟量的方法,通过减小器件安装误差,使用锁相放大器,提高步进电机转角精度,优化傅里叶系数得到了波片相位延迟量。利用米勒矩阵理论进行了理论推导和误差分析。误差分析表明该系统对任意延迟量的波片其测量精度为 0.29° 。对多级四分之一石英波片的实验结果表明其重复测量最大误差为 0.40° ,达到了信噪比高、测量精度高的目的。

参 考 文 献

- 1 Yu-Lung Lo, Jing-Fung Lin, Sen-Yung Lee. Polariscope for simultaneous measurement of the principal axis and the phase retardation by use of two phase-locked extractions[J]. *Appl. Opt.*, 2004, **43**(34): 6248~6254
- 2 Cheng Xiaotian, Li Yinzhu, Liu Cheng *et al.*. Method for measuring the retardation for a wave plate[J]. *Chin. J. Lasers*, 2003, **30**(7): 651~654
程笑天,李银柱,刘 诚 等. 波片位相延迟的测量方法[J]. 中国激光, 2003, **30**(7): 651~654
- 3 Zhao Qiuling, Wu Fuquan. Optical phase retardation measurement by normalized polarizing modulation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(3): 360~362

- 4 赵秋玲,吴福全. 光相位延迟量的归一化偏振调制测量[J]. 光学学报, 2002, **22**(3): 360~362
- 5 Hao Dianzhong, Li Guohua, Wu Fuquan. Intelligentized measurement of optical phase retardation[J]. *Chin. J. Lasers*, 2005, **32**(10): 1411~1414
郝殿中,李国华,吴福全. 光相位延迟器延迟量的智能化测量[J]. 中国激光, 2005, **32**(10): 1411~1414
- 6 Zhao Pei, Wu Fuquan, Hao Dianzhong *et al.*. Measurement of the delay of the quarter-wave plate by phase-modulated ellipsometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(3): 379~382
赵 培,吴福全,郝殿中 等. 1/4 波片延迟量的相位调制椭圆偏测量法[J]. 光学学报, 2006, **26**(3): 379~382
- 7 Xu Wengdong, Li Xishan. A new method for measuring phase delay of wave plate[J]. *Acta Optica Sinica*, 1994, **14**(10): 1096~1101
徐文东,李锡善. 波片相位延迟量精密测量新方法[J]. 光学学报, 1994, **14**(10): 1096~1101
- 8 Gao Hong, Li Qingxiang, Xue Shifu *et al.*. Principles and error analysis of phase shifted laser polarimeter [J]. *Chin. J. Scientific Instrument*, 1992, **13**: 240~245
高 宏,李庆祥,薛实福 等. 移相式激光偏振仪的原理及误差分析[J]. 仪器仪表学报, 1992, **13**: 240~245
- 9 Li Jingzhen, Su Shixue, Zhao Junmin *et al.*. *Optics Handbook* [M]. Xi'an: Shaanxi Science and Technology Press, 1984. 568~569
李景镇,苏世学,赵俊民 等. 光学手册[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 1984. 584~592
- 10 Soe-Mie F. Nee. Depolarization and principal Mueller matrix measured by null ellipsometry [J]. *Appl. Opt.*, 2001, **40**: 4933~4939
- 11 Mircea Mujat, Aristide Dogariu. Real-time measurement of the polarization transfer function[J]. *Appl. Opt.*, 2001, **40**: 34~44
- 12 Wang Zhaobing, Li Guohua, Lu Shulong *et al.*. Experimental study of the extinction ratio auto-measuring system[J]. *Chin. J. Lasers*, 2000, **A27**(5): 415~418
王召兵,李国华,陆书龙 等. 消光比自动测试系统的试验研究[J]. 中国激光, 2000, **A27**(5): 415~418