

文章编号: 0253-2239(2008)01-0001-06

# 相位不连续点数目随湍流强度的变化

葛筱璐<sup>1, 2</sup> 范承玉<sup>1</sup> 王英俭<sup>1</sup>

<sup>1</sup>中国科学院安徽光学精密机械研究所大气光学中心, 安徽 合肥 230031  
<sup>2</sup>山东理工大学物理与光电信息技术学院, 山东 淄博 255049

**摘要** 激光在湍流大气中传输时,若光束波前中出现相位不连续点,自适应光学的校正能力将明显降低,利用 4 维程序计算了激光在大气中传输时产生的相位不连续点的数目。通过选取不同的相位屏数、计算网格和网格间距,得到了畸变光场中产生的相位不连续点的数目随湍流强度变化的过程,即:相位不连续点的数目随湍流的增强有一个从无到有,从缓慢增加到近似线性的急剧增加,而后又缓慢增加,最后趋于饱和的变化过程。另外,在不同的传输条件下,相位不连续点的数目及其变化存在很大差异。

**关键词** 大气光学; 相位不连续点; 数值模拟; 湍流效应

**中图分类号** TN012 **文献标识码** A

## Variation of-Phase Branch Point Number with Turbulence Strength in Laser Propagation through Atmosphere

Ge Xiaolu<sup>1,2</sup> Fan Chengyu<sup>1</sup> Wang Yingjian<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Center for Atmospheric Optics, Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, the Chinese Academy of Sciences, Hefei, Anhui 230031, China  
<sup>2</sup> School of Physics and Optoelectronic Information Technology, Shandong University of Technology, Zibo, Shandong 255049, China

**Abstract** When branch points are present in laser beam wavefront during the propagation in turbulence, the adaptive-optics system for atmosphere turbulence compensation will be degraded greatly. The number of branch points was computed by four-dimensional code. By choosing different phase screen number, grid size and grid step, the variation of branch point number with turbulence strength in distorted optical fields was emulated. The result indicates that branch points cannot be detected in the region of weak turbulence. In the intermediate region between the weak and the strong turbulences, the branch points begin to appear, and the number of branch points grows rapidly at the outset of this region, almost linearly. When the turbulence strength continues growing, the rapid growth of the branch point number is replaced by a slower but nonlinear increase. In the end, the branch point number reaches a saturation state. In addition, the branch point number and its evolution are different in different propagation conditions.

**Key words** atmospheric optics; phase branch point; numerical simulation; turbulence effect

## 1 引 言

激光在大气中传输时,大气湍流导致的畸变光场中会出现相位不连续点,畸变光波的相位包括两部分:一部分为连续相位,另一部分为不连续相位,后者将影响到激光大气传输湍流效应及其自适应光

学校正系统<sup>[1]</sup>。研究激光大气传输相位不连续性问题的认识,不仅可以提高对激光大气传输强湍流效应问题的认识,而且有助于推动自适应光学技术的进一步发展,使之应用于强湍流效应情况下的激光大气传输,提高自适应光学对于强湍流效应的校正能力。

收稿日期: 2007-01-29; 收到修改稿日期: 2007-07-02

基金项目: 国家自然科学基金(10574127)和中国科学院合肥物质科学研究院物质计算中心资助课题。

作者简介: 葛筱璐(1979—),女,山东枣庄人,助教,硕士研究生,主要从事激光大气传输强湍流效应的物理及数值模拟等方面的研究。E-mail: xlge@sdu.edu.cn

导师简介: 范承玉(1965—),男,安徽合肥人,研究员,博士,主要从事光波大气传播及其自适应光学校正等方面的研究。E-mail: cyfan@aiofm.ac.cn

当光波在大气中传输时,由于湍流介质的作用,光波产生衍射。当这些衍射波传输到远处时,就会产生相长或相消干涉,在完全相消干涉的地方,光波的振幅为零。在振幅为零处,光波的相位存在  $2\pi$  不确定性,此点就称之为相位不连续点<sup>[2~6]</sup>。近年来,激光大气传输中的相位不连续性问题得到了广泛关注<sup>[1~10]</sup>,其中包括对畸变光场中出现的相位不连续点数密度的研究<sup>[7~9]</sup>。Valerii V. Voitsekhovich 等<sup>[8]</sup>研究了畸变光场中相位不连续点数密度与大气湍流和传输条件的关系,通过理论分析和数值模拟得到了一个表述畸变光场中相位不连续点数密度的经验公式。由于公式中用到了对数振幅的导数方差,该变量只能通过模拟计算获得,实际大气传输场中不可能对其进行测量,所以不能通过实验来验证。范承玉<sup>[9]</sup>通过模拟计算不同大气传输条件下不同传输光波长的畸变光场中出现的相位不连续点数密度,同时结合可以实测的大气相干长度和 Rytov 方差等参量对计算结果进行分析,得到了一个包含这些参量的描述相位不连续点数密度的统一变量。但是,到目前为止,关于相位不连续点数目与大气湍流

和传输条件关系的理论分析和数值模拟中还没有相位不连续点数目趋于饱和现象的报道。本文利用激光大气传输 4 维程序<sup>[11]</sup>对畸变光场中出现的相位不连续点数目进行模拟计算发现,当湍流很强时,畸变光场中相位不连续点数目会出现趋于饱和的现象。

## 2 理论分析<sup>[12]</sup>

激光在大气中传输时,其在采样区域内的畸变光场定义为  $u(\mathbf{r}_{i,j})$ ,这个畸变光场所对应的主值相位为  $\varphi(\mathbf{r}_{i,j})$ ,其中  $\mathbf{r}_{i,j}$  代表一采样点在光场的位置,它包含  $x$  和  $y$  方向的分量,其位置分别为  $i \times d$  和  $j \times d$ , $d$  表示两个邻近采样点的间距。采样区域既可以表示为激光大气传输模拟计算中计算数组的点,也可以认为是自适应光学中波前探测器子孔径所组成的数组。采样区域内的畸变光场和对应相位之间的关系可表示为

$$\varphi(\mathbf{r}_{i,j}) = \text{Im}[\lg u(\mathbf{r}_{i,j})], \quad (1)$$

即对数函数的虚部就是相位的主值,它的范围在  $-\pi \sim \pi$  之间。采样区域内的主值相位差  $\mathbf{g}(\mathbf{r}_{ij})$  可表示  $\mathbf{g}(\mathbf{r}_{i,j})$  为

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}_{i,j}) = \frac{[\varphi(\mathbf{r}_{i+1,j}) - \varphi(\mathbf{r}_{i,j})]_p}{d} \mathbf{l}_x + \frac{[\varphi(\mathbf{r}_{i,j+1}) - \varphi(\mathbf{r}_{i,j})]_p}{d} \mathbf{l}_y, \quad (2)$$

式中  $[\dots]_p$  表示对相位差取主值,也就是在相位差中加上  $2\pi$  或减去  $2\pi$ ,使相位差值在  $-\pi \sim \pi$  之间,这样做是为了与实测的值保持一致。 $\mathbf{l}_x$  和  $\mathbf{l}_y$  分别为  $x$  和  $y$  方向的单位矢量。将(1)式代入(2)式可得到

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}_{i,j}) = \frac{\text{Im}[\lg\{u[(i+1)d, jd]u^*(id, jd)\}]}{d} \mathbf{l}_x + \frac{\text{Im}[\lg\{u[id, (j+1)d]u^*(id, jd)\}]}{d} \mathbf{l}_y, \quad (3)$$

当畸变光场中有相位不连续点时,围绕这个点的主值相位差的闭回路积分之和等于  $\pm 2\pi$ ,这里的“+”或“-”与不连续点的极性有关,用数学形式可表示为

$$\begin{aligned} & \mathbf{g}(\mathbf{r}_{i,j}) \cdot \mathbf{l}_x d + \mathbf{g}(\mathbf{r}_{i+1,j}) \cdot \mathbf{l}_y d - \mathbf{g}(\mathbf{r}_{i,j+1}) \cdot \mathbf{l}_x d - \mathbf{g}(\mathbf{r}_{i,j}) \cdot \mathbf{l}_y d = \\ & \begin{cases} \pm 2\pi, & \text{if the contour encloses a branch point} \\ 0, & \text{if otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

这个环路是由四个相邻的点或子孔径组成的一个矩形,它的四个角的位置分别为  $\mathbf{r}_{i,j}$ 、 $\mathbf{r}_{i+1,j}$ 、 $\mathbf{r}_{i+1,j+1}$  和  $\mathbf{r}_{i,j+1}$ 。(4)式中中等号左边后两项的负号是由于考虑了沿闭回路积分的方向与矩形两个方向上的单位矢量  $\mathbf{l}_x$  和  $\mathbf{l}_y$  方向相反的缘故。利用(4)式就可以计算出激光在大气中传输时畸变光场中出现的相位不连续点数目。

## 3 数值计算结果

### 3.1 相位屏数不同

关于畸变光场中出现的相位不连续点数目

值计算,在发射和传输条件一定的情况下,影响计算结果的三个关键参量分别是相位屏数、网格数和网格间距<sup>[1,8]</sup>。下面首先考察选用不同相位屏数得到的相位不连续点数目随湍流强度的变化过程。计算中采用的是发射口径为 0.6 m、波长为 0.6328  $\mu\text{m}$  的实心平顶光束,湍流的内尺度为 0.005 m、外尺度为 10 m,计算时间步数为 80(即相同的发射和传输条件下,激光传输 80 次)、时间间隔为 0.02 s,计算网格为  $256 \times 256$ ,网格间距为 0.010 m,相位屏数  $N$  分别选取 80 和 100 个时得到的计算结果如图 1 所示。

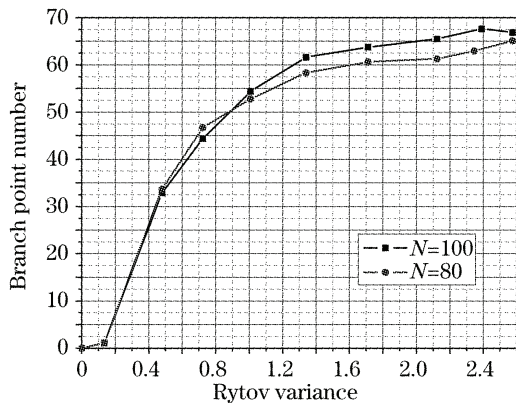


图 1 相位屏数不同对计算结果的影响

Fig. 1 Branch point number versus phase screens

从图 1 中可以看出,相位屏数  $N$  选取的不同对计算结果是有影响的。当 Rytov 方差小于 0.5 时,两种不同的相位屏数对计算结果几乎没有影响。当 Rytov 方差介于 0.5~0.9 时,选取 80 个相位屏得到的相位不连续点数目反而比选取 100 个相位屏得到的相位不连续点数目要多。当 Rytov 方差大于 0.9 时,选取 100 个相位屏得到的相位不连续点数目要比选取 80 个相位屏得到的相位不连续点数目多。不过从整体上来看,相位不连续点数目随湍流的增强其变化的趋势基本是一致的,当畸变光场处于弱湍流区域(即 Rytov 方差小于 0.1)时,没有探测到相位不连续点。随着湍流的增强,在强湍流和弱湍流的过渡区域(即 Rytov 方差在 0.1~0.2 之间),畸变光场中开始出现相位不连续点,此时相位不连续点数目增加的比较缓慢。随着湍流的进一步增强(即 Rytov 方差在 0.2~0.7 之间),相位不连续点数目急剧增加,几乎呈线性增长。当 Rytov 方差在 0.7~1.4 之间时,相位不连续点数目继续增加,只是增加的相对缓慢些;当 Rytov 方差大于 1.4 时,相位不连续点数目开始趋于饱和。因本文只是定性计算分析相位不连续点数目随湍流强度的变化过程,为了计算方便,以下计算中选用的是 80 个相位屏。

### 3.2 网格数和网格间距不同

下面通过选取不同的网格数和网格间距来考察相位不连续点数目随湍流强度的变化过程。计算中采用的参量除传输距离、大气折射率结构常量和网格数及网格间距不同外,其余的参量与 3.1 中的相同。

传输距离为 50 km,折射率结构常量  $C_n^2 = 1.4 \times 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$ ,计算网格分别选取  $256 \times 256$  和  $512 \times 512$ ,相应的网格间距分别为 0.010 m 和 0.005 m,结果如图 2 所示。

从图 2 中可以看出,计算网格和网格间距选取

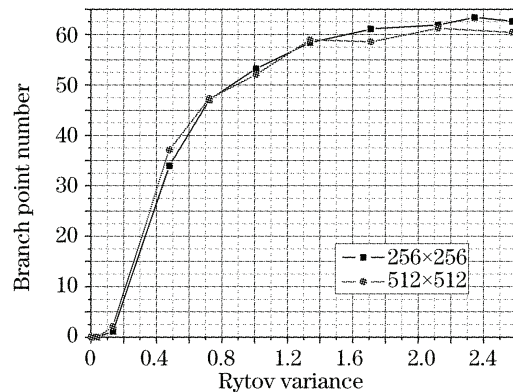


图 2 取不同网格数和网格间距的情况下相位不连续点数目随 Rytov 方差的变化过程

Fig. 2 Branch point number versus Rytov variance with different grid size and grid step

的不同对相位不连续点数目计算结果是有影响的。当 Rytov 方差小于 0.7 时,网格间距越大(相应的计算网格数越少),得到的相位不连续点数目越少。这是因为如果网格间距较大,当相位不连续点对的间距较小时,有可能落到由四个采样点所组成的网格的内部,这样通过(4)式就无法计算到这对相位不连续点。但是,当 Rytov 方差大于 0.7 时,网格间距越小计算的相位不连续点数目反而越少,这可能是因为网格间距越小,计算网格的低频部分也会相对减少,艾里斑范围内的数据点数就越少,这将对计算结果产生影响。不过,从图 2 中也可以看出,选取不同的计算网格和网格间距所得到的相位不连续点数目随 Rytov 方差变化的整体趋势也是比较一致的。

传输距离为 45 km,大气折射率结构常量  $C_n^2 = 2.0 \times 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$ ,计算网格分别选取  $256 \times 256$  和  $512 \times 512$ ,相应的网格间距分别为 0.0075 m 和 0.004 m,其结果如图 3 所示。

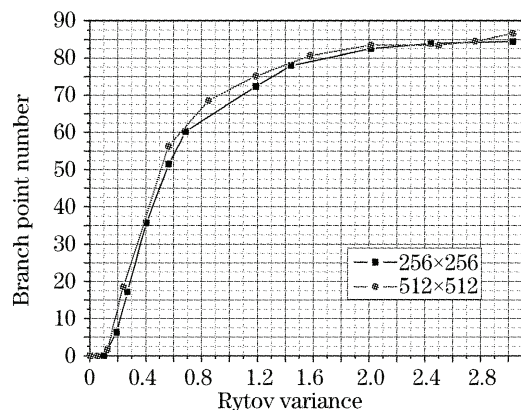


图 3 网格数与网格间距不同时,相位不连续点数目随 Rytov 方差的变化过程

Fig. 3 Branch point number versus Rytov variance with different grid size and grid step

从图 3 中也可以看出,选取不同的计算网格和网格间距所得到的相位不连续点数目随 Rytov 方差变化的整体趋势与图 2 是一致的。另外,从以上的数值计算中也可以看出,虽然畸变光场中得到的相位不连续点数目随湍流的增强具有相同的变化过程,但不同的传输条件下,相位不连续点数目趋于饱和时的 Rytov 方差是不同的,并且趋于饱和时的相位不连续点数目也是不同的。传输距离越短、湍流越强,相位不连续点数目趋于饱和时的 Rytov 方差越大,趋于饱和时的相位不连续点数目越多。相位不连续点数目与大气折射率结构常量、光束传输距

离和传输光的波长有关<sup>[8,9,12]</sup>,为了进一步验证不同传输条件下得到的相位不连续点数目及其变化过程的差异,我们又分别计算了不同大气折射率结构常量、传输距离和激光波长条件下,相位不连续点数目及其变化过程。同样为了计算方便,以下计算中均选用发射口径为 0.6 m,相位屏数为 80、计算网格为  $256 \times 256$ 、网格间距随传输条件的变化作相应的改变,传输距离从 50 km 缩短到 10 km,大气折射率结构常量从  $1.4 \times 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$  增强到  $3.2 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$ ,波长分别为  $0.6328 \mu\text{m}$ 、 $0.82 \mu\text{m}$  和  $1.315 \mu\text{m}$  的准直平顶光束,计算结果如图 4 和图 5 所示。

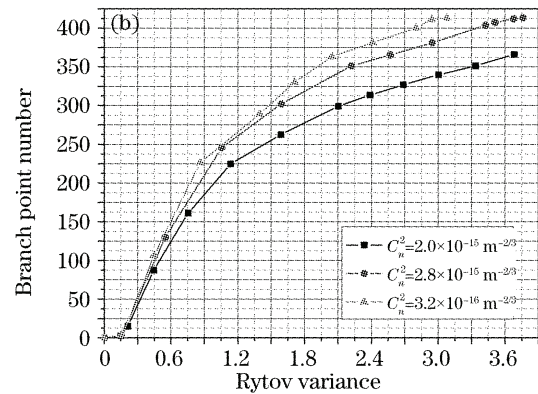
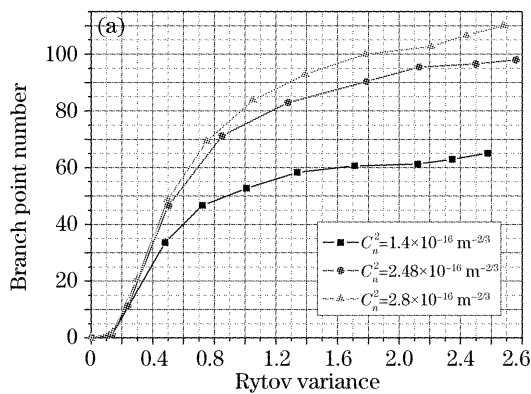


图 4 相位不连续点数目的变化过程。(a) 传输距离较长但湍流较弱, (b) 传输距离较短但湍流较强

Fig. 4 Variation of the branch points number. (a) Long propagation length but weak turbulence, (b) short propagation length but strong turbulence

图 4(a) 中的三条曲线分别表示的是大气折射率结构常量为  $1.4 \times 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$ 、 $2.48 \times 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$  和  $2.8 \times 10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$ , 相应的传输距离分别为 50 km、40 km 和 35 km 的计算结果。图 4(b) 中大气折射率结构常量分别为  $2.0 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$ 、 $2.8 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$  和  $3.2 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$ , 相应的传输距离分别为 15 km、12 km 和 10 km。从图 4 中也可以看出,畸变光场中出现的相位不连续点数目随湍流的

增强遵循上述同样的规律,并且随着湍流由弱变强,同时传输距离也在缩短,畸变光场中得到的相位不连续点趋于饱和时的数目也是不同的,湍流越强,该数目越大。并且此时的 Rytov 方差值也是不同的,湍流越强,Rytov 方差值越大。随着湍流的增强,在同样的 Rytov 方差条件下,相位不连续点数目显著增加。

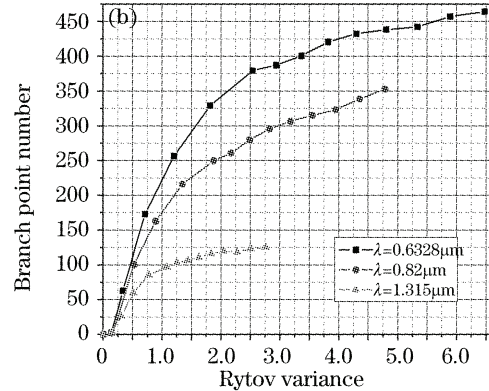
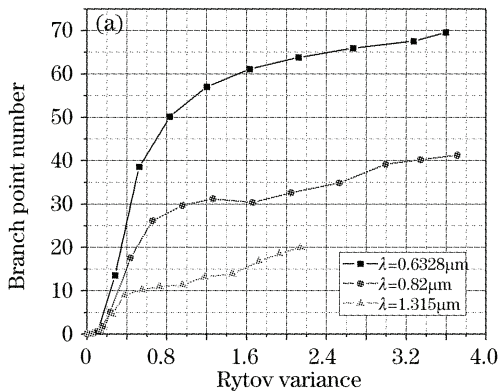


图 5 相位不连续点数目的变化过程。(a) 弱湍流条件下的不同波长, (b) 强湍流条件下的不同波长

Fig. 5 Variation of the branch points number under the condition of weak (a) and strong (b) turbulence with different wavelength

$10^{-16} \text{ m}^{-2/3}$ , 图 5(b) 选用的大气折射率结构常量为  $3.2 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$ 。从图 5 中也可以看出, 对于不同的大气折射率结构常量和不同的激光波长, 相位不连续点数目随湍流的增强也遵循同样的规律。另外, 大气折射率结构常量越大, 畸变光场中出现的相位不连续点数目趋于饱和时的 Rytov 方差也越大, 此时的相位不连续点数目也越多。不同波长的畸变光场中, 除了波长越短得到的相位不连续点数目越多外, 波长较短的畸变光场中得到的相位不连续点数目又开始缓慢增加时的 Rytov 方差也相对较大。

Rytov 方差与大气折射率结构常量、光束传输距离和传输光的波长这三个量有关。因此, 仅用 Rytov 方差并不能完全描述不同条件下的畸变光场中出现的相位不连续点数目。由于激光在大气中传输距离  $L$  后, 光束会破碎成许多散斑, 散斑的典型尺度就是  $\sqrt{\lambda L}$ , 一般称之为菲涅耳尺度, 也被称为第一菲涅耳半径, 它在光传输分析中是一个非常重要的尺度参量。当采样区域一定时, 畸变光场内的相位不连续点数目应与散斑的典型尺度(即  $\sqrt{\lambda L}$ ) 成反比。所以, 当 Rytov 方差一定时, 激光束的传输距离越短相位不连续点数目越多, 传输光的波长越短得到的相位不连续点数目越多。

另外, 激光在湍流大气中传输时, 研究者经常用大气折射率结构常量来描述湍流的强弱。以下计算了相位不连续点数目随大气折射率结构常量的变化过程。计算中采用的激光波长为  $1.315 \mu\text{m}$ , 传输距离为  $10 \text{ km}$ , 大气折射率结构常量由  $2.0 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$  变化到  $8.0 \times 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ , 分别考察  $4 \text{ km}$ 、 $6 \text{ km}$ 、 $8 \text{ km}$  和  $10 \text{ km}$  处得到的相位不连续点数目的变化过程, 计算结果如图 6 所示。

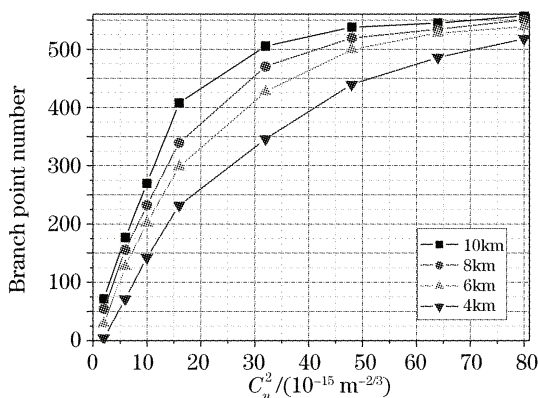


图 6 相位不连续点数目随  $C_n^2$  的变化过程

Fig. 6 Variation of the branch points number with different  $C_n^2$

从图 6 中可以看出, 随着大气折射率结构常量

的增加, 在计算范围内, 不同传输距离处得到的相位不连续点数目也都有一个急剧增加、而后又缓慢增加、最后趋于饱和的变化过程。计算结果中之所以没有出现相位不连续点数目从无到有而后又缓慢增加的过程, 是因为没有从湍流很弱时的大气折射率结构常量算起。

## 4 结 论

利用激光大气传输 4 维程序, 通过选取不同的相位屏数、计算网格和网格间距, 对畸变光场中产生的相位不连续点数目进行了数值计算。通过计算发现, 湍流很弱时没有相位不连续点出现; 在强湍流与弱湍流的过渡区域开始出现相位不连续点, 此时的相位不连续点数目变化幅度较小; 随着湍流的进一步增强, 相位不连续点数目急剧增加, 几乎呈线性增长; 当湍流达到一定程度时, 相位不连续点数目又开始缓慢增长, 最后趋于饱和。不同的传输条件下, 相位不连续点数目趋于饱和时的 Rytov 方差是不同的, 并且趋于饱和时的相位不连续点的数目也是不同的。所以, 对激光大气传输进行自适应光学相位校正时, 如果考虑不连续相位的影响, 就要根据不同的传输条件选择合适的波前探测器及波前校正器, 从而提高自适应光学系统的校正能力。另外, 通过计算发现, 用畸变光场中出现的相位不连续点数目来描述湍流的强弱也有一定的局限性。

## 参 考 文 献

- 1 Fried D L. Branch point problem in adaptive optics[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1998, **15**(10): 2759~2768
- 2 David L. Fried, Jeffrey V. Vaughn. Branch cuts in the phase function[J]. *Appl. Opt.*, 1992, **31**(15): 2865~2882
- 3 Fan Chengyu, Wang Yingjian, Gong Zhiben. Detection of branch-point in light phase [J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(11): 1388~1391  
范承玉, 王英俭, 龚知本. 光波相位不连续点的探测[J]. *光学学报*, 2001, **21**(11): 1388~1391
- 4 Fan Chengyu, Wang Yingjian, Gong Zhiben. Effect of branch points on adaptive optics[J]. *High Power Laser and Partical Beams*, 2003, **15**(5): 435~438  
范承玉, 王英俭, 龚知本. 相位不连续点对自适应光学的影响[J]. *强激光与粒子束*, 2003, **15**(5): 435~438
- 5 J. F. Nye, M. V. Berry. Dislocations in wave trains[J]. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1974, **336**: 165~190
- 6 Rao Ruizhong. Collimated laser beam in a turbulence atmosphere: fractal structure and phase branch points[J]. *High Power Laser and Partical Beams*, 2002, **14**(4): 501~504  
饶瑞中. 湍流大气中的准直激光束: 分形结构与相位不连续点[J]. *强激光与粒子束*, 2002, **14**(4): 501~504
- 7 Ge Xiaolu, Fan Chengyu, Wang Yingjian. Numerical computation of the character of branch points' temporal and spatial variation in laser propagation through atmosphere[J].

- High Power Laser and Partical Beams*, 2006, **18**(7): 1066~1070
- 葛筱璐, 范承玉, 王英俭. 激光大气传输相位不连续点的时空演化特征的数值计算[J]. *强激光与粒子束*, 2006, **18**(7): 1066~1070
- 8 Valerii V. Voitsekhovich, Dmitri Kouznetsov, Dmitri Kh. Morozov. Density of turbulence-induced phase dislocations[J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(21): 4525~4535
- 9 Fan ChengYu. *The Study of Phase Discontinuity of Laser Propagation through Atmosphere and Correction* [D]. Hefei: Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, 2003
- 范承玉. 激光大气传输相位不连续性及其校正研究[D]. 合肥: 中国科学院安徽光学精密机械研究所, 2003
- 10 Youkuan Li. Branch point effect on adaptive correction [C]. *Proc. SPIE*, 2004, **5490**: 1064~1070
- 11 Wang YingJian. *Some Problems' Discuss about the Laser Propagation in the Atmosphere and Its Phase Compensation* [D]. Hefei: Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Scineses, 1996
- 王英俭. 激光大气传输及其位相补偿的若干问题探讨[D]. 合肥: 中国科学院安徽光学精密机械研究所, 1996
- 12 Ge Xiaolu, Fan Chengyu. Relationship between the number of branch points and the characteristic parameters of turbulence effect[J]. *J. Atmospheric and Environmental Optics*, 2007, **2**(1): 28~31
- 葛筱璐, 范承玉. 相位不连续点数与湍流效应特征参量的关系[J]. *大气与环境光学学报*, 2007, **2**(1): 28~31